тодом. Далее задача (6) может решаться одним из методов вычислительной математики.

Для реализации метода на ЭВМ удобно использовать линейную аппроксимацию $k^2(z)$ при этом интеграл $\int\limits_h^a (k^2(z)-\lambda_p^2)^{-1/2}\,dz$, отнимающий основное машинное время, вычисляется в каждом слое аналитически:

$$\int\limits_{a_i}^{a_{i+1}} (k^2(z)-\lambda_p^2)^{-1/2}\,dz = 2\sqrt{k^2(z)-\lambda_p^2}\Bigg/\frac{dk^2(z)}{dz}\Bigg|_{a_i}^{a_{i+1}}. \tag{7}$$

Практическое преимущество перед стандартным методом ВКБ заключается в том, что на каждый шаг по глубине требуется одно вычисление интеграла (7), а ВКБ требует нескольких итераций (в зависимости от требуемой точности), в каждой из которых вычисляется интеграл типа (7). Таким образом, при вычислении большого количества собственных значений для изменяющейся глубины предложенная модификация экономит машинное время в 2–4 раза.

При использовании фазы коэффициента отражения в виде (2) полученные результаты применимы (так же, как и приближение ВКБ) только в том случае, если точки поворота отстоят от границ волновода более чем на длину волны для всего диапазона изменения глубины либо совпадают с этими границами.

Однако при применении данного способа следует учитывать, что простейшие вычислительные схемы решения (6) дают хорошую точность лишь при достаточно малом шаге Δh и если не требуется подробное табулирование $\lambda_p(x, y)$, то применять данный алгоритм нецелесообразно; применение более сложных схем с предикцией приводит к итерациям и тем самым сводит на нет экономию времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Барридж Р., Вейнберг Г.* Горизонтальные лучи и вертикальные моды // Распространение волн и подводная акустика. М.: Мир, 1980. С. 76.
2. *Буренков С. В.* Влияние параметров прибрежной зоны на фазовые характеристики нормальных волн // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 5. С. 826–830.
3. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М. Изд-во АН СССР, 1957.
4. *Толстой И., Клей К. С.* Акустика океана. М.: Мир, 1969. С. 40.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
17.IV 1987

УДК 534.2

ПОЭТАПНЫЙ УЧЕТ ПЕРЕРАССЕЯНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИЛЬНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ

Буров В. А., Сасковец А. В.

При восстановлении характеристик достаточно сильных неоднородностей, когда рассеянное поле внутри некоторой, пусть даже малой, области неоднородности превышает зондирующее поле, неприменимы не только приближения Борна и Рытова, но и многие алгоритмы, учитывающие перерассеяние [1, 2]. Предложенный ранее метод последовательных приближений [3], использующий поэтапное «включение» рассеивателя с переопределением в процессе решения функций Грина задачи, позволяет восстановить сильные неоднородности. Его практическое применение, однако, затруднено в связи с нобходимостью переопределять функции Грина, для чего при решении задачи приходится многократно обращать матрицы общего вида большой размерности. Частично этого недостатка лишен метод двух шаговых итераций, основанный на решении системы уравнений

$$\begin{gathered} Q\varepsilon(V_0+RT)=u, \\ T-\varepsilon RT=\varepsilon V_0; \end{gathered} \tag{1}$$

здесь ε – функция, описывающая неоднородность, V_0 – падающее зондирующее поле, u – рассеянное поле, Q и R – соответственно операторы распространения на области неоднородности в область приема и внутри области неоднородности (ядром этих операторов является функция Грина), T описывает вторичные источники на области неоднородности.

Представим функции T и ε в виде [4]

$$T_n=T_{n-1}+\Delta T_n,\qquad \varepsilon_n=\varepsilon_{n-1}+\Delta\varepsilon_n, \tag{2}$$

где Δ – малое приращение соответствующего оператора. Тогда можно организовать итерационную процедуру, которая в пренебрежении членами второго порядка малости по Δ и с учетом возможности поочередного решения уравнений в (1) имеет вид

$$Q\Delta\varepsilon_n(V_0+RT_{n-1})=u-Q\varepsilon_{n-1}(V_0+RT_{n-1}),\qquad (E-\varepsilon_{n-1}R)\Delta T_n=-(E-\varepsilon_nR)T_{n-1}+\varepsilon_nV_0, \tag{3}$$

здесь n – номер итерации, E – тождественный оператор, $\varepsilon_0=0$, $T=0$. Алгоритм (3) сходится, однако, лишь при условии

$$|u/V_0|<1 \tag{4}$$

на всей области неоднородности, поскольку (3) сводим к алгоритму [1]. Это исключает применение (3) для восстановления сильных неоднородностей, с которыми часто приходится иметь дело в задачах акустики. Если предположить, что достаточно хорошо известно начальное приближение $\varepsilon_{\text{нач}}$ и необходимо определить малую поправку к нему $\Delta\varepsilon'$, тогда условие сходимости для (3) приобретает вид

$$\left|\frac{u-R\varepsilon_{\text{нач}}(V_0+RT(\varepsilon_{\text{нач}}))}{V_0+RT(\varepsilon_{\text{нач}})}\right|<1,$$

где $T(\varepsilon_{\text{нач}})$ – вторичные источники, соответствующие неоднородности $\varepsilon_{\text{нач}}$. Последнее условие слабее, чем (4), поскольку относится не ко всему рассеянному полю, а лишь к его части, соответствующей малому рассеивателю $\Delta\varepsilon'$. Алгоритм (3) сойдется, тогда как сходимость метода последовательных приближений [1] не зависит от начального приближения ε. Это позволяет расширить область применимости (3) путем поэтапного «включения» многократного перерассеяния, чего можно добиться, дополнив (2) соотношением $R_m=F(m)$, $R_1=0$, $R_M=R$, $m=1\div M$, где m – индекс разбиения, а F – некоторая функция, определяющая закон разбиения оператора перерассеяния R.

В случае простейшего равномерного разбиения $R_1\equiv0$, $R_m=F(m)=R_{m-1}+\Delta R_m=R_{m-1}+R/M$, $m=2\div M$. Для такой постановки задачи итерационная система запишется в виде

$$Q\varepsilon_{n-1}[V_0+R_m(T_{n-1}+\Delta T_n)]+Q\Delta\varepsilon_n[V_0+R_mT_{n-1}]=u,\qquad T_{n-1}+\Delta T_n-(\varepsilon_{n-1}+\Delta\varepsilon_n)R_mT_{n-1}-\varepsilon_{n-1}R_m\Delta T_n=(\varepsilon_{n-1}+\Delta\varepsilon_n)V_0. \tag{5}$$

Учитывая, что уравнения системы (5) решаются поочередно, первое относительно $\Delta\varepsilon_n$, а второе – ΔT_n, система (5) упрощается до вида

$$Q\varepsilon_{n-1}[V_0+R_mT_{n-1}]+Q\Delta\varepsilon_n[V_0+R_mT_{n-1}]=u,\qquad [E-\varepsilon_{n-1}R_m]\Delta T_n=-[E-\varepsilon_nR_m]T_{n-1}+\varepsilon_nV_0. \tag{6}$$

В процессе итераций (6) необходимо производить в общем случае обращение матриц большой размерности. От этой операции можно избавиться, если предположить, что $\Delta\varepsilon_n\sim\Delta\varepsilon_{n-1}$. Тогда первое из соотношений (6) запишется как $QV_0\Delta\varepsilon_n=u-QR_mT_{n-1}\cdot(\varepsilon_{n-1}+\Delta\varepsilon_{n-1})-QV_0\varepsilon_{n-1}$. Последнее выражение представимо в виде рекуррентного соотношения

$$\Delta\varepsilon_n=(QV_0)^{-1}[u-QR_mT_{n-1}(\varepsilon_{n-1}+\Delta\varepsilon_{n-1})]-\varepsilon_{n-1}, \tag{7}$$

где $(\,.\,.\,.\,.\,.\,)^{-1}$ – обозначает обратный оператор, а V_0 – диагональный оператор, трансформированный из вектора, описывающего зондирующее поле. Второе уравнение (6), учитывая итерационный характер решения системы, можно записать в виде

$$\Delta T_n=\varepsilon_nV_0+\varepsilon_nR_mT_{n-1}+\varepsilon_{n-1}R_m\Delta T_{n-1}. \tag{8}$$

Таким образом, окончательно алгоритм, позволяющий решать обратные задачи для сильных неоднородностей ($|u/V_0|>1$), запишется в виде

$$\Delta\varepsilon_n{}^m=(QV_0)^{-1}[u-QR_m\overset{m}{T}_{n-1}(\overset{m}{\varepsilon}_{n-1}+\Delta\overset{m}{\varepsilon}_{n-1})]-\overset{m}{\varepsilon}_{n-1},\qquad \Delta T_n{}^m=(V_0+R_m\overset{m}{T}_{n-1})\varepsilon_n{}^m+\overset{m}{\varepsilon}_{n-1}R_m\Delta\overset{m}{T}_{n-1}, \tag{9}$$

где итерации по n проводятся для всех $m=1\div M$, а

$$\varepsilon_0{}^m=\overset{m-1}{\varepsilon_n}\Big|_{n\to\infty},$$

$$T_0^m \equiv T_n^{m-1} \Big|_{n\to\infty}.$$

Алгоритм (9) требует одного обращения матрицы QV_0 в процессе решения задачи, где, кроме того, V_0 – диагональная матрица.

Способ получения исходных данных нигде не оговаривался, поскольку система (9) сохраняет свой вид при любой организации эксперимента, включающей измерения на различных частотах и при различных конфигурациях зондирующего поля. При этом во всех выражениях лишь появится суммирование по независимым измерениям.

В заключение отметим, что характерной чертой обратных задач для сильных рассеивателей является наличие большого количества неизлучающих и ненаблюдаемых конфигураций вторичных источников в области неоднородности [5]. Поэтому практически всегда необходимо решать задачу, в которой количество экспериментальных данных превышает число искомых параметров рассеивателя ε (избыточная задача). Для этого случая первое из уравнений (9) при решении задачи методом наименьших квадратов перепишется в форме

$$\Delta\varepsilon_n{}^m = [(QV_0)^+ QV_0]^{-1}(QV_0)^+[u - QR_m \overset{m}{T}_{n-1}(\overset{m}{\varepsilon}_{n-1} + \Delta\overset{m}{\varepsilon}_{n-1})] - \overset{m}{\varepsilon}_{n-1},$$

где $(QV_0)^+$ – эрмитово-сопряженный оператор (QV_0). Написание второго из уравнений (9) при решении избыточной задачи не изменится, увеличится лишь его размерность. Отметим также, что проведение операции $[(QV_0)^+QV_0]$ предполагает выполнение свертки по индексам, нумерующим различные по частоте и конфигурации облучающего поля попытки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Буров В. А., Горюнов А. А., Сасковец А. В.* Итерационный алгоритм решения обратной задачи рассеяния // Вестн. МГУ. Физика, Астрономия. 1982. Т. 23. № 6. С. 87–89.
2. *Johnson S. A., Tracy M. L.* Inverse scattering solutions by a sinc basis, multiple source, moment method. Pt I: Theory // Ultrason. Imag. 1983. V. 5. № 6. P. 361–375.
3. *Байков С. В., Буров В. А., Горюнов А. А., Сасковец А. В.* Расширение области сходимости итерационного метода решения обратной задачи рефракции // Вестн. МГУ. Физика, Астрономия. 1982. Т. 23. № 6. С. 22–25.
4. *Буров В. А., Горюнов А. А., Сасковец А. В., Тихонова Т. А.* Обратные задачи рассеяния в акустике (обзор) // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 4. С. 433–449.
5. *Буров В. А., Горюнов А. А., Сасковец А. В., Тихонова Т. А.* Устранение неединственности восстановления сильного рассеивателя при использовании избыточности измерительных данных // Тез. докл. IX Всесоюз. симпоз. по дифракции и распространению волн. Тбилиси: Изд-во Тбил. политехн. ин-та. 1985. Т. 2. С. 432–434.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
2.XII.1987

УДК 534

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКИХ ВОЛН НА ТОНКОМ ИМПЕДАНСНОМ ТЕЛЕ ВРАЩЕНИЯ

Валуева В. Н.

Пусть на импедансное тело D_ε, граница которого задана уравнением $r = \varepsilon F(z)$ (где r, φ, z – цилиндрические координаты, функция $F(z)$ гладкая всюду при $0 < z < l$ и $F(0) = F(l) = 0$; $\varepsilon > 0$ – малый параметр), падает плоская волна $V_0 = A_0 \exp\{i\mathbf{kR}\}$.

Тело D_ε расположено в свободном пространстве. Звуковое поле вне тела D_ε обозначим $P = U + V_0$, где U – рассеянное поле. Функция P удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)P = 0. \tag{1}$$

Рассеянное поле U удовлетворяет краевому условию на границе тела S_ε:

$$\left(\frac{\partial}{\partial n} + ikg\right)U|_{S_\varepsilon} = -\left(\frac{\partial}{\partial n} + ikg\right)V_0|_{S_\varepsilon}; \tag{2}$$