в среде, неучтенного при обработке экспериментальных данных. При обработке учитывалась только сферическая расходимость. Разница расстояний источников от центра антенны (7 м) дает превышение интенсивности в 2 раза при затухании ~0,1 (1/м). Логарифмический декремент затухания на частоте 10 Гц и скорости 170 м/с при этом получился равным 0,2–0,4. Эта величина не противоречит данным, приведенным в литературе для глин и суглинков [2], что соответствовало условиям проведения эксперимента.

В заключение авторы выражают благодарность В. В. Гущину за интерес к работе и ряд полезных советов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Harington R. F.* Field computation by moment methods. New York. Academic Press. 1968. P. 216.
2. *Васильев Ю. И., Гуревич Г. И.* О соотношении между декрементами затухания и скоростями распространения продольных и поперечных волн // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1962. № 12. С. 23–27.

Всесоюзный научно-исследовательский институт по нормализации в машиностроении

Поступило в редакцию 13.VIII.1986

УДК 534.26

ПОПЕРЕЧНИКИ РАССЕЯНИЯ И ПОГЛОЩЕНИЯ РЕЗОНАТОРА ДЛЯ ПРОДОЛЬНЫХ И СДВИГОВЫХ ВОЛН В ПЛАСТИНЕ

Лапин А. Д.

Важнейшими параметрами, характеризующими эффективность работы резонатора, являются поперечники рассеяния и поглощения [1]. Ниже рассчитаны эти параметры для резонатора продольных и сдвиговых волн в пластине.

Пусть безграничная тонкая пластина лежит в плоскости xy и пусть к ней в точке (0, 0) присоединен тонкий круглый стержень, работающий на изгиб как пружина, на конце стержня укреплен груз массой $^1/_2m$. Такой же стержень с грузом присоединен к пластине симметрично с другой стороны. Эта конструкция из двух одинаковых стержней с грузами является резонатором для продольных и сдвиговых волн в пластине, коэффициент упругости его обозначим через $\varkappa(1-i\varepsilon)$, где ε – коэффициент диссипации. На резонатор падает гармоническая продольная волна со смещением

$$\mathbf{u}^{(0)}(x,t)=\mathbf{n}A\exp[i(k_{\text{п}}x-\omega t)],\tag{1}$$

где $k_{\text{п}}$ – волновое число продольной волны в пластине, ω – частота звука, $\mathbf{n}$ – орт по оси x. Под действием волны (1) резонатор возбуждается и излучает поле $\mathbf{u}^{(1)}$. Полное поле $\mathbf{u}$ в пластине равно $\mathbf{u}^{(0)}+\mathbf{u}^{(1)}$.

Обозначим через $u'(t)$ – смещение грузов резонатора. Уравнение движения этих грузов имеет вид

$$m\frac{d^2u'}{dt^2}=-F(t),\tag{2}$$

где сила F определяется по формуле

$$F(t)=\varkappa(1-i\varepsilon)[u'(t)-\mathbf{n}\mathbf{u}(0,0,t)].\tag{3}$$

Согласно работе [2], уравнение колебаний пластины, соединенной с резонатором, можно написать в виде

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}-(c_t/c_{\text{п}})^2\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u}-1/c_{\text{п}}^2\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}=-\frac{\mathbf{n}f}{\rho Hc_{\text{п}}^2},\tag{4}$$

где ρ и H – соответственно плотность материала и толщина пластины, $c_{\text{п}}$ и c_t – соответственно скорости продольной и сдвиговой волн в пластине. Плотность силы f равна $F(t)/(\pi a^2)$ при $r<a$ и равна нулю при $r>a$, где $r=\sqrt{x^2+y^2}$, a – радиус стержня. Поскольку падающая волна $\mathbf{u}^{(0)}$ является свободной волной, то в левой части уравнения (4) можно заменить $\mathbf{u}$ на $\mathbf{u}^{(1)}$.

Рассеянное поле в пластине получим следующим способом. Рассчитаем смещения пластины и грузов, создаваемые гармонической силой $F(t)=F_0\exp(-i\omega t)$. Амплитуду F_0 этой силы подберем таким образом, чтобы удовлетворялось соотношение (3). Смещение пластины получим методом Фурье. В полярной системе координат (r,φ) компоненты $u_r^{(1)}=u_x^{(1)}\cos\varphi+u_y^{(1)}\sin\varphi$ и $u_\varphi^{(1)}=-u_x^{(1)}\sin\varphi+u_y^{(1)}\cos\varphi$ этого смещения имеют вид

$$u_r^{(1)}(r,\varphi)=\frac{iF_0}{8\rho Hc_{\text{п}}^2}\cos\varphi\{\gamma_{\text{п}}[H_0^{(1)}(k_{\text{п}}r)-H_2^{(1)}(k_{\text{п}}r)]+$$

$$+\gamma_t(c_{\text{п}}/c_t)^2[H_0^{(1)}(k_tr)+H_2^{(1)}(k_tr)]\},\tag{5}$$

$$u_\varphi^{(1)}(r,\varphi)=-\frac{iF_0}{8\rho H c_п^2}\sin\varphi\{\gamma_п[H_0^{(1)}(k_п r)+H_2^{(1)}(k_п r)]+$$

$$+\gamma_t(c_п/c_t)^2[H_0^{(1)}(k_t r)-H_2^{(1)}(k_t r)]\},$$

где $H_0^{(1)}(kr)$ и $H_2^{(1)}(kr)$ – функции Ханкеля первого рода, $k_t=\omega/c_t$ – волновое число сдвиговой волны в пластине, $r>a$. Коэффициенты $\gamma_п$ и γ_t определяются по формуле

$$\gamma_{п,t}=2/a^2\int_0^a J_0(k_{п,t}r)\,r\,dr,$$

где $J_0(kr)$ – функция Бесселя. Для тонкого (по сравнению с длиной сдвиговой волны) стержня выполняется соотношение $\gamma_п\approx\gamma_t\approx1$ и поле $\{u_r^{(1)}, u_\varphi^{(1)}\}$ практически совпадает с полем точечной силы $F_0\exp(-\omega t)$, приложенной в начале координат.

Рассчитаем компоненты $u_x^{(1)}$ и $y_y^{(1)}$ при $r=a\ll2\pi/k_t$. Пользуясь формулами (5), получим следующие приближенные выражения:

$$\{u_x^{(1)}\}_{r=a}=\frac{iF_0}{8\rho H\omega^2}\left\{(k_п^2+k_t^2)+i\frac{2}{\pi}[k_п^2\ln(k_п a)+k_t^2\ln(k_t a)]\right\}\exp(-i\omega t),$$

$$\{u_y^{(1)}\}_{r=a}=0.$$

Согласно им, можно считать, что поле (5) создается «вмороженным» кругом, колеблющимся вдоль оси x со скоростью $v(t)=-i\omega\{u_x^{(1)}\}_{r=a}$. Импеданс излучения «вмороженного» круга радиусом a получим по формуле

$$Z=\frac{F(t)}{v(t)}=8\omega\rho H\left\{(k_п^2+k_t^2)+i\frac{2}{\pi}[k_п^2\ln(k_п a)+k_t^2\ln(k_t a)]\right\}^{-1}.$$

При $r<a\leqslant2\pi/k_t$ смещение $u_x^{(1)}$ можно представить в виде

$$u_x^{(1)}\approx\frac{v(t)}{i\omega}=\frac{iF_0}{\omega Z}\exp(-i\omega t). \quad (6)$$

Согласно уравнению (2) смещение грузов будет

$$u'(t)=\frac{F_0}{m\omega^2}\exp(-i\omega t). \quad (7)$$

Удовлетворим соотношению (3). Подставляя формулы (1), (6) и (7) в это соотношение, получим искомую амплитуду силы

$$F_0=i\omega A\{(Y_1+\varepsilon\omega/\varkappa)+i[1/\omega m-\omega/\varkappa+Y_2]\}^{-1}, \quad (8)$$

где

$$Y_1=\mathrm{Re}(1/Z)=\frac{\omega(c_п^2+c_t^2)}{8\rho H c_п^2c_t^2},$$

$$Y_2=\mathrm{Im}(1/Z)=\frac{1}{4\pi\rho H\omega}[k_п^2\ln(k_п a)+k_t^2\ln(k_t a)].$$

Рассеянное поле $\mathbf{u}^{(1)}$ получим по формулам (5) при подстановке F_0 в них. Интенсивное рассеяние падающей волны от резонатора происходит при частотах, близких ω^0, где ω^0 – решение уравнения

$$1/\omega m-\omega/\varkappa+Y_2(\omega)=0.$$

При резонансе $(\omega=\omega^0)$ амплитуда силы согласно формуле (8) равна

$$F_0=i\omega^0A(Y_1+\varepsilon\omega^0/\varkappa)^{-1}. \quad (9)$$

Вычислим мощность, уносимую рассеянным полем. Усредненный за период поток энергии в рассеянном поле равен

$$Q_{рас}=\frac{1}{2}Y_1|F_0|^2. \quad (10)$$

Величину $Q_{рас}/q^{(0)}$, где $q^{(0)}={}^1/_2H\rho c_п(\omega^0A)^2$ – усредненный поток энергии в падающей волне, отнесенный к единичной длине по оси y, обозначим $\sigma_{рас}$ и назовем поперечником рассеяния резонатора:

$$\sigma_{рас}=\frac{1}{H\rho c_п}Y_1(Y_1+\varepsilon\omega^0/\varkappa)^{-2}.$$

В отсутствие потерь ($\varepsilon=0$) поперечник рассеяния равен

$$\sigma_0=(H\rho c_п Y_1)^{-1}=\frac{4}{\pi}\frac{c_п c_t}{(c_п^2+c_t^2)}\lambda_t^0,$$

где $\lambda_t^0=2\pi/k_t^0$ – длина сдвиговой волны.

Вычислим мощность, поглощаемую резонатором при $\omega=\omega^0$. Она равна работе, совершаемой пластиной над резонатором, и определяется по формуле

$$Q_{погл}=-\widetilde{\mathrm{Re}\{F_0\exp(-i\omega^0 t)\}\mathrm{Re}\{-i\omega^0 u_x(0,0,t)\}},$$

где волнистая черта означает усреднение по времени за период колебаний. При учете соотношений (1), (6) и (9) из этой формулы получим следующее выражение:

$$Q_{погл}=\frac{1}{2}(\omega^0 A)^2\varepsilon\omega^0/\varkappa(Y_1+\varepsilon\omega^0/\varkappa)^{-2}. \qquad (11)$$

Величину $Q_{погл}/q^{(0)}$ обозначим через $\sigma_{погл}$ и назовем поперечником поглощения:

$$\sigma_{погл}=\frac{\varepsilon\omega^0}{\varkappa H\rho c_п}(Y_1+\varepsilon\omega^0/\varkappa)^{-2}.$$

Введем вспомогательную величину: «поперечник поглощения в отсутствие рассеяния» σ_1, равную отношению поглощаемой мощности $Q_{погл}$ для «несжимаемой пластины» со смещением $A\exp(-i\omega t)$, к потоку энергии $q^{(0)}$. Она определяется по формуле

$$\sigma_1=\varkappa/(\varepsilon\omega^0 H\rho c_п).$$

Выразим поперечники рассеяния и поглощения резонатора через величины σ_0 и σ_1. Тогда получим следующие формулы:

$$\sigma_{рас}=\frac{1/\sigma_0}{[(1/\sigma_0)+(1/\sigma_1)]^2},\quad \sigma_{погл}=\frac{1/\sigma_1}{[(1/\sigma_0)+(1/\sigma_1)]^2}.$$

Они аналогичны соответственным формулам для сечения рассеяния и поглощения пузырька газа в жидкости [1].

Суммарный поперечник рассеяния и поглощения равен

$$\sigma_{полн}=\sigma_{рас}+\sigma_{погл}=\frac{1}{(1/\sigma_0)+(1/\sigma_1)}.$$

Диссипативные потери всегда уменьшают полный поперечник, т. е. уменьшают полную мощность, забираемую резонатором из падающей волны. При увеличении коэффициента диссипации ε поперечник рассеяния монотонно убывает от σ_0 при $\varepsilon=0$ до нуля при $\varepsilon=\infty$. Поперечник поглощения при этом сначала растет, достигает максимума при $\varepsilon=\varepsilon_0$, где

$$\varepsilon_0=\frac{\varkappa(c_п^2+c_t^2)}{8H\rho c_п^2 c_t^2},$$

а затем стремится к нулю при $\varepsilon\to\infty$. При коэффициенте диссипации, равном ε_0, выполняется соотношение

$$\sigma_{рас}=\sigma_{погл}=\sigma_0/4=\sigma_1/4.$$

Аналогичным способом можно рассчитать поперечники рассеяния и поглощения резонатора для сдвиговых волн в пластине. Пусть на резонатор падает сдвиговая волна со смещением

$$\mathbf{u}^{(0)}(x,t)=\mathbf{j}A\exp[i(k_t x-\omega t)],$$

где $\mathbf{j}$ – орт по оси y. Усредненный поток энергии в этой волне, отнесенный к единичной длине по оси y, равен $q_t^{(0)}={}^1/_2 H\rho c_t(\omega^0 A)^2$. Рассеянная и поглощенная мощности, $Q_{рас}$ и $Q_{погл}$ по-прежнему определяются по формулам (10) и (11). Поперечниками рассеяния и поглощения резонатора для сдвиговых волн назовем величины $\sigma_{рас}=Q_{рас}/q_t^{(0)}$ и $\sigma_{погл}=Q_{погл}/q_t^{(0)}$. Поскольку при одинаковых амплитудах смещений в сдвиговой и продольной волнах отношение потоков энергии $q_t^{(0)}/q^{(0)}$ равно $c_t/c_п$, то поперечники рассеяния и поглощения резонатора для сдвиговых волн в $c_п/c_t$ раз больше соответственных поперечников резонатора для продольных волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Исакович М. А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973. 495 с.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория упругости. М.: Наука, 1965. 203 с.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
21.X.1987