УДК 534.23

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИЗГИБНОЙ ВОЛНЫ В ПЛАСТИНЕ, ТОЛЩИНА КОТОРОЙ ПЛАВНО УМЕНЬШАЕТСЯ ДО НУЛЯ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

Миронов М. А.

При достаточно плавном изменении толщины пластины изгибная волна распространяется по ней без отражения. Изменяется локальное волновое число k, зависящее от толщины пластины h, и амплитуда волны A, изменение которой вызвано сохранением потока энергии, переносимой волной:

$$k=\left(\frac{3\rho\omega^2}{E_{пл}h^2(x)}\right)^{1/4}, \tag{1}$$

$$A=A_0(h_0/h(x))^{3/4}. \tag{2}$$

Здесь x – координата вдоль пластины, ρ – плотность материала пластины, $E_{пл}$ – пластиночный модуль Юнга, ω – частота. Условие достаточной плавности изменения толщины пластины формулируется так: волновое число изгибной волны должно мало меняться на расстоянии порядка длины волны

$$\frac{dk}{dx}\frac{1}{k}\ll k,$$

или

$$\frac{1}{k^2}\frac{dk}{dx}\ll 1. \tag{3}$$

Подставляя (1) в (3), получим

$$\frac{1}{2}\left(\frac{E_{пл}}{3\rho\omega^2}\right)^{1/4}\frac{1}{h^{1/2}}\frac{dh}{dx}\ll 1. \tag{4}$$

Условию (4) удовлетворяет, в частности, степенным образом изменяющаяся толщина, обращающаяся в нуль на конечном интервале:

$$h(x)=\varepsilon x^n. \tag{5}$$

Подставляя (5) в (4), получим

$$nx^{n-1}\ll 2(3\rho\omega^2/E_{пл})^{1/4}\frac{1}{\varepsilon^{1/2}}x^{n/2}.$$

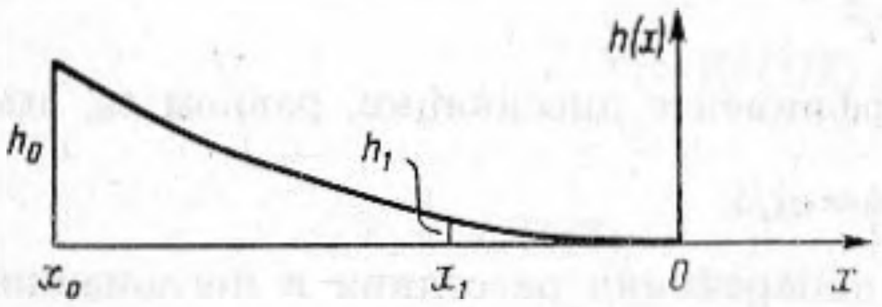
При $n>2$ это условие выполнено при достаточно малых x, а при $n=2$ и $\varepsilon\ll(3\rho\omega^2/E_{пл})^{1/2}$ – при всех x. Далее рассмотрим случай $n=2$. Волновое число изгибной волны стремится к бесконечности при $x\to 0$:

$$k=\left(\frac{3\rho\omega^2}{E_{пл}}\right)^{1/4}\frac{1}{\varepsilon^{1/2}}\frac{1}{x}, \tag{6}$$

а фазовая и групповая скорости – к нулю:

$$c_ф=\frac{\omega}{k}=\varepsilon^{1/2}\left(\frac{E_{пл}\omega^2}{3\rho}\right)^{1/4}x,$$

$$c_{гр}=\partial\omega/\partial k=2\varepsilon^{1/2}\left(\frac{E_{пл}\omega^2}{3\rho}\right)^{1/4}x. \tag{7}$$



Пластина с заостренной по параболическому закону кромкой: $x=0$ – координата кромки идеальной пластины; $x=x_0$ – координата начального сечения толщиной h_0; $x=x_1$ – текущая координата сечения толщиной h_1 либо координата кромки реальной пластины, у которой параболическое изменение толщины имеет место только до толщины h_1, а далее пластина обрывается

Время распространения волнового пакета с несущей частотой ω от координаты x_0 до координаты x_1 (см. фигуру) равно

$$T=\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{c_{гр}}=\frac{1}{2\varepsilon^{1/2}}\left(\frac{3\rho}{E_{пл}\omega^2}\right)^{1/4}\left|\ln\frac{x_1}{x_0}\right|. \tag{8}$$

В соответствии с (8) время распространения стремится к бесконечности при $x_1\to 0$. Это означает, что волна, выпущенная в утолщенной части пластины, за любое конечное время не достигнет заостренной кромки и, следовательно, не отразится от нее. Энергия волны поглотится в пластине при наличии сколь угодно малого поглощения. Полагая модуль Юнга комплексным, $E_{пл}\to E_{пл}(1+i/Q)$ (Q – добротность материала), получим из (6) выражение для мнимой части локального волнового числа

$$\operatorname{Im} k = \frac{1}{4Q} \operatorname{Re} k = \frac{1}{4Q} \left(\frac{3\rho\omega^2}{E_{\text{пл}}} \right)^{1/4} \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \frac{1}{x}.$$

При стремлении x к 0 $\operatorname{Im} k$ стремится к бесконечности. Более того, интегральный инкремент затухания на интервале (x_0, x_1)

$$\int_{x_0}^{x_1} \operatorname{Im} k \, dx = \frac{1}{4Q\varepsilon^{1/2}} \left(\frac{3\rho\omega^2}{E_{\text{пл}}} \right)^{1/4} \left| \ln \left(\frac{x_1}{x_0} \right) \right| \tag{9}$$

также стремится к бесконечности при приближении x_1 к нулю.

Итак, сужающаяся по параболическому закону пластина обладает свойством полного поглощения падающей изгибной волны. Этот эффект имеет аналоги в других волновых процессах. В работе [1] показано, что внутренняя волна в стратифицированной жидкости, плавнонеоднородной по горизонтали, не отражается от плоскости, в которой волна запирается. В учебнике по квантовой механике [2] рассмотрена задача о волновой функции частицы в поле потенциала $U(r) = -\gamma/r^n$ и показано, что при $n>2$ или при $n=2$ и γ достаточно большом, дискретные собственные значения отсутствуют – частица падает на центр. На волновом языке это означает, что отражение от центра отсутствует. В работе [3] отмечено отсутствие отраженных волн в модельной слоисто-неоднородной среде с профилем скорости звука, линейно спадающим с глубиной до нуля.

При реализации неотражающей кромки пластины основная трудность заключается в точном исполнении участка пластины вблизи кромки. Поскольку свести толщину пластины до нуля по параболическому закону невозможно, реальная пластина будет обрываться при некоторой конечной толщине h_1 (см. фигуру). От этого окончания будет происходить отражение. Из-за затухания, которое увеличивается при утоньшении пластины, волна при прохождении до фактической кромки и обратно будет ослаблена. В результате амплитудный коэффициент отражения от некоторого начального сечения x_0 толщиной h_0 оказывается отличным от единицы и равным (см. (9))

$$W = e^{-2\int \operatorname{Im} k \, dx} = \left(\frac{h_1}{h_0} \right)^{\frac{1}{2\varepsilon^{1/2} Q} \left(\frac{3\rho\omega^2}{E_{\text{пл}}} \right)^{1/4}}.$$

Например, при $h_1/h_0 = 10^{-3}$, $(3\rho\omega^2/\varepsilon^2 E_{\text{пл}})^{1/4} = 10$, $Q = 10^2$ получим $W = (10^{-3})^{1/20} = 10^{-3/20} = 0{,}708$. Видно, что даже при изменении толщины пластины на три порядка и при весьма малой добротности материала пластины значительная часть энергии волны отражается.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бадулин С. И., Цимринг Л. Ш., Шрира В. И.* Захват и вертикальная фокусировка внутренних волн в пикноклине горизонтальными неоднородностями стратификации и течений // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273. № 2. С. 459–463.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: ГИФМЛ, 1963. 703 с.
3. *Pekeris C. L.* Theory of propagation of sound in a half-space of variable sound velocity under condition of formation of a shadow zone // J. Acoust. Soc. Amer. 1946. V. 18. № 2. P. 295–315.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
14.X.1987

УДК 534.24

ОТРАЖЕНИЕ ЗВУКА ОТ СЛАБОНЕОДНОРОДНОЙ УСИЛИВАЮЩЕЙ СРЕДЫ

Молевич Н. Е., Ораевский А. Н.

Известно, что при отражении электромагнитной волны от оптически менее плотной активной (усиливающей) среды коэффициент отражения может быть больше единицы ([1, 2] и приведенные в них ссылки). В [3] сообщалось, что аналогичное явление может наблюдаться и для низкочастотной звуковой волны при отражении ее от границы раздела равновесного и неравновесного колебательно-возбужденного газа. В настоящей работе показано, что при определенных условиях коэффициент отражения от неравновесной среды будет больше единицы независимо от частоты падающей звуковой волны.