АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXIV 1988 Вып. 4

УДК 534.222.2

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАСХОДЯЩЕЙСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ С ФОКУСИРОВКОЙ

Касьянов Д. А., Шалашов Г. М.

В рамках геометрической оптики дан анализ основных нелинейных эффектов, возникающих при распространении сходящегося волнового фронта, который можно представить как цилиндрическую волну, сходящуюся по одной координате и расходящуюся по другой.

В акустике на низких частотах трудно, а порой и невозможно создать антенны с двумерными апертурами. Использование сферических или цилиндрических расходящихся волн затрудняет реализацию нелинейных методов исследования, так как степень проявления нелинейных эффектов существенно зависит от амплитуды поля. Можно увеличить амплитуду поля и тем самым повысить эффективность нелинейных эффектов, используя сфокусированные волновые фронты.

Рассмотрим в поглощающей квадратично-нелинейной среде поле сходящегося волнового фронта, представляющего собой поверхность, образованную вращением дуги окружности Az_0B около оси CC' (см. фиг. 1).

Метод анализа волнового поля такого фронта зависит от того, какой предельный случай реализуется. В случае малоуглового пучка (длиннофокусный случай) анализ возможен на основе уравнения Хохлова — Заболотской — Кузнецова. Наибольший интерес представляет короткофокусный случай, который можно рассматривать в рамках геометрической оптики с использованием уравнения Бюргерса.

Для наиболее общего случая — произвольного изменения площади сечения лучевой трубки — уравнение Бюргерса выглядит следующим образом [1]:

$$\frac{\partial P}{\partial z}-(\varepsilon/c_0^3\rho_0)P\frac{\partial P}{\partial \tau}-(b/2c_0^3\rho_0)\frac{\partial^2 P}{\partial \tau^2}+\frac{P}{2S}\frac{dS}{dz}=0, \tag{1}$$

где P — давление в волне, $\tau=t-z/c$ — время в сопровождающей волну системе отсчета, ε — параметр квадратичной нелинейности среды, b — диссипативный параметр, S — площадь сечения лучевой трубки.

Волновой фронт, представленный на фиг. 1, можно рассматривать как цилиндрическую волну, расходящуюся по одной координате и сходящуюся по другой. Вследствие этих условий изменение площади сечения лучевой трубки S будет протекать пропорционально произведению текущих координат или пропорционально произведению $z(F-z)/(z_0(F-z_0))$ (см. фиг. 1). В связи с этим из уравнения (1) можно получить

$$\frac{\partial P}{\partial z}-\alpha P\frac{\partial P}{\partial \tau}-g\frac{\partial^2 P}{\partial \tau^2}+\frac{P}{2z}-\frac{P}{2(F-z)}=0, \tag{2}$$

где $\alpha=\varepsilon/(\rho_0c_0^3)$, $g=b/(2\rho_0c_0^3)$.

Уравнение (2) учитывает цилиндрические сходимость и расходимость по разным координатам. После фокуса в области $z>F$, как следует из (2), начнется двойная цилиндрическая расходимость, что приведет к резкому ослаблению поля за фокусом.

Сделаем в (2) замены:

$$U=\sqrt{z/z_0}\cdot\sqrt{(F-z)/(F-z_0)}P, \tag{3}$$

$$\tilde{z}=-\sqrt{z_0(F-z_0)}\,(\arcsin((F-2z)/F)-\arcsin((F-2z_0)/F)),$$

$$z_0\leqslant z<F.$$

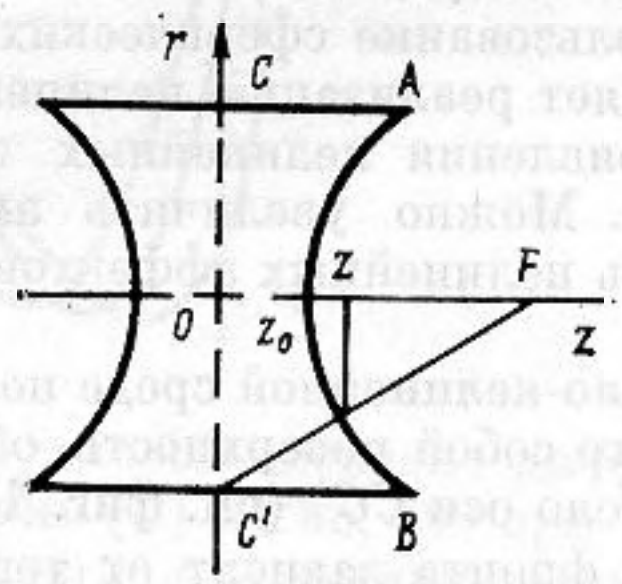
Проведя необходимые преобразования, получим

$$\frac{\partial U}{\partial \tilde{z}} - \alpha U \frac{\partial U}{\partial \tau} - g(F/(2\sqrt{z_0(F-z_0)}))\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}\cos((\tilde{z}-\tilde{z}_0)/\sqrt{z_0(F-z_0)})=0, \tag{4}$$

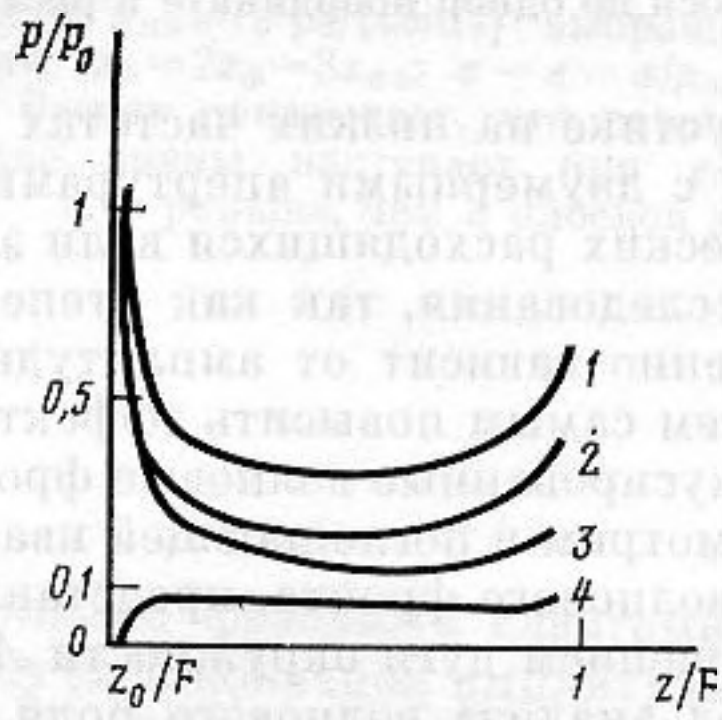
где $\tilde{z}_0=\sqrt{z_0(F-z_0)}\arcsin((F-2z_0)/F)$.

Уравнение (4) напоминает уравнение Бюргерса для плоского случая, но с вязкостью, изменяющейся по тригонометрическому закону. Отметим, что последнее утверждение весьма условно, так как в уравнении (2) были проведены нелинейные замены переменных.

Уравнение (4), написанное в приближении геометрической оптики, верно при условии $z<(F-\sqrt{F\lambda}/2)$, где $\sqrt{F\lambda}=2l$ — продольный размер фокуса в случае двумерной линзы [2].



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Волновой фронт

Фиг. 2. Зависимость амплитуды поля от расстояния: линейное поле *1* — $F/z_0=50$, *2* — $F/z_0=100$; сильное проявление нелинейных эффектов для $\nu=20$ кГц, $\varepsilon\sim400$ при начальном потоке мощности $\Pi_0=1$ Вт/см² в системе с $F/z_0=100$, $z_p/F=0{,}4$; *3* — первая гармоника, *4* — вторая гармоника

Для случая $z>F$ необходима другая замена:

$$U=P\sqrt{z(z-F)},$$
$$\tilde{z}=\ln(|2\sqrt{z(z-F)}+2z-F|/F), \tag{5}$$

и уравнение (2) можно записать в виде

$$\frac{\partial U}{\partial \tilde{z}} - \alpha U \frac{\partial U}{\partial \tau} - g(F/2)\,\mathrm{sh}\,\tilde{z}\,\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}=0. \tag{6}$$

Уравнение (6) будет описывать реальный процесс лишь для $z>F+\sqrt{F\lambda}/2$.

Таким образом, из рассмотрения исключена малая, собственно фокальная область. Однако кажется разумным предположение, что в фокальной области амплитуда поля изменяется незначительно из-за малости размеров этой области и относительной компенсации сходимости и дифракции. К этому же заключению можно прийти, сравнивая значение амплитуды поля в фокальной области, полученное из оценочной формулы для поля в фокусе $P_F/P_0=(4F/\lambda)^{1/4}$ [2], и значение амплитуды поля на границе фокальной области в рассматриваемом случае.

Наибольший интерес представляет уравнение (4), которое и будем в дальнейшем анализировать. Уравнение (6) описывает в принципе сферический характер поведения волнового поля после прохождения фокуса и не вызывает трудностей при анализе. Нелинейные эффекты в области после фокуса будут выражены намного слабее, чем в области до F. Накопление их будет происходить пропорционально натуральному логарифму от расстояния, пройденного волной, нормированного на начальный радиус «излучателя» F [3].

Анализ уравнения (4) проведем в двух предельных случаях: в случае слабой нелинейности и в случае сильной нелинейности (для акустического числа Рейнольдса $\mathrm{Re} \gg 1$). В случае слабой нелинейности задача решается методом возмущений. Линейное поле находится на основе линеаризованного уравнения (4) с граничным условием $U(0, \tau) = P_0 \sin \omega\tau$. В результате линейное поле можно представить в виде

$$P(z, \tau) = \sqrt{z_0(F-z_0)/z(F-z)}\, P_0 \exp\left(-g\omega^2(z-z_0)\right) \sin \omega\tau. \tag{7}$$

Экспоненциальный член в (7) полностью определяется средой, а сомножитель $\sqrt{z_0(F-z_0)/z(F-z)}$ по существу отвечает за геометрию задачи и представляет наибольший интерес. На фиг. 2 изображена эволюция этого множителя при разных начальных радиусах z_0 (зависимости *1* и *2*).

Можно выделить (см. фиг. 2) три характерных участка изменения волнового поля в случае рассматриваемого сходящегося фронта: первый, где преобладает цилиндрическая расходимость, второй, где цилиндрические сходимость и расходимость компенсируют друг друга, и третий, где преобладает сходимость. Протяженность этих участков зависит от отношения начальных радиусов задачи F/z_0.

Хорошо видны преимущества анализуруемого сходящегося волнового фронта над просто цилиндрической расходимостью: достигается не только стабилизация, но и нарастание поля в дальней зоне, где можно рассчитывать на более сильные эффекты, связанные с нелинейностью среды.

Найдем малую поправку к линейному решению на удвоенной частоте для первоначально синусоидального сигнала. Для произвольной длины затухания ($L_3 = (g\omega^2)^{-1}$) решение для малой поправки на частоте 2ω можно получить в виде

$$P_2 = \sqrt{z_0(F-z_0)/z(F-z)}\, \alpha\omega P_0^2 \exp(2z_0/L_3 - 4z/L_3) \times$$
$$\times \int_{z_0}^{z} \exp(2z/L_3) \sqrt{z_0(F-z_0)/4z(F-z)}\, dz \sin 2\omega\tau. \tag{8}$$

Если $L_3 \gg F$ выражение (8) перейдет в

$$P_2 = (1/2)\alpha\omega P_0^2 \sqrt{(z_0(F-z_0))^2/z(F-z)} \cdot \{\arcsin((F-2z_0)/F) -$$
$$-\arcsin((F-2z)/F)\} \sin 2\omega\tau. \tag{9}$$

Можно получить приближенное решение для произвольной длины затухания. Учитывая характер поведения функции $\sqrt{z_0(F-z_0)/z(F-z)}$ на большей части отрезка $[z_0, F-\sqrt{F\lambda}/2]$, возьмем интеграл в (8) с помощью теоремы о среднем [4]. Выражение (8) примет вид

$$(P_2 l_p)/(P_0\sqrt{z_0(F-z_0)}) = 1/2\sqrt{z_0(F-z_0)/z(F-z)} \exp(2z_0/L_3 - 4z/L_3) \times$$
$$\times [L_3(\exp(2z/L_3) - \exp(2z_0/L_3))/2(z-z_0)] \{\arcsin((F-2z_0)/F) - \tag{10}$$
$$-\arcsin((F-2z)/F)\} \sin 2\omega\tau,$$

где $l_p = \rho_0 c_0^2/k\varepsilon P_0$ — длина образования разрыва в плоской волне.

Нетрудно заметить, что при $L_3 \to \infty$ выражения (9) и (10) совпадают. В этих выражениях можно выделить множитель (он стоит в фигурных скобках), который отвечает за накопление нелинейных эффектов в случае рассматриваемого волнового фронта.

Конкретные зависимости для различных длин затухания волны накачки в воде приведены на фиг. 3. Нужно отметить, что фазовый механизм фокусировки сохраняется и для второй гармоники. Для сравнения на фиг. 3 представлены зависимости для вторых гармоник в плоской, расходящейся цилиндрической волне. На начальном участке, как это и следовало ожидать, величина амплитуды поля в случае анализируемого фронта близка к просто цилиндрическому случаю, а около фокальной области она на порядок выше. Примерно во столько же раз рассма-

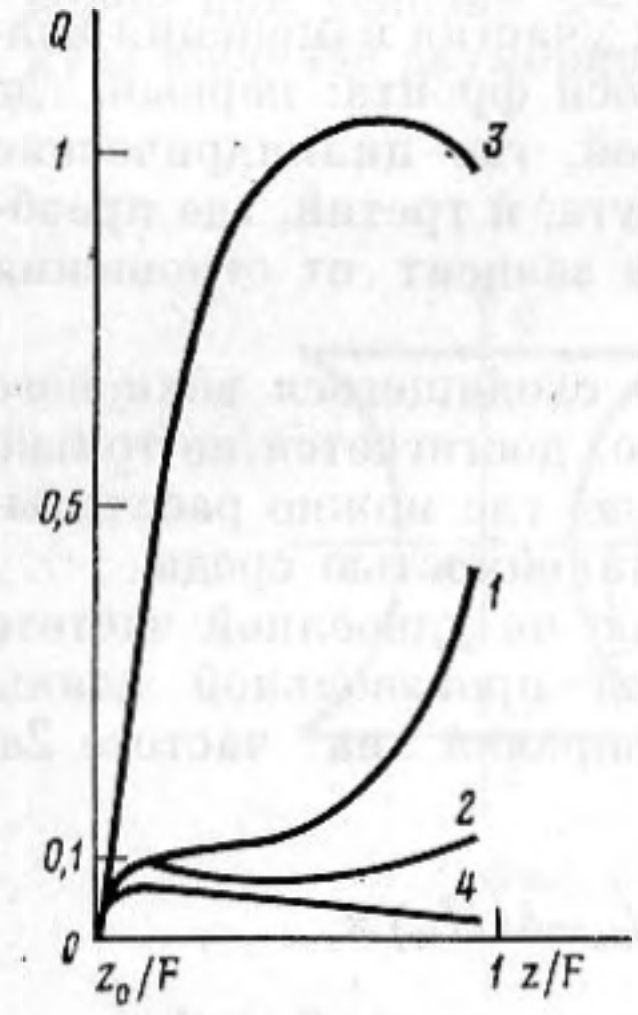
триваемый сфокусированный фронт уступает плоскому случаю в окрестности фокальной области.

При сильном проявлении нелинейных эффектов в уравнении (4) можно пренебречь членом, отвечающим за поглощение, и анализировать уравнение типа простой волны. Все результаты получатся из решений, верных для плоской волны, заменой (3).

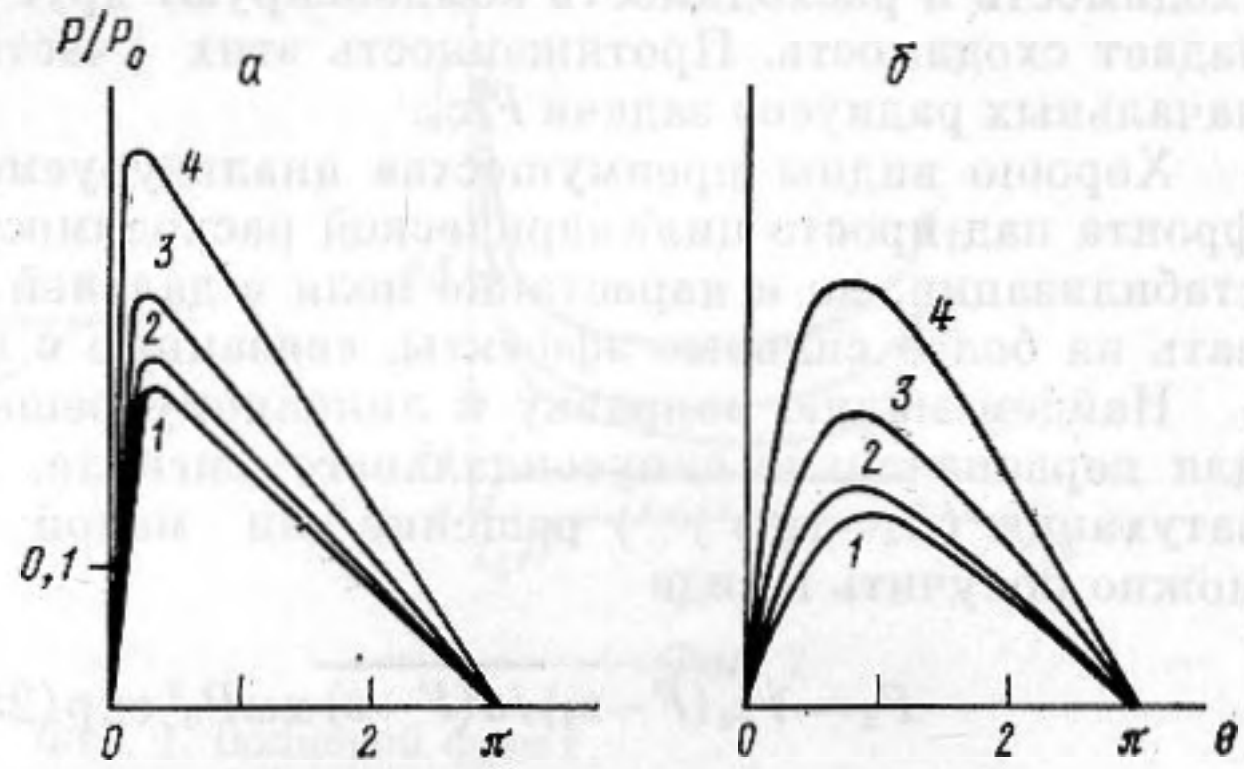
Таким образом, получим условие на координату образования разрыва z_p в рассматриваемом случае:

$$\sqrt{z_0(F-z_0)}\{\arcsin((F-2z_0)/F)-\arcsin((F-2z_p)/F)\}=c^2/[\varepsilon\omega\sqrt{2\Pi_0/\rho_0 c_0}). \tag{11}$$

Замена (3) справедлива лишь в промежутке $z_0 \leqslant z < F$, это означает, что функции arcsin берутся в смысле главного значения. Из (11) следует условие на минимальный начальный поток мощности в среде с параметром



Фиг. 3



Фиг. 4

Фиг. 3. Генерация второй гармоники в случае слабой нелинейности: $\nu=20$ кГц, $F/z_0=100$, $\Pi_0=1$ Вт/см^2, $Q=|P/P_0|\,l_p/\sqrt{z_0(F-z_0)}$; *1* – $L_3=1/g\omega^2\to\infty$, *2* – $2F$, *3* – $2F$ (плоский фронт), *4* – $L_3=2F$ (цилиндрический расходящийся фронт)

Фиг. 4. Форма пилообразной волны: *а* – Re=20, *б* – Re=5: *1* – $z/F=0{,}6$, *2* – 0,8, *3* – 0,9, *4* – $z/F=0{,}95$, $\theta=\omega\tau$

квадратичной нелинейности ε, необходимое для образования разрыва до фокуса:

$$(\varepsilon^2\Pi_0)_{\min}=(\rho_0 c_0^5/8\pi^2\nu^2)\{\sqrt{z_0(F-2z_0)}(\arcsin((F-2z_0)/F)-$$
$$-\arcsin((F-2z)/F))\}^{-2}. \tag{12}$$

При анализе выражения (12) видно, что в наиболее интересных случаях (небольших фокусных расстояний, в воде, на сравнительно низких частотах ($\nu\sim20$ кГц)) разрывов в волнах накачки не образуется при доступных начальных потоках мощности ($\Pi_0\sim1$ Вт/см^2). Но лишь стоит взять среду с $\varepsilon\sim100$, то разрыв образуется до фокуса в системе с $F=100\lambda$, $z_0=\lambda$ на частоте $\nu=20$ кГц при $\Pi_0=1$ Вт/см^2. Этой средой может быть, например, вода с пузырьками [5] или грунт [6].

Эволюция плоского синусоидального фронта в сильно нелинейной среде без затухания описывается следующими формулами (см., например, [3]):

$$P/P_0=\sum_{n=1}^{\infty}(2J_n(nz/l_p)/(nz/l_p))\sin(n\omega\tau),\quad 0<z/l_p<1, \tag{13}$$

где J_n – функция Бесселя n-го порядка:

$$P/P_0=\sum_{n=1}^{\infty}(2/(n(1+z/l_p)))\sin(n\omega\tau),\quad z/l_p>\pi/2. \tag{14}$$

Совокупность выражений (13) и (14) дает представление об изменении спектрального состава волны почти во всей области изменения z/l_p, за исключением небольшого участка $1<z/l_p<\pi/2$, правда, при $\pi/2<z/l_p<\pi$ формула (14) дает ошибку в десятки процентов, при $z/l_p<3{,}6$ ошибка становится не более 2% [7].

Возможен подход (метод Блэкстока [7]), когда можно «сшить» формулы (13) и (14), используя неполные функции Бесселя, и получить решение в интервале $1<z/l_p<\pi/2$. Сделав замены (3) в выражениях (13), (14), получим соответственно

$$P/P_0=\sqrt{z_0(F-z_0)/(z(F-z))}\sum_{n=1}^{\infty}2J_n((n/l_p)\sqrt{z_0(F-z_0)}\,\Gamma)\times$$

$$\times((n/l_p)\sqrt{z_0(F-z_0)}\,\Gamma)^{-1}\sin(n\omega\tau), \qquad (15)$$

$$P/P_0=\sqrt{z_0(F-z_0)/(z(F-z))}\sum_{n=1}^{\infty}2(n(1+\sqrt{z_0(F-z_0)}/l_p)\,\Gamma)^{-1}\sin(n\omega\tau), \qquad (16)$$

где $\Gamma=\arcsin((F-2z_0)/F)-\arcsin((F-2z)/E)$.

Формула (16) верна с точностью до десятка процентов при условии $\tilde{z}/l_p>\pi/2$, а выражение (15) имеет смысл, если $\tilde{z}/l_p<1$. При сравнении формул (14) и 16) видно, что в случае исследуемого фронта в отличие от плоского возможно нарастание амплитуды пилы далеко от излучателя около фокуса.

При формуле (16) можно оценить амплитуду пилы в фокальной области значением на ее границе:

$$P_F/P_0=\sqrt{8z_0/\sqrt{F\lambda}}\sum_{n=1}^{\infty}(n(1+\sqrt{z_0/F}\,\pi F/l_p))^{-1}\sin(n\omega\tau). \qquad (17)$$

Оценочной формулой (17) можно пользоваться при условии $\tilde{z}/l_p>\pi/2$.

Эволюция первой и второй гармоник мощной волны изображена на фиг. 2. Для z, удовлетворяющих условию $\tilde{z}/l_p>1$, при построении использовалась формула (15), для z, таких, что $\tilde{z}/l_p>\pi/2$ – формула (16), а промежуточные значения исследовались с помощью метода Блэкстона [7, 8]. Из сравнения зависимостей *2* и *3*, изображенных на фиг. 2, видно, что за счет нелинейного затухания амплитуда первой гармоники около фокальной области уменьшилась почти вдвое.

Отметим еще один общий факт: в отличие от случая слабой нелинейности, где амплитуда второй гармоники зависит от квадрата поля, при сильном проявлении нелинейных эффектов, на стадии пилы, амплитуда второй гармоники обратно пропорциональна своему номеру.

С помощью точного решения уравнения Бюргерса для плоского случая, которое описывает поведение пилообразной волны с конечной шириной фронта, по аналогии с цилиндрическим случаем [9] можно сконструировать приближенное решение уравнения (4), описывающее эволюцию пилообразной волны, образовавшейся в случае рассматриваемого сходящегося волнового фронта. Выглядеть он будет следующим образом:

$$U=P_0=(-\omega\tau+\pi\,\mathrm{th}(\omega\tau/\Delta))/(1+\tilde{z}/l_p), \qquad (18)$$

где

$$\Delta=F(1+\tilde{z}/l_p)\cos((\tilde{z}-\tilde{z}_0)/\sqrt{z_0(F-z_0)})\,[2\pi\,\mathrm{Re}\sqrt{z_0(F-z_0)}]^{-1}. \qquad (19)$$

$\mathrm{Re}=L_з/l_p$ – акустическое число Рейнольдса для плоского случая. Путем непосредственной подстановки выражения (18) в (4) можно убедиться, что это выражение приближенно удовлетворяет уравнению (4) при условии $\mathrm{Re}\gg1$.

Если задаче о распространении симметричного фронта эквивалентна задача о распространении плоской волны в среде с гладко меняющейся с координатой вязкостью [3], то условие $\mathrm{Re} \gg 1$ означает, что ширина фронта образовавшейся пилообразной волны определяется вязкостью в некоторой небольшой окрестности точки, где фронт находится в данный момент времени, и слабо зависит от предыстории. Поэтому возможно построение приближенного решения по аналогии с точным решением для плоской волны в среде с постоянной вязкостью.

На фиг. 4 изображена форма пилообразной волны, построенная по формулам (18), (19) при различных z и Re. На участке $0{,}6 \leqslant z/F \leqslant 0{,}8$ амплитуда пилообразной волны и соответственно ширина ее фронта меняются мало. Резкое их изменение начинается при приближении к фокальной области (см. фиг. 4). При выполнении условий образования разрыва до фокуса в рассматриваемой системе (см. (12)) максимальная величина амплитуды пилы зависит в основном от величины акустического числа Рейнольдса и отношения начальных радиусов задачи F/z_0.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пелиновский Е. Н., Фридман В. Е., Энгельбрехт Ю. К.* Нелинейные эволюционные уравнения. Таллин: Валгус, 1984. 120 с.
2. *Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 112 с.
3. *Руденко О. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 68 с.
4. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. Т. I. М.: Наука, 1980. 459 с.
5. *Кобелев Ю. А., Островский Л. А.* Модели газожидкостной смеси как нелинейной диспергирующей среды // Нелинейная акустика. Теоретические и экспериментальные исследования. Горький: ИПФ АН СССР, 1980. С. 159.
6. *Алешин А. С., Гущин В. В., Креков М. М., Николаев А. В., Соколов А. В., Шалашов Г. М.* Экспериментальные исследования нелинейных взаимодействий сейсмических поверхностных волн // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260. № 3. С. 574–575.
7. *Blackstock D. T.* Connection between the Fay and Fubiny solution for Plane Waves of Finite Amplitude // J. Acoust. Soc. Amer. 1966. V. 39. № 6. P. 1019–1026.
8. Таблицы неполных цилиндрических функций. М.: ВЦ АН СССР, 1966.
9. *Наугольных К. А., Солуян С. И., Хохлов Р. В.* Цилиндрические волны конечной амплитуды в диссипативной среде // Вестн. МГУ. Сер. III. 1962. С. 65–71.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию 8.VI.1987