АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXIV 1988 Вып. 4

УДК 534

СТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЫ С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ВТОРОЙ ВЯЗКОСТЬЮ

Молевич Н. Е., Ораевский А. Н.

Рассматривается механизм установления стационарных колебаний термодинамически неравновесной среды, связанный с нелинейным взаимодействием устойчивых и неустойчивых мод.

Согласно результатам [1, 2], в термодинамически неравновесном газе вторая (объемная) вязкость μ может стать отрицательной. Отрицательная вторая вязкость приводит к акустической неустойчивости. В настоящей работе, для частного случая подобных сред (неравновесного колебательно-возбужденного газа), рассмотрен вопрос об установлении стационарного спектра стоячих волн и проведено обобщение на произвольную среду с отрицательной второй вязкостью.

Спецификой сред с отрицательной второй вязкостью является разная частотная зависимость коэффициента усиления для звука высокой и низкой частот [2]:

$$\alpha_\infty = \frac{\mu C_v^{02}}{\tau_0^2 C_{v\infty}^2 u_\infty^3}; \quad \omega\tau_0 \gg \frac{C_p^0}{C_{p\infty}}, \frac{C_v^0}{C_{v\infty}}; \tag{1}$$

$$\alpha_0 = \frac{\mu\omega^2}{u_0^3}; \quad \omega\tau_0 \ll \frac{C_p^0}{C_{p\infty}}, \frac{C_v^0}{C_{v\infty}}, \tag{2}$$

где

$$\mu = \frac{\tau_0 (u_\infty^2 - u_0^2) C_{v\infty}}{2C_v^0} \tag{3}$$

— низкочастотный коэффициент второй вязкости [1]: ω — частота звука; $C_{p\infty}$, $C_{v\infty}$ — теплоемкости равновесных степеней свободы при постоянном давлении и объеме; C_p^0, C_v^0 — низкочастотные теплоемкости при постоянном давлении и объеме; u_0, u_∞ — скорости низкочастотного и высокочастотного звуков; τ_0 — характерное время неравновесного процесса. Для неравновесного колебательно-возбужденного газа τ_0 — время колебательной релаксации;

$$u_0^2 = C_p^0 T_0 / C_v^0 m; \quad u_\infty^2 = C_{p\infty} T_0 / C_{v\infty} m;$$
$$C_v^0 = C_{v\infty} + C_k + x\hat{\tau}_0; \quad C_p^0 = 1 + x + C_v^0;$$

$\hat{\tau}_0 = \partial \ln \tau_0 / \partial \ln T_0$; C_k — колебательная теплоемкость; $x = (\mathscr{E}_k^0 - \mathscr{E}_p^0)/T_0$; $\mathscr{E}_k^0$, $\mathscr{E}_p^0$ — стационарная неравновесная колебательная энергия и ее равновесное значение в расчете на одну молекулу; T_0 — стационарная поступательная температура; m — молекулярная масса.

Коэффициент второй вязкости будет отрицательным, если [1]

$$x > \frac{C_k}{C_{v\infty} - \hat{\tau}_0}, \quad \hat{\tau}_0 < C_{v\infty}. \tag{4}$$

В отличие от коэффициента усиления, коэффициент поглощения для всех частот, удовлетворяющих гидродинамическому приближению, имеет вид

$$\delta = \frac{\omega^2}{2u_s^3}\left[\frac{4}{3}\frac{\xi}{\rho_0} + \left(\frac{1}{C_v} - \frac{1}{C_p}\right)\frac{\varkappa}{\rho_0}\right] = \frac{\omega^2}{u_s^3}\mu_1,$$

где величины u_s, C_p, C_v для низких и высоких частот равны соответственно

u_0, C_p^0, C_v^0 или u_∞, $C_{p\infty}$, $C_{v\infty}$; ξ, $\varkappa$ — коэффициенты сдвиговой вязкости и теплопроводности, ρ_0 — плотность газа.

Такая разная частотная зависимость коэффициентов усиления и поглощения приводит к разделению спектра на устойчивую и неустойчивую области с граничной частотой

$$\omega^* = \sqrt{\frac{|\mu|}{|\mu_1|}}\frac{C_v^0}{C_{v\infty}\tau_0}.$$

Поэтому в линейном приближении звук с частотой $\omega<\omega^*$ будет усиливаться, а с $\omega>\omega^*$ — поглощаться.

Для волн конечной амплитуды становится необходим учет нелинейной перекачки энергии от неустойчивых мод к устойчивым, что приводит к ограничению усиления и, как будет показано ниже, может привести к установлению стационарного спектра.

Получим уравнение, описывающее взаимодействие акустических мод в ограниченной среде с неравновесными колебательно-возбужденными молекулами. Исходная система уравнений релаксационной газодинамики в одномерном случае имеет вид

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\frac{\partial v}{\partial x}=0;\quad \frac{dv}{dt}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{4\xi}{3\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

$$C_{v\infty}\frac{dT}{dt}+\frac{d\mathscr{E}_k}{dt}-\frac{T}{\rho}\frac{d\rho}{dt}=Q+I; \tag{5}$$

$$P=\frac{\rho T}{m};\quad \frac{d\mathscr{E}_k}{dt}=\frac{\mathscr{E}_p-\mathscr{E}_k}{\tau(T,\rho)}+Q;\quad \tau(T_0,\rho_0)=\tau_0,$$

где ρ_0 — стационарная плотность газа; Q, I — мощность источника накачки и теплоотвода в расчете на одну молекулу; P — давление; v — газодинамическая скорость. Если неравновесная среда стационарна, то $Q_0=I_0$, где нижний индекс 0 соответствует невозмущенным значениям величин. Роль теплоотвода может играть, например, теплопроводность или поперечная прокачка газа.

Поскольку максимальное усиление (при $\mu_1\ll\mu$) соответствует частоте звука [2]

$$\omega_M=\frac{1}{\tau_0}\left[\frac{C_p^0C_v^0}{C_{p\infty}C_{v\infty}}\left(\sqrt{\frac{|\mu|}{\mu_1}}-1\right)\right]^{1/2},$$

т. е. лежит в области $\omega\tau_0\gg1$, будем рассматривать высокочастотный предел. Для звука высокой частоты при $\frac{\tau_0}{P'}\frac{\partial P'}{\partial t}\sim\frac{1}{\theta}$, $\frac{P'}{P_0}\sim\theta$ ($\theta\ll1$ — параметр малости, P_0 — стационарное давление; P' — возмущение давления в звуковой волне) систему (1) с точностью до θ^2 можно свести к следующему обезразмеренному виду:

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}(u^2-\eta^2)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(u^2+\gamma\eta^2)+\Gamma\left(1+\frac{\Omega}{\Gamma}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial\eta}{\partial y};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial z}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}(\eta^2-u^2)+\frac{4}{3}\frac{\xi}{\rho_0}Lu_\infty\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{6}$$

где $\eta=P/\rho_0u_\infty^2$; $u=v/u_\infty$; $z=x/L$; $y=u_\infty t/L$; L — длина резонатора; $\gamma=C_{p\infty}/C_{v\infty}$; $\Gamma=-2\alpha_\infty L$; $\Omega=\mu_1/u_\infty L$.

Система (6) идентична системе уравнений (1), (4), полученной в [3] применительно к высокотемпературному тепловыделяющему газу с диссипацией лучистой теплопроводностью, поэтому можем прямо воспользоваться результатами этой работы. В [3] решение (6) представляется в виде суммы стоячих волн с медленно меняющимися амплитудами P_n. В случае акустически закрытых торцов безразмерная собственная частота

n-й моды колебаний $\omega_n = n\pi$, а действительные амплитуды колебаний определяются уравнениями

$$\frac{dp_n}{dy} = \alpha_n p_n + n\beta\left[\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} p_l p_{n-l} - \sum_{l=1}^{N} p_l p_{n+l}\right], \quad n=1, N,$$

где $\alpha_n = \frac{1}{2}\Gamma(1-n^2\pi^2/k^{*2})$; $\beta = (\gamma+1)\pi/8$;

N — число мод в резонаторе: $k^* = \omega^* L/u_\infty$.

Для получения стационарного спектра необходимо, чтобы среди взаимодействующих мод была хотя бы одна мода, неустойчивая по линейному приближению, и хотя бы одна мода, затухающая в линейном приближении. Приведем значение установившихся амплитуд колебаний при взаимодействии двух мод ($\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 < 0$):

$$p_1 = \sqrt{\alpha_1|\alpha_2|}/\beta, \quad p_2 = \alpha_1/\beta$$

и при взаимодействии трех мод ($\alpha_1 > 0$; α_2, $\alpha_3 < 0$):

$$p_2 = \frac{|\alpha_3|}{6\beta}\left(\sqrt{1+12\frac{\alpha_1}{|\alpha_3|}} - 1\right);$$

$$p_1^2 = \frac{|\alpha_2| p_2}{\beta(1-6\beta p_2/|\alpha_3|)};$$

$$p_3 = 3\beta p_1 p_2/|\alpha_3|.$$

Область устойчивости установившихся амплитуд имеет вид $^1/_2 < \psi < 1$ и $^5/_{13} < \psi < 1$, где $\psi = \pi^2/k^{*2}$ в двух- и трехволновом приближениях соответственно. Если торцы обладают конечной проводимостью, то, согласно [3], установившаяся амплитуда будет больше, чем при акустически закрытых концах. Это связано с тем, что в случае акустически закрытых границ имеется наибольшее взаимодействие мод между собой.

Оценим значения установившихся амплитуд для неравновесного колебательно-возбужденного газа. В смеси $CO_2 : N_2 : He = 1:2:3$ ($P_0 = 1$ атм, $T_0 = 300$ К) при $Q \sim 5$ Вт/см^3 коэффициент усиления $\alpha_\infty \sim 5\cdot 10^{-4}$ см$^{-1}$, $\omega^* \sim 3{,}4\cdot 10^4$ Гц. Область устойчивости в двух- и трехволновом приближении $0{,}4 < L < 0{,}57$ см и $0{,}4 < L < 0{,}64$ см. Для $L = 0{,}5$ см амплитуда гармоник $p_1 = 1{,}87\cdot 10^{-4}$, $p_2 = 0{,}9\cdot 10^{-4}$ или $p_1 = 2{,}13\cdot 10^{-4}$, $p_2 = 0{,}7\cdot 10^{-4}$, $p_3 = 0{,}4\cdot 10^{-4}$ соответственно в двух- и трехволновом приближениях.

Увеличение мощности источника накачки Q приводит к увеличению коэффициента усиления и к уменьшению длины канала L, при которой возможно существование двух или трех стационарных волн. С увеличением величины $\alpha_\infty L$ для получения стационарного спектра необходимо учитывать взаимодействие большего числа высокочастотных мод, а при $L > u_\infty \pi \tau_0$ еще и наличие низкочастотной ветви спектра колебаний $\omega < 1/\tau_0$. Спектр высокочастотных мод будет определяться из решения системы алгебраических уравнений

$$\mu = \frac{(u_\infty^2 - u_0^2)\tau_0 C_{v\infty}}{2C_v^0} = \frac{u_\infty^2 C_{v\infty} T_0 (1-C_{v\infty})}{2\varepsilon C_{p\infty} m^2},$$

$\alpha_\infty = \mu C_v^{02}/C_{v\infty}^2 \tau_0^2 u_\infty^3 = -\Gamma/2L$, где ε, Γ — обозначения, взятые из [3]. Отметим, что если источник первоначально расходует свою энергию на возбуждение внутренних степеней свободы, как в настоящей работе, то, согласно [2], учет зависимости его мощности от T или ρ может быть важен только в низкочастотном пределе.

В качестве дополнительного к рассмотренному механизму установления стационарных стоячих волн интересно рассмотреть установление стационарных волн в ограниченном объеме за счет механизма насыщения отрицательной второй вязкости. Этот механизм исследован в [4] для слу-

чая бегущих волн сжатия. Подобное рассмотрение требует учета в (5) членов с точностью до θ^4, что представляет собой самостоятельную задачу.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коган Е. Я., Молевич Н. Е.* Коллапс акустических волн в неравновесном молекулярном газе // ЖТФ, 1986. Т. 56. № 5. С. 941–943.
2. *Молевич Н. Е., Ораевский А. Н.* ВРМБ в среде с отрицательной второй вязкостью // Квантовая электроника. 1987. Т. 14. № 8. С. 1678–1684.
3. *Артамонов К. И., Воробьев А. П.* Нелинейная стабилизация неустойчивых акустических колебаний в ограниченной тепловыделяющей среде // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 6. С. 34–41.
4. *Коган Е. Я., Молевич Н. Е., Ораевский А. Н.* Структура нелинейных акустических волн в неравновесном колебательно-возбужденном газе // Письма в ЖТФ. 1987. Т. 13. № 14. С. 836–839.

Физический институт
им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
8.XII.1987