АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXIV 1988 Вып. 5

УДК 534.26

ВЛИЯНИЕ ИЗГИБНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ НАКЛАДКИ НА ЗВУКОВОЕ ПОЛЕ СТЕРЖНЕВОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ

Вовк И. В., Гринченко В. Т.

Методом частичных областей с привлечением дифференциального уравнения колебаний тонкой пластины решена задача об излучении звука стержневым преобразователем, накладка которого может совершать колебания изгиба. Приведены количественные данные, характеризующие изменения ближнего и дальнего звуковых полей преобразователя в зависимости от геометрических и физических параметров накладки.

Известно что изгибные деформации накладки стержневого преобразователя могут оказывать значительное влияние на его параметры. Еще в работе [1] было показано, что наличие изгибных колебаний накладки приводит к заметному изменению резонансной частоты стержневого преобразователя. В дальнейшем ряд авторов (см., например, [2]) подтвердили этот факт экспериментально. Определенный шаг в раскрытии механизма влияния изгиба накладки на характеристики стержневого преобразователя сделан в работе [3], где предложена эквивалентная схема такого преобразователя. Вместе с тем полученные в цитируемых выше работах отдельные результаты не позволяют полностью вскрыть механизм влияния изгиба накладки на механические и акустические параметры преобразователя и дать этому явлению строгую качественную и количественную оценку.

Ниже выполнено сторогое решение задачи об излучении стержневого преобразователя с учетом изгибных колебаний накладки и на этой основе проведен всесторонний анализ влияния изгиба накладки на его параметры.

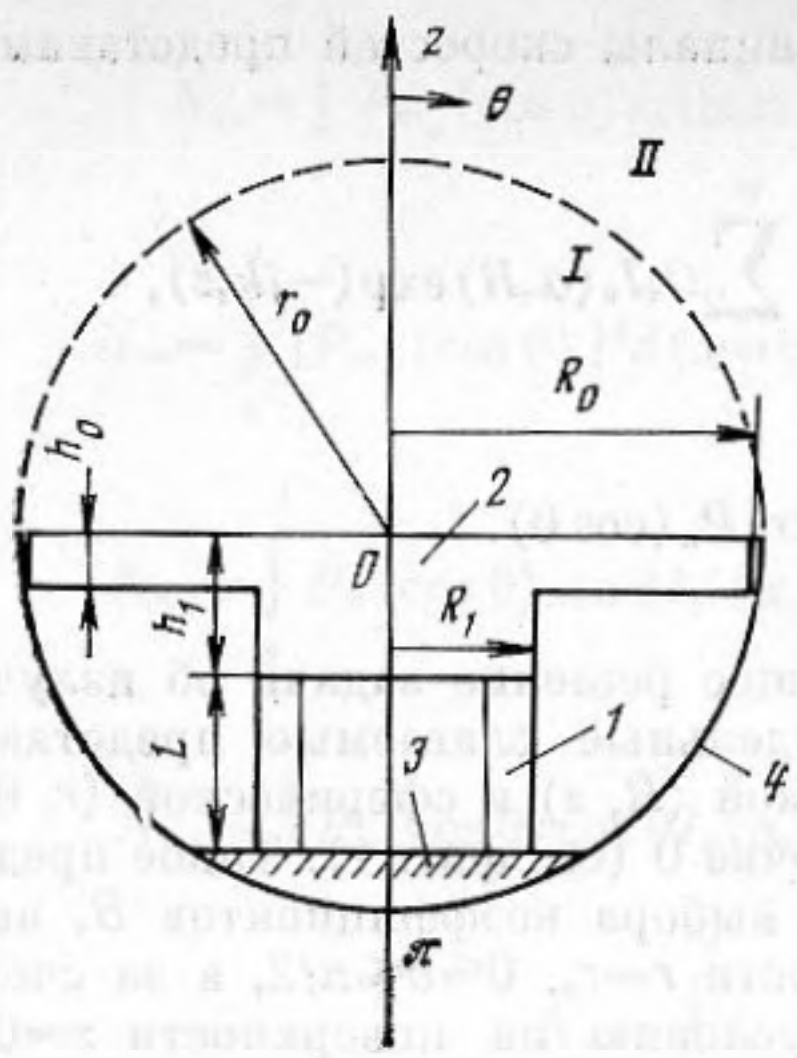
Рассмотрим односторонний стержневой преобразователь [1] (см. фиг. 1). Один конец пьезокерамического стержня нагружен круглой накладкой, а другой конец закреплен на жестком основании и не может совершать перемещения вдоль оси Oz. Преобразователь размещен в полусферическом акустически жестком корпусе и погружен в идеальную сжимаемую жидкость с волновым сопротивлением ρc. Будем полагать, что вся накладка может совершать колебания вдоль оси Oz как одно целое, а периферийная (тонкая) часть накладки $R_1 \leqslant R \leqslant R_0$ может совершать еще и колебания изгиба.

При описании движения периферийной части накладки используем классическую модель тонких пластин. На границе $R=R_1$ для упругой кольцевой пластины принимаем условие жесткой заделки, а внешний ее край $R=R_0$ считаем свободным. Выбирая зависимость от времени в форме $\exp(j\omega t)$, приступим к формированию соотношений, составляющих математическую модель задачи.

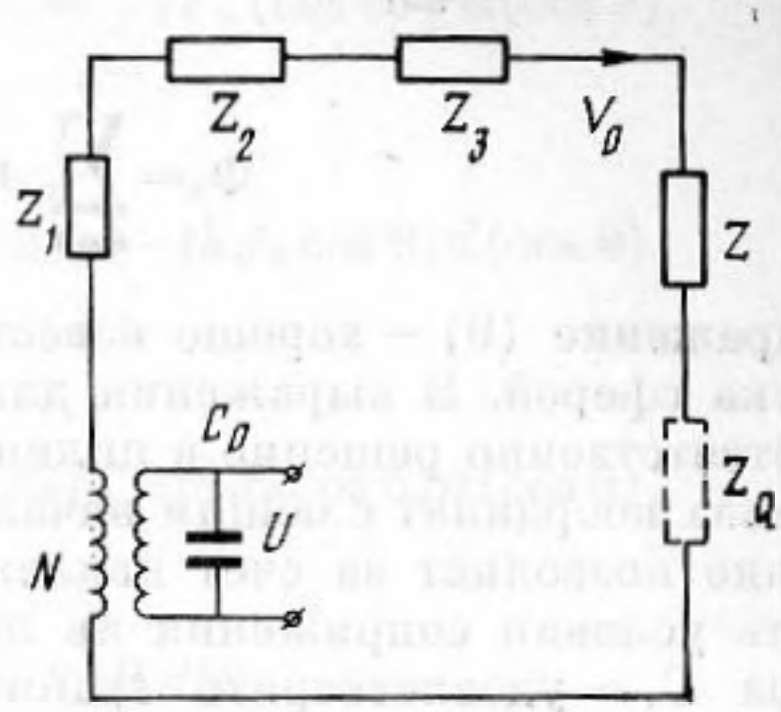
С учетом принятых допущений колебательную скорость на излучающей поверхности $z=0$, $0 \leqslant R \leqslant R_0$ представим в виде

$$V=\begin{cases} V_0, & 0 \leqslant R \leqslant R_1, \\ V_0+V(R), & R_1 \leqslant R \leqslant R_0, \end{cases} \quad z=0, \tag{1}$$

где V_0 и $V(R)$ — поршневая и изгибная части колебательной скорости накладки. Очевидно, что функция $V(R)$ должна являться решением диффе-



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Стержневой преобразователь: *1* – пьезокерамический стержень, *2* – накладка, *3* – жесткое основание, *4* – корпус

Фиг. 2. Эквивалентная схема стержневого преобразователя: $Z_1=-j\rho_2c_2S_2/\sin kL$, $Z_2=j\rho_2c_2\mathrm{tg}(kL/2)$, $Z_3=j\omega m$, N – коэффициент трансформации, C_0 – электрическая емкость зажатого пьезостержня, U – электрическое напряжение, Z – импеданс излучения, Z_Q – импеданс изгиба накладки, m – масса накладки, ρ_2c_2 – волновое сопротивление пьезоматериала, S_2 – поперечное сечение пьезостержня

ренциального уравнения изгибных колебаний тонких пластин [4] при следующих граничных условиях:

$$V(R)=0, \quad R=R_1, \tag{2}$$

$$dV(R)/dR=0, \quad R=R_1, \tag{3}$$

$$-D\left[\nabla^2V(R)-(1-\sigma)\frac{1}{R}\frac{\partial V(R)}{\partial R}\right]=0, \quad R=R_0, \tag{4}$$

$$-D\frac{\partial}{\partial R}\nabla^2V(R)=0, \quad R=R_0. \tag{5}$$

Здесь $D=Eh_0^3/12(1-\sigma^2)$, $\nabla^2=\partial^2/\partial R^2+(1/R)\partial/\partial R$, E, σ – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала пластины.

Известно, что при любых условиях колебательная скорость пластины на интервале $R_1\leqslant R\leqslant R_0$ может быть представлена рядом по полной системе функций – собственных форм колебаний

$$V(R)=\sum_{l=1}^{\infty}V_lf(\lambda_lR). \tag{6}$$

Для граничных условий (2)–(5) выражение для собственных форм имеет вид

$$f(\lambda_lR)=g_{1l}J_0(\lambda_lR)+g_{2l}N_0(\lambda_lR)+g_{3l}I_0(\lambda_lR)+g_{4l}K_0(\lambda_lR), \tag{7}$$

где константы $g_{1l}-g_{4l}$ и собственные числа λ_l определяются хорошо известным способом [4].

Теперь остановимся на форме записи внешнего звукового поля преобразователя. Необходимо сказать, что геометрия области, в которой существует поле, такова, что единого аналитического представления для потенциала скорости Ф получить не удается. В связи с этим всю область разобьем на две подобласти:

I – $0\leqslant r\leqslant r_0$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$; II – $r\geqslant r_0$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

В каждой из этих подобластей потенциалы скоростей представим следующими рядами:

$$\Phi_1+\sum_{\nu=1}^{\infty}B_\nu i_{m_\nu}(kr)P_{m_\nu}(\cos\theta)+\sum_{\tau=1}^{\infty}C_\tau J_0(\alpha_\tau R)\exp(-jk_\tau z), \tag{8}$$

$$\Phi_2=\sum_{n=0}^{\infty}A_n h_n^{(2)}(kr)P_n(\cos\theta). \tag{9}$$

Выражение (9) — хорошо известное общее решение задачи об излучении звука сферой. В выражении для Φ_1 отдельные слагаемые представляют соответственно решение в цилиндрической (R, z) и сферической (r, θ) системах координат с общим началом в точке 0 (см. фиг. 1). Такое представление позволяет за счет надлежащего выбора коэффициентов B_ν выполнить условия сопряжения на поверхности $r=r_0$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$, а за счет выбора C_τ — удовлетворять граничному условию на поверхности $z=0$, $0\leqslant R\leqslant R_0$.

Неизвестные комплексные коэффициенты A_n, B_ν, C_τ и V_l определяются из следующей очевидной системы функциональных уравнений:

$$\Phi_1=\Phi_2,\quad r=r_0,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi/2, \tag{10}$$

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}=\begin{cases}\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial r}, & 0\leqslant\theta\leqslant\pi/2,\\ 0, & \pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi,\end{cases}\quad r=r_0, \tag{11}$$

$$-\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}=V,\quad z=0,\quad 0\leqslant R\leqslant R_0, \tag{12}$$

$$\nabla^2\nabla^2 V-\lambda_l^4 V=\frac{\omega^2\rho_1}{D}\Phi_1,\quad z=0,\quad R_1\leqslant R\leqslant R_0, \tag{13}$$

где ρ_1, ω — плотность материала накладки и круговая частота, которая известным способом (подробно см. [5]) преобразуется в следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{gathered}B_\nu i_{m_\nu}(kr_0)N_{\nu\nu}-\sum_{n}^{\infty}A_n h_n^{(2)}(kr_0)N_{\nu n}+\sum_{\tau}^{\infty}C_\tau N_{\nu\tau}=0,\\ A_n k h_n'^{(2)}(kr_0)N_{nn}-k\sum_{\nu}^{\infty}B_\nu i_{m_\nu}'(kr_0)N_{\nu n}-\sum_{\tau}^{\infty}C_\tau(\alpha_\tau N_{n\tau}+jk_\tau\overline{N}_{n\tau})=0,\end{gathered} \tag{14}$$

$$jC_\tau k_\tau N_{\tau\tau}+\sum_{l}^{\infty}V_l N_{l\tau}=-V_0 N_\tau,$$

$$\frac{\rho}{\rho_1 h_0}\left[\sum_{\nu}^{\infty}B_\nu P_{m_\nu}\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)N_{\nu l}+\sum_{\tau}^{\infty}C_\tau N_{l\tau}\right]-V_l\left[1-\left(\frac{\omega_l}{\omega}\right)^2\right]N_{ll}=V_0 N_{l\tau}$$

$$N_{\tau\tau}=\int_0^{R_0}J_0^2(\alpha_\tau R)R\,dR,\qquad N_{l\tau}=\int_{R_1}^{R_0}J_0(\alpha_\tau R)f(\lambda_l R)R\,dR,$$

$$N_\tau=\int_0^{R_0}J_0(\alpha_\tau R)R\,dR,\qquad N_{\nu n}=\int_0^1 P_{m_\nu}(\cos\theta)P_n(\cos\theta)\,d(\cos\theta),$$

$$N_{\nu\tau}=\int_0^1 P_{m_\nu}(\cos\theta)J_0(\alpha_\tau r_0\sin\theta)\exp(-jk_\tau r_0\cos\theta)\,d(\cos\theta),$$

$$N_{\nu\nu}=\int_0^1 [P_{m_\nu}(\cos\theta)]^2 d(\cos\theta),\qquad N_{nn}=\int_{-1}^1 [P_n(\cos\theta)]^2 d(\cos\theta),$$

$$N_{n\tau}=\int_0^1 P_n(\cos\theta)\sin\theta J_0'(\alpha_\tau r_0\sin\theta)\exp(-jk_\tau r_0\cos\theta)\,d(\cos\theta),$$

$$\overline{N}_{n\tau}=\int_0^1 P_n(\cos\theta)\cos\theta J_0(\alpha_\tau r_0\sin\theta)\exp(-jk_\tau r_0\cos\theta)\,d(\cos\theta),$$

$$N_{\nu l}=\int_{R_1}^{R_0} i_{m_\nu}(kR)f(\lambda_l R)R\,dR,$$

$$N_{l\tau}=\int_{R_1}^{R_0} J_0(\alpha_\tau R)f(\lambda_l R)R\,dR,$$

$$N_{ll}=\int_{R_1}^{R_0} [f(\lambda_l R)]^2 R\,dR,$$

$$N_l=\int_{R_1}^{R_0} f(\lambda_l R)R\,dR,\qquad k_\tau=(k^2-\alpha_\tau^2)^{-1},$$

m_ν — корни уравнения $P'_{m_\nu}(\cos\theta)=0$, $\theta=\pi/2$, ω_l — собственные частоты изгибных колебаний накладки в вакууме, α_τ — корни уравнения $J_0'(\alpha_\tau R)=0$, $R=R_0$; штрих при функциях Бесселя и Ханкеля обозначает производную по полному аргументу.

При решении системы (14) использован метод редукции. Все приведенные ниже расчетные данные определялись для $n=0, 1\ldots 9$; $l=1$; $\nu=1, 2\ldots 5$; $\tau=1, 2\ldots 5$. Заметим, что сформулированные выше граничные условия и условия сопряжения (10)—(13) выполнялись с точностью не хуже 10% от максимального значения определяемой характеристики на соответствующей поверхности.

Для того чтобы вести дальнейший анализ, напомним классическую расчетную схему, с помощью которой определяются параметры стержневого преобразователя [1]. На основе совместного решения дифференциального уравнения, описывающего одномерные продольные колебания стержня, и уравнений пьезоэффекта строится эквивалентная электромеханическая схема стержневого преобразователя и определяются входящие в нее элементы (см. фиг. 2). Для окончательного определения скорости V_0, с которой колеблется накладка, необходимо знать импеданс излучения Z, который определяется на основе решения соответствующей задачи дифракции, временно полагая $V_0=\text{const}$. Поступим аналогичным путем — зададим для определенности $V_0=1$, решим систему (14) и по известной формуле определим импеданс излучения [6]:

$$Z=\frac{1}{|V_0|^2}\int_0^{R_0} p\overline{V}R\,dR, \tag{15}$$

где p — звуковое давление, $\overline{V}$ — комплексно-сопряженное значение величины V.

Однако прежде чем переходить к анализу результатов расчета величины Z, обсудим новый элемент эквивалентной схемы — импеданс Z_Q (см. фиг. 2), который отсутствует в известных ранее схемах, но должен неизбежно появиться при наличии изгиба накладки. Действительно, при отсутствии изгиба накладки (в пренебрежении сжимаемостью накладки по толщине) ее импеданс имеет чисто инерционный характер и определяется как отношение силы инерции F к поршневой скорости накладки:

$$Z_H = \frac{F}{V_0} = \frac{m}{V_0}\frac{dV_0}{dt} = j\omega m. \tag{16}$$

В нашем случае за счет наличия скорости $V(R)$ появляется дополнительная реакция, которая численно равна перерезывающей силе F_Q на контуре $R=R_1$. Используя известное выражение для F_Q [4], определяем импеданс

$$Z_Q = \frac{1}{V_0}F_Q(R=R_1) = -j\frac{V_l 2\pi R_1}{\omega V_0}D\lambda_l^3\frac{\partial f(\lambda_l R)}{\partial R}, \quad R=R_1, \quad l=1. \tag{17}$$

Представляет интерес изучить особенности величины Z_Q и прежде всего в отсутствие акустической нагрузки, т. е. когда $Z=0$. В этом случае система (14) предельно упрощается, поскольку необходимость в первых трех уравнениях отпадает. Отпадает необходимость также и в члене, который заключен в первые квадратные скобки в четвертом уравнении. При этом имеется возможность установить простую связь между V_0 и V_1:

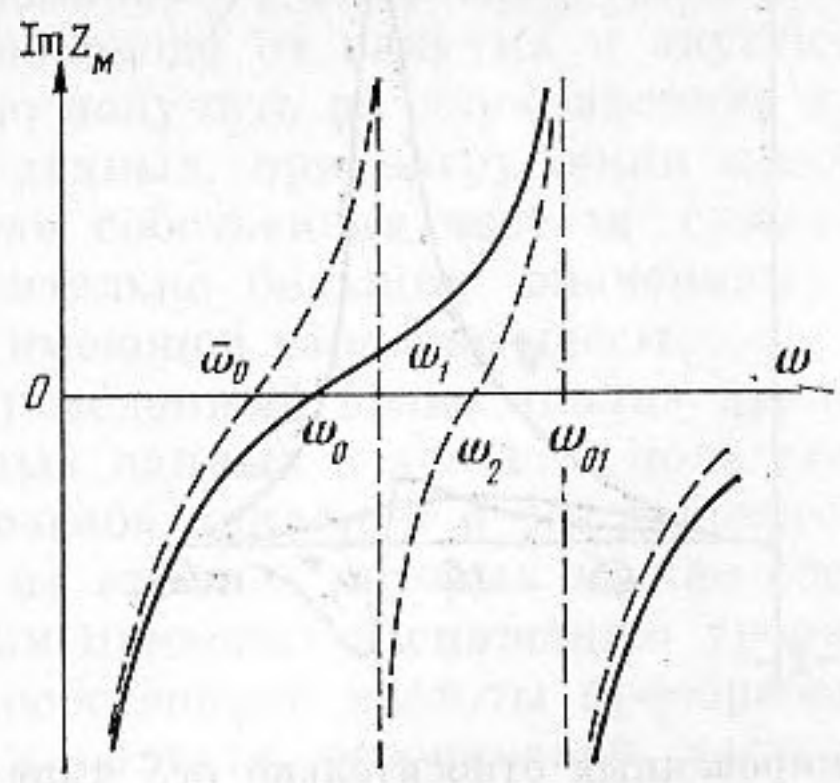
$$V_1 = -V_0 N_1\left\{\left[1-\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2\right]N_{11}\right\}^{-1}. \tag{18}$$

Как следует из последнего выражения, по мере приближения к частоте изгиба накладки ω_1 скорость V_1 резко возрастает. При $\omega\to\omega_1$ величина $V_1\to\infty$, что и следовало ожидать, поскольку диссипативные потери в материале накладки не учитывались. С учетом (18) формула (17) приобретает вид

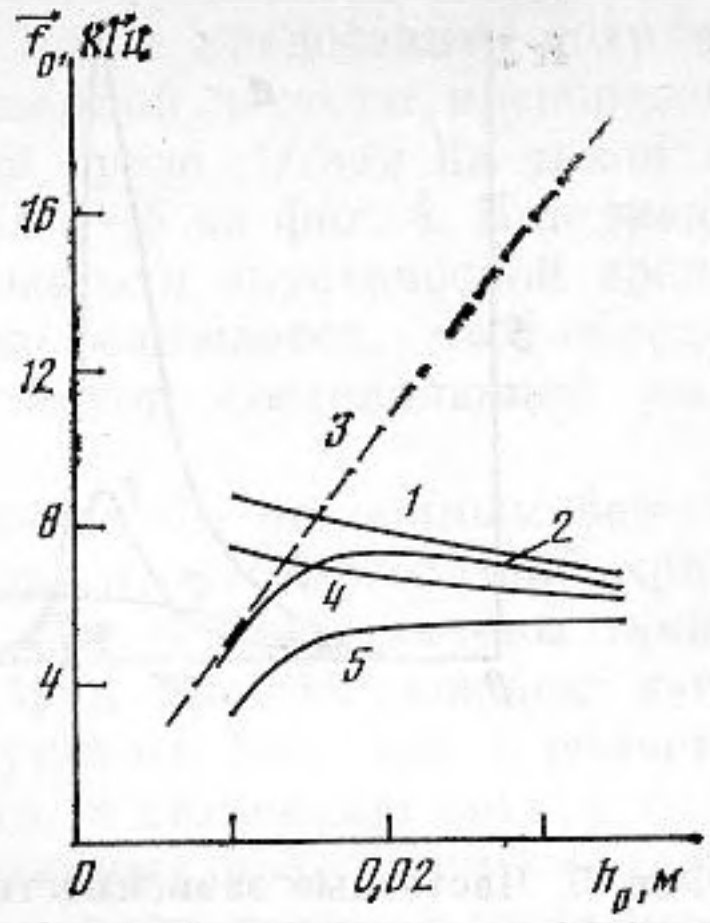
$$Z_Q = -j\frac{S_э}{\omega\left[1-\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2\right]}, \quad S_э = 2\pi R_1 D\lambda_1^3\frac{N_1}{N_{11}}\cdot\frac{\partial f(\lambda_1 R)}{\partial R}\bigg|_{R=R_1}. \tag{19}$$

Легко видеть, что при $\omega<\omega_1$ импеданс Z_Q имеет характер массы, а при $\omega>\omega_1$ — характер упругости. Если величину $S_э$ интерпретировать как эквивалентную упругость периферийной части накладки (эквивалентная масса при этом $m_э=S_э/\omega_1^2$), то выражение для Z_Q точно описывает импеданс параллельного контура, состоящего из массы $m_э$ и упругости $S_э$.

На основе проведенного анализа можно сделать ряд полезных и важных выводов. Во-первых, стержневой преобразователь с изгибно-колеблющейся накладкой представляет собой достаточно сложную систему связанных механических контуров. Следствием этого являются существенные изменения в спектре его собственных частот. В качестве примера рассмотрим как изменяются низшие собственные частоты. На фиг. 3 представлен типичный ход реактивной части полного механического импеданса преобразователя без учета и с учетом изгиба накладки. В случае отсутствия изгиба накладки спектр преобразователя характеризуется последовательным чередованием резонансов и антирезонансов его продольных колебаний. Низший резонанс имеет частоту ω_0, далее следует антирезонанс ω_{01} и т. д. При наличии изгиба накладки, когда справедливо неравенство $\omega_0<\omega_1<\omega_{01}$, частота низшего резонанса преобразователя уменьшается и принимает значение $\overline{\omega}_0$. Причиной этого, как нетрудно видеть из предыдущего анализа, является появление импеданса Z_Q, имеющего при $\omega<\omega_1$ характер массы. Далее на частоте $\omega=\omega_1$ следует антирезонанс преобразователя, который вызван по сути резонансом изгиба накладки. Наконец, резонанс ω_2 является следствием равенства упругого сопротивления, которое характерно для Z_Q при $\omega>\omega_1$, и инерционного



Фиг. 3



Фиг. 4

Фиг. 3. Частотная зависимость реактивной части полного механического импеданса стержневого преобразователя в вакууме: сплошная и штриховая линии — без учета и с учетом изгиба накладки соответственно

Фиг. 4. Зависимость низшей собственной частоты преобразователя от толщины периферийной части накладки: *1*; *4* — без изгиба накладки, *2*; *5* — с изгибом накладки, *1—3* — в вакууме, *4—5* — в среде, *3* — частота изгиба накладки, $\bar{f}_0=\bar{\omega}_0/\pi$

сопротивления, которым характеризуется механический импеданс продольно колеблющегося преобразователя в диапазоне $\omega_0<\omega<\omega_{01}$.

Таким образом, наличие изгиба накладки приводит к снижению низшей частоты резонанса преобразователя и появлению еще двух резонансных частот.

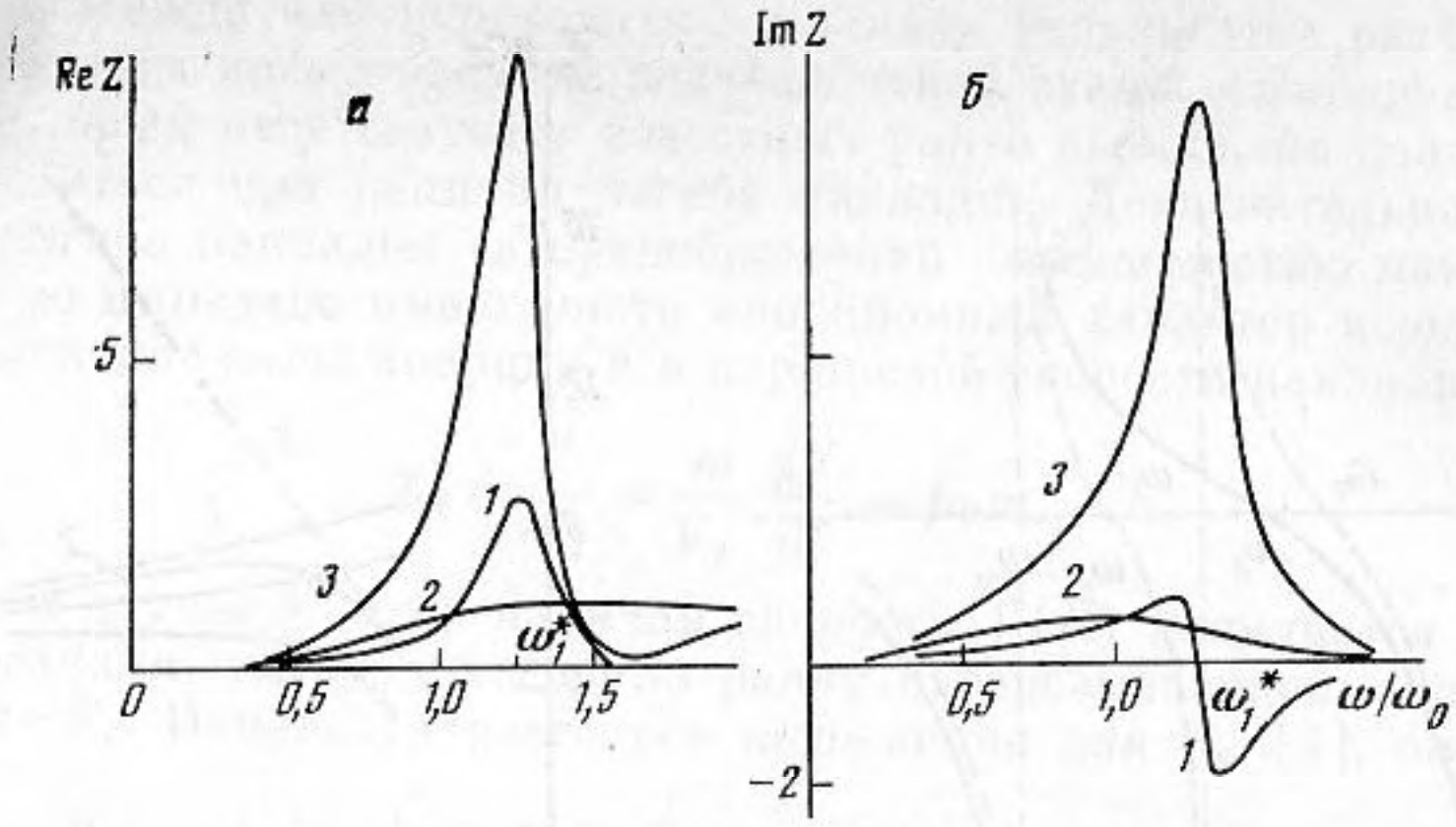
Для практики особый интерес представляет зависимость изменения низшей резонансной частоты преобразователя от геометрических параметров периферийной части накладки. На фиг. 4 приведены такие зависимости, рассчитанные для следующих параметров: $\rho_2 c_2 S_2=9{,}4\cdot10^4$ кг/с, $L=0{,}11$ м; $R_0=0{,}104$ м; $R_1=0{,}05$ м; $\rho_1 c_1=2{,}26\cdot10^7$ км/м²с, $h_1=0{,}06$ м, $\rho c=1{,}5\cdot10^6$ кг/м²с, $N=10$ Н/В.

Как видно, если не учитывать изгиб накладки, низшая частота резонанса преобразователя с уменьшением толщины накладки растет линейно, что представляется естественным, поскольку с уменьшением h_0 снижается масса накладки. Совершенно иная картина наблюдается при учете изгиба накладки. При относительно больших толщинах накладки частоты резонанса для обоих рассматриваемых случаев близки. Но по мере утоньшения накладки значение $\bar{\omega}_0$ сначала достигает некоторого максимума (при $h_0\approx0{,}0175$ м), а далее быстро падает, асимптотически приближаясь к кривой *3*. Эта характерная особенность поведения находится в хорошем согласии с экспериментальными данными, приведенными в [2].

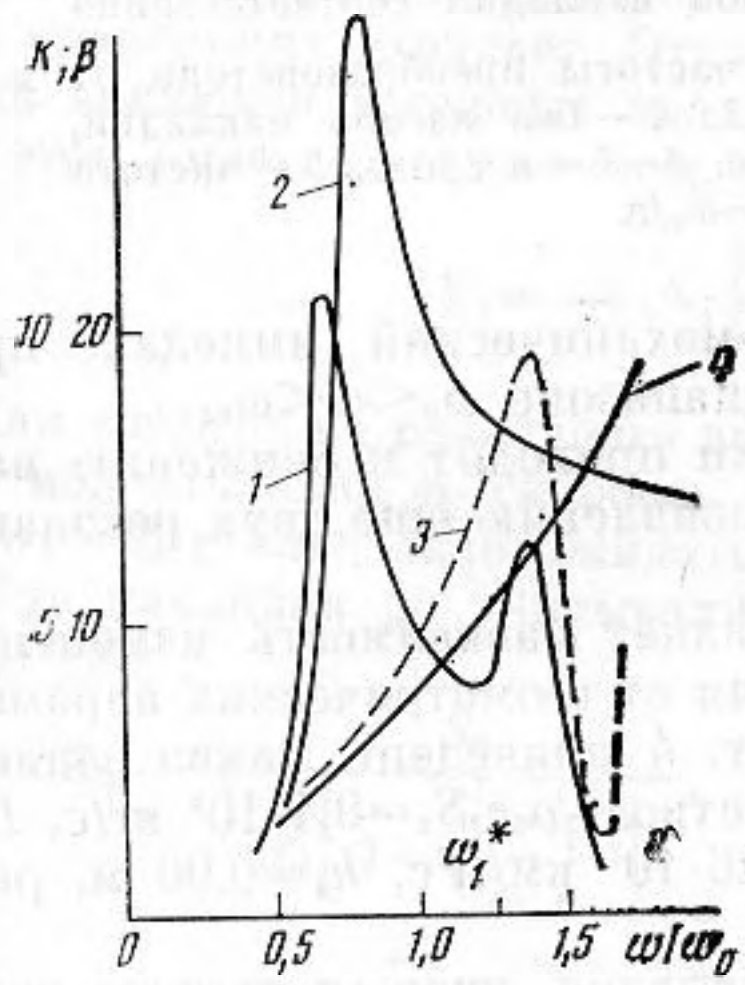
Теперь рассмотрим поведение импеданса Z_Q при работе преобразователя в среде. Вновь используя четвертое уравнение в системе (14) и выражение (17), после несложных преобразований получим

$$Z_{Q\,\rho c\neq0}=-j\frac{S_э}{\omega[1-(\omega_1/\omega)^2]}\left\{1-\frac{\rho}{\rho_1 h_0 N_1}\int\limits_{R_1}^{R_0}\Phi_1 f(\lambda_1 R)R\,dR\right\}. \qquad (20)$$

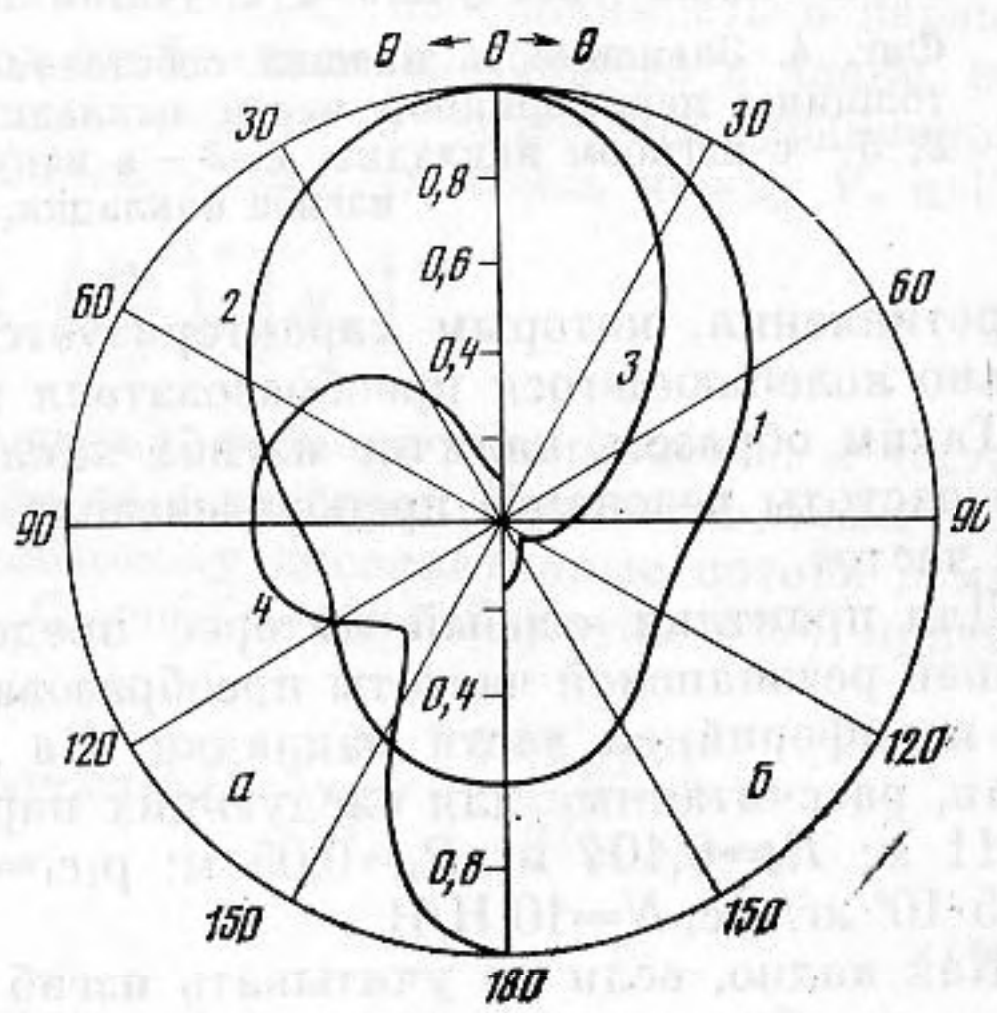
Совершенно очевидно, что второй член в фигурных скобках определяет вклад внешнего поля в значение импеданса Z_Q. В отличие от вакуума, где импеданс Z_Q имел чисто реактивный характер, при наличии окружающей среды он будет комплексным. В качестве иллюстрации на фиг. 5 (кривые *1*) приведены частотные зависимости величины Z_Q для указанных выше параметров преобразователя при $h_0=0{,}02$. Здесь хорошо видно, что на частоте резонанса изгибных колебаний накладки в среде ω_1^* актив-



Фиг. 5. Частотные зависимости нормированных относительно ρcS импедансов: *а* — активная составляющая, *б* — реактивная составляющая, *1* — импеданс Z_Q, *2*; *3* — импеданс излучения без изгиба и с изгибом накладки соответственно, S — площадь накладки, ω_0 — резонансная частота преобразователя в вакууме без учета изгиба накладки



Фиг. 6



Фиг. 7

Фиг. 6. Частотные зависимости чувствительности преобразователя (кривые *1*, *2*) и коэффициента концентрации (кривые *3*, *4*): *1*, *3* — с изгибом накладки, *2*, *4* — без изгиба накладки. Чувствительность β, Па (В·м)$^{-1}$

Фиг. 7. Диаграмма направленности: *а* — с учетом изгиба накладки, *б* — без учета изгиба, *1*; *2* — для $\omega/\omega_0=0{,}77$, *3*; *4* — для $\omega/\omega_0=1{,}45$

ная часть Z_Q имеет ярко выраженный максимум, а реактивная часть Z_Q равна нулю и меняет свой знак. На этой же фигуре представлены частотные зависимости импеданса излучения Z, рассчитанные при наличии изгиба накладки и без такового. Характер поведения импеданса излучения при отсутствии изгиба накладки (кривые *2*) хорошо известен [1] и на нем останавливаться не будем. Гораздо интересней поведение импеданса излучения при наличии изгиба накладки (кривая *3*).

Здесь главной особенностью является резкое возрастание активной и реактивной составляющих Z на частоте ω_1^*. Такое, на первый взгляд, неожиданное поведение Z имеет простое объяснение. Как указывалось выше, импеданс Z_Q может быть представлен параллельным контуром, который обусловливает резкое уменьшение скорости V_0 на частоте ω^*, и относительно большое увеличение скорости V_1, что препятствует снижению звукового давления на накладке преобразователя. В силу этого обстоятельства числитель выражения (15) изменяется слабо, а знаменатель резко уменьшается, что и приводит к увеличению значения Z на частоте ω_1^*.

Определенный практический интерес могут представить количественные данные об изменении низшей собственной частоты преобразователя при переходе от вакуума к акустической среде. Ответ на такой вопрос можно получить из сопоставления кривых *1—5* на фиг. 4. Как следует из этих данных, при нагружении преобразователя акустической средой его низшая собственная частота существенно снижается, что обусловлено относительно большим значением реактивной составляющей импеданса Z, имеющей характер массы.

Проведенный выше анализ представлялся бы не полным без сравнительных данных о дальнем поле стержневого преобразователя при наличии изгиба накладки и без такового. На фиг. 6 представлены такие данные, из анализа которых можно сделать ряд важных выводов: изгиб накладки приводит к снижению уровня звукового давления в области низшей собственной частоты преобразователя, к снижению звукового давления в области резонансной частоты изгибных колебаний накладки и к появлению второго максимума звукового давления на частотах выше ω_1^*.

Остановимся также на особенностях диаграммы направленности и коэффициента концентрации преобразователя (см. кривые *3* и *4* на фиг. 6 и кривые на фиг. 7). Как видно, на частотах $\omega<\omega_1^*$ наличие изгиба накладки мало влияет на диаграмму направленности и коэффициент концентрации преобразователя. Однако, начиная с частоты ω_1^* и выше, изменение этих характеристик существенное — максимум диаграммы направленности может изменяться на угол 180°, а величина коэффициента концентрации резко падать. Как показывает детальный анализ, причина этих явлений кроется в увеличении (с ростом частоты) разности фаз между скоростями V_0 и $V(R)$, которая в области $\omega\geqslant\omega_1^*$ может достигать 90° и более.

Подводя итог выполненному анализу, можно заключить, что изгиб накладки существенным образом влияет на все параметры стержневого преобразователя и отсутствие учета этого явления может привести к серьезным ошибкам в оценке энергетических и направленных свойств преобразователя.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гутин Л. Я.* Избранные труды. Л.: Судостроение, 1977. 599 с.
2. *Rijnja H. A.* The design of sensitive hydrophones // Acoustica. 1976. V. 33. № 1. P. 1–9.
3. *John L., Butler, Cipolla W. R., Brown W. D.* Radiating head flexure and it's effect on transducer performance // J. Acoust. Soc. Amer. 1981. V. 70. № 2. P. 500–503.
4. *Хронин Д. В.* Теория и расчет колебаний в двигателях летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1970. 410 с.
5. *Гринченко В. Т., Вовк И. В.* Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках. Киев: Наук. думка, 1986. 238 с.
6. *Смарышев М. Д.* Направленность гидроакустических антенн. Л.: Судостроение. 1973. 274 с.

Институт гидромеханики
Академии наук УССР

Поступила в редакцию
24.XI.1987