АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXV 1989 Вып. 1

УДК 534

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ С АКУСТИЧЕСКИМ ИМПУЛЬСОМ

Наугольных К. А., Рыбак С. А.

Рассматривается задача о рассеянии плоской звуковой волны на импульсе с высокочастотным заполнением, распространяющимся под произвольным углом к направлению распространения плоской волны. Показано, что наряду с комбинационными частотами возникает рассеянная волна на доплеровских частотах. Определена угловая зависимость амплитуды рассеянной волны.

При исследовании акустических взаимодействий обычно рассматриваются резонансные процессы в гармоническом поле, характерной чертой которых является возникновение комбинационных тонов, определяемых частотами исходных волн. Процесс приобретает новые черты при взаимодействии ограниченных во времени или пространстве возмущений. Так, при рассеянии гармонической волны на бегущем волновом пакете наряду с комбинационными частотами возникает излучение на доплеровских частотах [1]. Развивая представления этой работы, в настоящей статье рассмотрим задачу о рассеянии плоской гармонической волны на волновом пакете с гармоническим заполнением.

Пусть в направлении оси x распространяется ограниченный в пространстве волновой пакет с частотой заполнения ω_0:

$$p=p_0\exp(-i\omega_0t+ik_0x). \tag{1}$$

Под углом θ к оси x падает плоская волна

$$p_s=p_{s0}\exp(-i\omega_st+ik_{sx}x+ik_{sy}y), \quad k_{sx}=k_s\cos\theta, \tag{2}$$

которая рассеивается на волновом пакете. Определим частоту рассеянной волны. Для этого удобно перейти в систему координат, движущуюся с волновым пакетом вдоль оси x со скоростью c.

В этой системе координат волновое уравнение записывается в виде

$$\Delta p-\frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}\right]^2p=0, \tag{3}$$

Найдем частоту ω' падающей волны в движущейся системе. Принимая во внимание, что $\partial p/\partial t=i\omega'$, $\partial p/\partial x=ik_{sx}$, из формулы (3) получим $\omega_s^2=(\omega'+\omega_s\cos\theta)^2$, откуда

$$\omega'=\omega_s(1-\cos\theta). \tag{4}$$

При взаимодействии падающей волны с пакетом возникают комбинационные тона с частотами

$$\omega_k=\omega'\pm\omega_0\approx\omega', \tag{5}$$

так как $\omega_0'=0$, и волновыми числами

$$k_k=k_0\pm k_s\cos\theta. \tag{6}$$

Пусть под углом φ излучается волна с волновым числом k_φ, причем $k_{\varphi x}=k_\varphi\cos\varphi$. Частота ее независимо от направления излучения, определяемого углом φ, одинакова и равна ω' в движущейся системе координат.

Найдем частоту излучаемой волны в исходной системе. Вновь используя уравнение (3), получим соотношение $\omega_\varphi^2=(\omega'+\omega_\varphi\cos\varphi)^2$, откуда

$$\omega_д=\frac{\omega'}{1-\cos\varphi}=\omega_s\frac{1-\cos\theta}{1-\cos\varphi}. \qquad (7)$$

Если скорость распространения пакета u не равна $|c|$, то вместо (7) получим

$$\omega_д=\omega_s\frac{1-(u/c)\cos\theta}{1-(u/c)\cos\varphi}.$$

Определим теперь амплитуду рассеянной волны. Воспользуемся уравнением [2]

$$\Delta p_k-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_k}{\partial t^2}=-\frac{\varepsilon-2\sin^2(\theta/2)}{\rho c^4}\frac{\partial^2(p_ip_s)}{\partial t^2}, \qquad (8)$$

описывающим взаимодействие плоских волн.

Его решение можно записать в виде

$$p=\int dt'\,d\mathbf{r}'G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|,t-t')f(\mathbf{r}',t), \qquad (9)$$

где

$$G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|,t-t')=-\frac{\rho}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\delta[|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|-c(t-t')],$$

$$f(\mathbf{r},t)=\frac{\bar\varepsilon\omega^2}{\rho c^4}p_0p_s\exp(-i\omega t'+iqx'). \qquad (10)$$

Здесь $\omega=\omega_0+\omega_s$, $q=k_0+k_s\cos\theta$, $\bar\varepsilon=\varepsilon-2\sin^2(\theta/2)$. Формула (10) записана в приближении тонкого пучка накачки, когда можно пренебречь изменением волны сигнала на поперечном сечении пакета. Из условия обращения в нуль аргумента δ функции в подынтегральном выражении найдем

$$[(x-x')^2+y^2+z^2]^{1/2}=c(t-t'),$$

откуда

$$t'=t-\frac{R-x'\cos\theta}{c}, \qquad (11)$$

где R — расстояние до точки наблюдения от центра пакета. Используя соотношения (10) и (11), преобразуем интеграл (9) к виду

$$p=-\frac{\exp[-i\omega(t-R/c)]}{4\pi R}\frac{\bar\varepsilon\omega^2a^2}{\rho c^4}\int\limits_{x_1'}^{x_2'}\exp\left(-i\frac{\omega}{c}(\cos\varphi)x'+iqx'\right)dx'. \qquad (12)$$

Здесь a — радиус пучка волнового пакета $x_1'=x_1+ct_1$, $x_2'=x_2+ct_2$, x_1, x_2 — координаты пакета при $t=0$. Если аргумент экспоненциальной функции подынтегрального выражения

$$\varkappa=-(\omega/c)\cos\varphi+q \qquad (13)$$

обращается в нуль, что соответствует случаю резонансного рассеяния, то из (12) получаем

$$p=\frac{\bar\varepsilon\omega^2p_sp_0a^2x}{4\pi\rho c^4R}\exp\left[-i\omega\left(t-\frac{R}{c}\right)\right], \qquad (14)$$

x — длина области взаимодействия. Как видно, в этом случае частота рассеянной волны $\omega=\omega_0+\omega_s$. Такой режим осуществляется при коллинеарном распространении волн сигнала и пакета ($\theta=0$, $\varphi=0$), а также при рассеянии под углом φ, определяемым из соотношения

$$\cos\varphi=\frac{k_0+k_s\cos\theta}{k_0+k_s}. \qquad (15)$$

вытекающего из условия $\varkappa=0$. Заметим, что в случае, когда частота ω_0 велика ($\omega_0 \gg \omega_s$), угол φ, определяемый соотношением (15), мало отличается от нуля.

В произвольном случае для вычисления интеграла необходимо определить пределы интегрирования. Величины t_1 и t_2 определяются из условия

$$|\mathbf{R}-(x_1+ct_1)\mathbf{l}|=c(t-t_1),$$

соответствующего формуле (11), $\mathbf{l}$ – единичный вектор. Имеем

$$t_{1,2}=\frac{t-R/c+(x_{1,2}/c)\cos\varphi}{1-\cos\varphi}. \tag{16}$$

Выполняя интегрирование, получим

$$p=\frac{\bar{\varepsilon}\omega^2 p_s p_0 a^2}{4\pi\rho c^4}\exp\left[-i\omega_{\text{д}}\left(t-\frac{R}{c}\right)\right]\frac{\exp(-i\varkappa l)-1}{-i\varkappa}. \tag{17}$$

Если длина волнового пакета мала по сравнению с длиной волны сигнала, отсюда находим

$$p=\frac{\bar{\varepsilon}\omega^2 p_s p_0 a^2 \exp[-i\omega_{\text{д}}(t-R/c)]}{4\pi\rho c^4}, \tag{18}$$

$l=x_2-x_1$ – длина волнового пакета, т. е. амплитуда рассеянной волны определяется взаимодействием первичных волн на длине пакета, а частота зависит от взаимной ориентации направлений распространения волнового пакета и рассеиваемой волны. Это обстоятельство открывает возможность определения направления прихода первичной волны по величине сдвига частоты рассеянного излучения.

Подчеркнем, что приведенные результаты относятся к случаю рассеяния низкочастотной волны на одиночном волновом пакете, распространяющемся в безграничном пространстве. Приведенные выше соотношения позволяют рассмотреть и другие ситуации. Если, в частности, в безграничной среде на расстоянии l друг от друга расположены излучатель и приемник высокочастотной волны накачки, так что рассеяние низкочастотной волны происходит не на бегущем волновом пакете, а на локализованном в пространстве участке, по которому непрерывно пробегает высокочастотная волна, то выражение для рассеянного поля легко получить из формулы (12), считая пределы интегрирования постоянными. Частота рассеянной волны равна частоте комбинационного тона $\omega=\omega_0+\omega_s$, а для амплитуды получается простое выражение

$$p=A_0 l\exp[-i\omega(t-R/c)], \tag{19}$$

где $A_0=\bar{\varepsilon}p_{\text{н}}p_s\omega^2a^2/4\pi\rho c^4R$, $l=x_2-x_1$ – длина зоны взаимодействия, пригодное при $\varphi=0$, $\theta=0$ при произвольных l и при $\varkappa l \ll 1$ в случае $\varphi\neq 0$, $\varphi\neq 0$. Наконец, если имеется излучатель в точке $x=x_1$, который включается в момент $t=0$, то происходит рассеяние на импульсе, передняя граница которого движется, а задняя, «привязанная» к излучателю, неподвижна [1]. В выражении для рассеянной волны в этом случае получаются два члена, соответствующих рассеянию на доплеровской частоте и на частоте комбинационного тона:

$$p_{\text{д}}=\frac{A_0}{-i\varkappa}e^{-i\omega_{\text{д}}(t-R/c)}\exp-\left(\frac{i\omega x_1\cos\varphi}{1-\cos\varphi}\right),\quad p_k=\frac{A_0}{-i\varkappa}e^{-i\varkappa x_1}-e^{-i\omega(t-R/c)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Trivett D. H., Rogers P. H.* Pulsed parametric array // J. Acoust. Soc. Amer. 1984. V. 76. № 6. P. 1819—1822.
2. *Зверев В. А., Калачев А. И.* Модуляция звука звуком при пересечении акустических волн // Акуст. журн. 1970. Т. 16. № 2. С. 245—252.

Акустический институт им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
26.V.1988

[1] На такую постановку задачи авторам указал Л. В. Седов.