АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXV 1989 Вып. 1

УДК 534

ДИФРАКЦИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН НА ТОНКОМ ИМПЕДАНСНОМ ТЕЛЕ ВРАЩЕНИЯ В ДВУСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

Валуева В. Н.

Рассматривается дифракция нормальных волн на тонком импедансном теле, расположенном в двуслойной жидкости. Найден главный член асимптотики рассеянного поля. Проведены численные расчеты для сфероида.

Пусть имеется жидкий слой, лежащий на жидком полупространстве. При $x<0$ предполагается наличие вакуума или достаточно разреженной среды; при $x>0$ среда состоит из двух слоев: верхнего слоя с параметрами ρ_c, c, и нижнего — полупространства — с параметрами ρ_c^1, c_1. В пределах каждого слоя среда однородна и изотропна.

Пусть в верхнем слое $0<x<h$ расположено тонкое импедансное тело $Д_\varepsilon$ так, что его центр лежит в точке с координатами $(x_0, 0, l/2)$, где l — длина тела [1].

Предполагается, что в верхнем слое могут существовать нормальные волны

$$P_j=A_jH_0^{(1)}(\alpha_j|\boldsymbol{\rho}+\boldsymbol{\rho}_0|)\sin(b_jx_0/h), \tag{1}$$

где $|\rho|=\sqrt{y^2+z^2}$, $|\rho_0|=\sqrt{y_0^2+z_0^2}$, причем $\rho_0\gg l$; $\rho_0\gg 1/\alpha_j$; $\alpha_j=\sqrt{k^2h^2-b_j^2}/h$; k — волновое число для верхнего слоя, а b_j находятся из дисперсионного уравнения $\operatorname{ctg} b_j=-\rho_c\sqrt{k^2h^2-k_1^2h^2-b_j^2}/\rho_c^1b_j$, приведенного в [2]. Это уравнение в зависимости от значения $h^2(k^2-k_1^2)$ может иметь различное количество вещественных корней. Предполагается, что $h^2(k^2-k_1^2)$ таково, что имеется $N\geqslant 1$ положительных чисел $b_1^2, b_2^2, \ldots b_N^2$, т. е. в слое может распространяться N нормальных волн типа (1).

Рассмотрим задачу о рассеянии нормальной волны (1) тонким импедансным телом вращения $Д_\varepsilon$, причем будем считать, что длина тела имеет порядок длины волны, а его толщина много меньше длины волны: $l\cong\lambda$, $d\ll\lambda$.

Граница S поверхности тела задается уравнением $r=\varepsilon F(z)$, где $r=\sqrt{(x-x_0)^2+y^2}$, φ, z — цилиндрические координаты, функция $F(z)$ неотрицательная и достаточно гладкая при $0<z<l$ и такая, что $F(0)=F(l)=0$, а $\varepsilon>0$ — малый параметр.

Рассеянное поле U внутри слоя $0<x<h$ должно удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$(\Delta+k^2)U=0; \tag{2}$$

краевому условию на S

$$(\partial/\partial n+ikg)U|_S=-(\partial/\partial n+ikg)P_j|_S. \tag{3}$$

и условиям излучения на бесконечности. В формуле (3) нормаль n — внешняя, а g — постоянная.

Требуется найти главный член асимптотики рассеянного поля. Задача исследуется при помощи метода сращивания асимптотических разложений и метода потенциала, разработанных в работах [3, 4] и ранее использованных для решения задач дифракции в работах [5, 6].

Внутреннее разложение (в ближней зоне) будем искать в виде ряда $(\tilde r=r/\varepsilon)$

$$U=\sum_{s=1}^{\infty}(P_{s0}(\tilde r,z)+P_{s1}(\tilde r,z)\ln\varepsilon)\varepsilon^s. \tag{4}$$

Функции P_{ij} удовлетворяют рекуррентной системе уравнений Пуассона вне $Д_\varepsilon$.

Краевое условие во внутренних переменных $\tilde{r}=r|\varepsilon$, $\tilde{z}=z$ имеет следующий вид:

$$\partial/\partial n+ikg=(1+\varepsilon^2F'^2(z))^{-1/2}\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}+ikg-\varepsilon F'(z)\frac{\partial}{\partial z}\right)+O(\varepsilon^2). \qquad (5)$$

Краевые условия для функций P_{ij} можно получить подстановкой формул (4), (5) в (3) и разложением правой части полученного выражения в ряд по степеням ε.

В частности, для функций P_{10} и P_{11} получаем следующие краевые задачи:

$$\tilde{\Delta}P_{10}=\tilde{\Delta}P_{11}=0; \qquad \tilde{\Delta}=\frac{1}{\tilde{r}}\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\left(\tilde{r}\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\right);$$

$$\left.\frac{\partial P_{10}}{\partial\tilde{r}}\right|_s=-A_jH_0^{(1)}(\alpha_j|\rho+\rho_0|)\left[\frac{b_j}{h}\cos\varphi\cos\left(\frac{b_jx_0}{h}\right)+ikg\sin\left(\frac{b_jx_0}{h}\right)\right]+$$
$$+A_j\sin\varphi H_1^{(1)}(\alpha_j|\rho+\rho_0|)\frac{\alpha_jy_0}{\sqrt{y_0^2+(z+z_0)^2}}\sin\left(\frac{b_jx_0}{h}\right); \qquad \left.\frac{\partial P_{11}}{\partial\tilde{r}}\right|_s=0. \qquad (6)$$

Будем искать P_{1i}, $i=0,1$ в следующем виде:

$$P_{1i}=f_{1i}+e_{1i}\ln(k\tilde{r})+(a_{1i}\tilde{r}+b_{1i}/\tilde{r})\cos\varphi+(c_{1i}\tilde{r}+d_{1i}/\tilde{r})\sin\varphi; \quad i=0,1. \qquad (7)$$

Неизвестные коэффициенты определяются из (6) при решении краевых задач и при сращивании внутреннего и внешнего разложений.

Внешнее разложение ищем в виде

$$U=\sum_{s=1}^{\infty}U_s\varepsilon^s. \qquad (8)$$

В качестве первого члена этого разложения возьмем волновой потенциал, сосредоточенный на отрезке $r=0$, $0\leqslant z\leqslant l$:

$$U_1=\int_0^l\mu(t)G(r,z-t)\,dt. \qquad (9)$$

Здесь $\mu(t)$ неизвестная плотность объемной скорости, а $G(r,z)$ — функция Грина данной задачи.

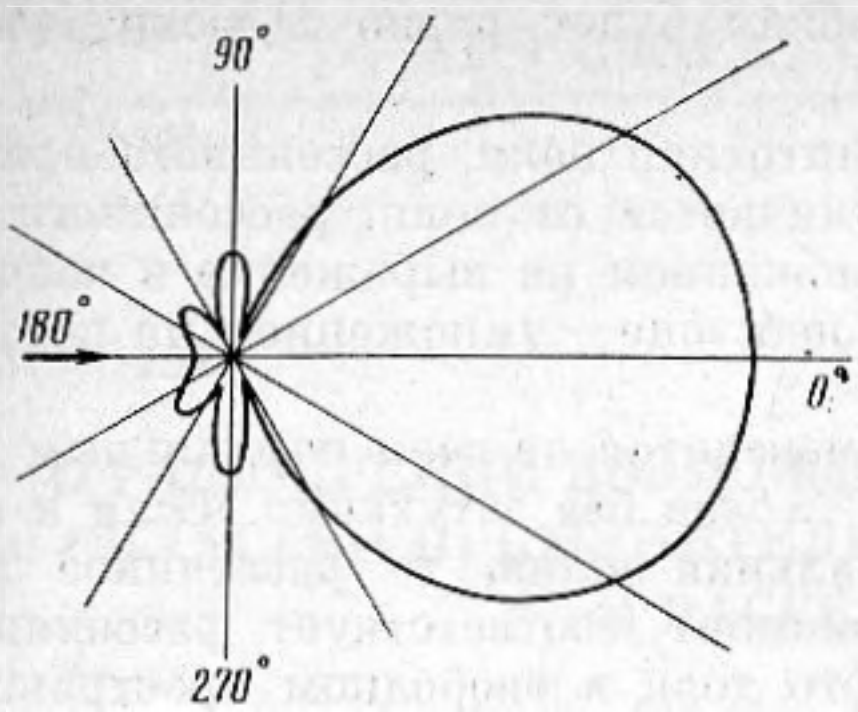
Функция Грина верхнего слоя $0<x<h$ приведена в работе [2]. Необходимые для решения задачи асимптотики функции Грина в начале координат и на бесконечности приведены в работах [1, 2].

Интеграл в формуле (9) допускает при $r\to0$, $0\leqslant z\leqslant l$ представление [6]

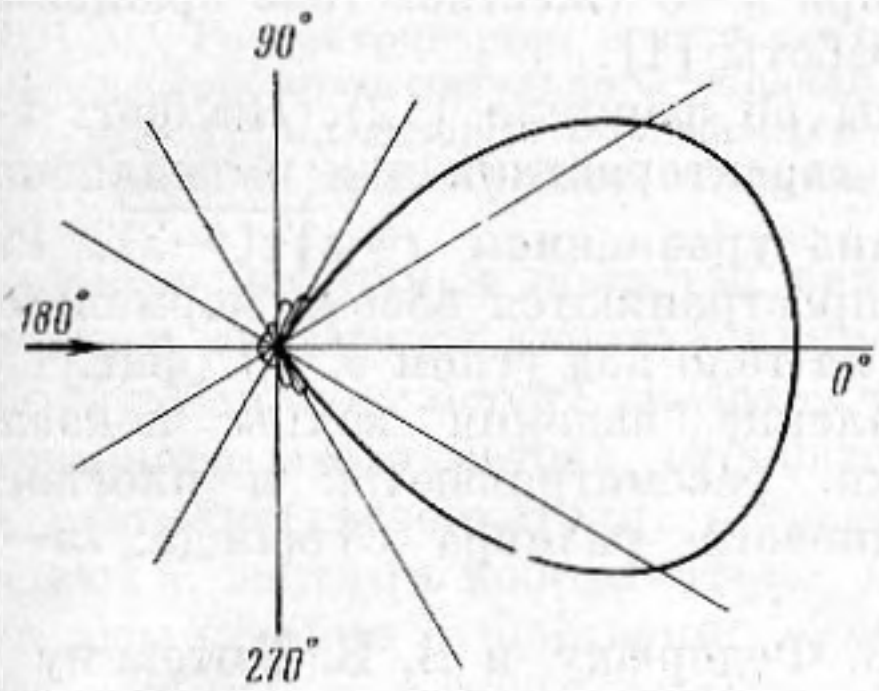
$$I(r,z)=\ln(kr)\sum_{s=0}^{\infty}\beta_s(z)r^{2s}+\sum_{s=0}^{\infty}\gamma_s(z)r^{2s}; \qquad \beta_0=\mu(z)/2\pi. \qquad (10)$$

Перейдем к сращиванию внутреннего (4) и внешнего (8) разложений. Подставляя выражение для P_{1i} (7) в формулу (6) и используя (4), (6)—(10), получаем

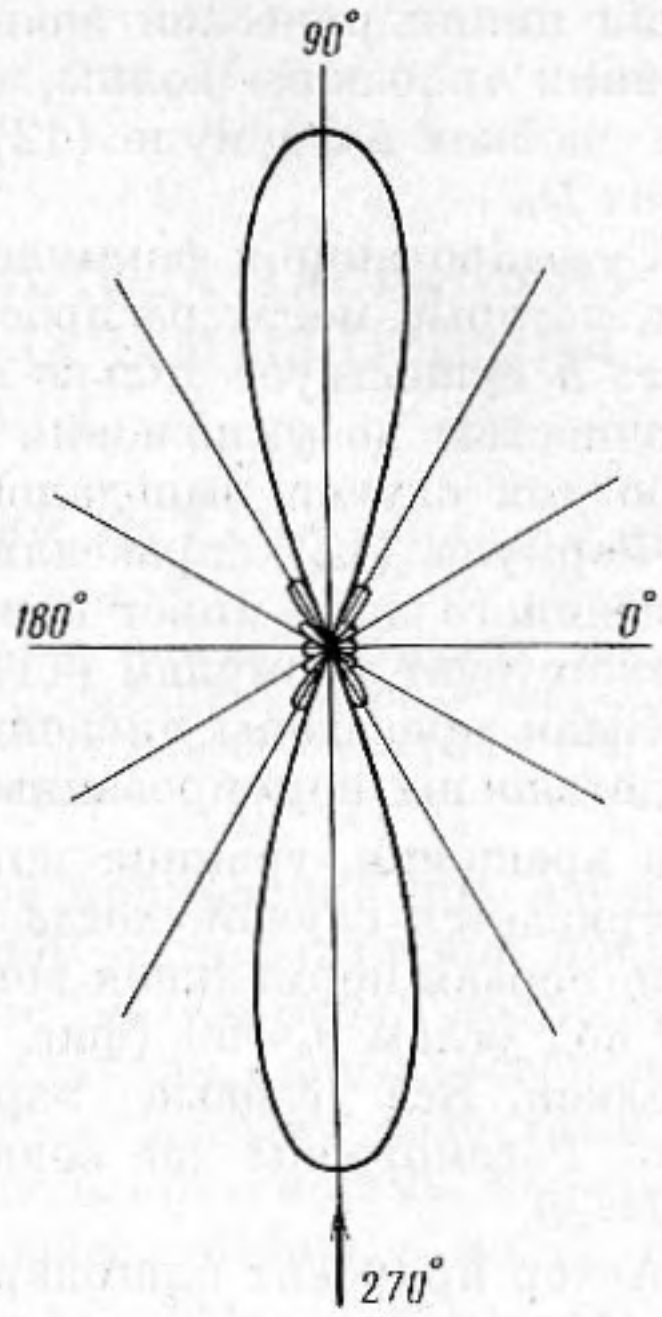
$$\beta_0=e_{10}=f_{11}=-iA_jkgF(z)\sin\left(\frac{b_jx_0}{h}\right)H_0^{(1)}(\alpha_j|\rho+\rho_0|);$$
$$a_{11}=b_{11}=c_{11}=d_{11}=a_{10}=c_{10}=0; \qquad f_{10}=\gamma_0; \qquad (11)$$
$$b_{10}=-A_jH_0^{(1)}(\alpha_j|\rho+\rho_0|)\frac{b_j}{h}F^2(z)\cos\left(\frac{b_jx_0}{h}\right);$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Фиг. 1. Угловая характеристика рассеяния сфероида. $kl=10$, $N=8$, $\theta_0=0$.

Фиг. 2. Угловая характеристика рассеяния сфероида. $kl=20$, $N=8$, $\theta_0=0$.

Фиг. 3. Угловая характеристика рассеяния сфероида. $kl=20$, $N=8$, $\theta_0=90°$

$$d_{10}=-A_jH_1^{(1)}(\alpha_j|\rho+\rho_0|)\frac{\alpha_j y_0F^2(z)}{\sqrt{y_0^2+(z+z_0)^2}}\sin\left(\frac{b_jx_0}{h}\right).$$

Остальные коэффициенты можно получить при сращивании членов разложений более высоких порядков.

Для нахождения рассеянного поля воспользуемся асимптотикой интеграла (9) при $R\to\infty$ [6] и асимптотикой функции Грина данной задачи при $\rho\to\infty$ [1, 2]. С использованием выражений (10), (11) получаем главный член асимптотики рассеянного поля в дальней зоне ($\rho\gg l$):

$$U=-\pi\varepsilon kgA_j\sin\left(\frac{b_jx_0}{h}\right)\sum_{p=1}^{N}B_p\frac{e^{i\alpha_p\rho}}{\sqrt{\alpha_p\rho}}\sin\left(\frac{b_px_0}{h}\right)\times$$
$$\times\sin\left(\frac{b_px}{h}\right)\int_0^l F(t)e^{it(\alpha_j\cos\theta_0-\alpha_p\cos\theta)}\left[H_0^{(1)}\left(\alpha_j\sqrt{y_0^2+(t+z_0)^2}\right)e^{-it\alpha_j\cos\theta_0}\right]dt+$$
$$+O(\varepsilon^2). \tag{12}$$

Здесь B_p — коэффициенты, возникающие из разложения функции Грина при $\rho\to\infty$ [1, 2], $\theta_0=\operatorname{arctg}(y_0/z_0)$.

Из формулы (12) видно, что при $|\rho+\rho_0|\gg1$ вместо падающей волны типа (1) можно воспользоваться «плоской» волной, заменив в (1) функцию Ханкеля на $\exp\{i\alpha_j(z\cos\theta_0+y\sin\theta_0)\}$.

Если положить выражение в квадратных скобках в (12) тождественно равным 1, получим асимптотику поля, рассеянного при падении «плоской» волны, а если воспользоваться асимптотикой функции Ханкеля при

$\rho_0 \gg l$, то выражение в квадратных скобках будет равно $D_j = \exp\{i(\alpha_j\rho_0 - \pi/4)\}\sqrt{2/\pi\alpha_j\rho_0}$, с точностью до $O(\rho_0^{-3/2})$.

Таким образом, главный член асимптотики поля, рассеянного при падении цилиндрической волны (1), отличается от поля, рассеянного при падении «плоской» волны, только умножением на выражение в квадратных скобках в формуле (12), а в дальней зоне — умножением на коэффициент D_j.

Суммирование в формуле (12) производится по всем нормальным волнам, которые могут распространяться в слое без затухания. Если в слое $0<x<h$ существует только одна нормальная волна, то рассеянное поле с точностью до умножения на коэффициент соответствует рассеянному полю для случая импедансного тонкого тела в свободном пространстве.

Формула (12) справедлива при $\varepsilon \ll g \ll 1/\varepsilon$. Второй член разложения рассеянного поля имеет порядок ε^2 и при $g=0$ (жесткое тело вращения) соответствует формулам (11), (12) из работы [1].

Были проведены численные расчеты по формуле (12). На фиг. 1—3 представлены нормированные угловые характеристики для импедансного тела вращения, граница которого задана уравнением $r=\varepsilon\sqrt{z(l-z)}$. Рассматривается случай, когда в слое распространяются восемь нормальных волн, первая нормальная волна падает на тело под углом $\theta_0=0$ (фиг. 1, 2) или под углом $\theta_0=90$ (фиг. 3). Направление падения волны показано стрелкой. Все угловые характеристики рассматриваются в плоскости $x=x_0$. Рассмотрены две величины волнового размера сфероида: $kl=10$ и $kl=20$.

Автор приносит благодарность М. В. Федорюку и В. В. Тютекину за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Немцова В. Н., Федорюк М. В.* Дифракция звуковых волн на тонком теле вращения в двуслойной жидкости // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 1. С. 131—134.
2. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
3. *Ван Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1957.
4. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972.
5. *Федорюк М. В.* Применение метода сращивания асимптотических разложений к рэлеевскому приближению в скалярной теории дифракции // Акуст. журн. 1981. Т. 27. № 3. С. 441—448.
6. *Федорюк М. В.* Рассеяние звуковых волн тонким акустическим жестким телом вращения // Акуст. журн. 1981. Т. 27. № 4. С. 605—609.

Акустический институт им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
8.IV.1988