

УДК 534.222.1

ФЛУКТУАЦИИ МОД В КАНОНИЧЕСКОМ ПОДВОДНОМ ЗВУКОВОМ КАНАЛЕ

Вировлянский А. Л., Костерин А. Г., Малахов А. Н.

Найдены величины средних значений и функций взаимных корреляций амплитуд мод в случайно-неоднородном каноническом подводном звуковом канале. Цель работы — получение представления о значениях указанных величин в типичном океаническом глубоководном волноводе.

В работе [1] был предложен приближенный метод описания флуктуаций амплитуд мод в многомодовом волноводе с крупномасштабными случайными неоднородностями показателя преломления среды. В этой работе изложены лишь основные идеи подхода, представляющего собой модификацию известного метода плавных возмущений [2, 3]. В настоящей статье результаты работы [1] применены для анализа некоторых статистических характеристик звукового поля в конкретном глубоководном океаническом волноводе. В качестве такового взят так называемый канонический подводный звуковой канал, описанный в работе [4] и широко используемый многими авторами для моделирования типичных условий распространения звука в глубоком море. Предполагается, что флуктуации скорости звука обусловлены влиянием внутренних волн и описываются спектром Гарретта-Манка [3–5].

В данной статье приведены результаты расчетов лишь первых двух моментов амплитуд мод, хотя используемый подход позволяет получить существенно более полное статистическое описание поля. Внимание, уделенное указанным характеристикам амплитуд мод, объясняется тем, что, во-первых, их знания достаточно для решения многих прикладных задач. Во-вторых, хотя результаты работы [1] получены в предположении о насыщенности флуктуаций интенсивности поля, в некоторых случаях выражения для первых двух моментов амплитуд мод могут оставаться в силе и при нарушении этого ограничения. Более точная формулировка и доказательство высказанного утверждения выходят за рамки данной работы. Здесь отметим лишь, что такая же ситуация имеет место и при лучевом описании флуктуаций поля: аналогичные предсказания метода плавных возмущений остаются в силе и при нарушении границ применимости метода [2].

Рассмотрим плоскостойкий подводный звуковой канал. Введем декартову систему координат (x, y, z) таким образом, чтобы ось z была направлена вертикально вверх. Будем считать, что зависимость регулярной компоненты показателя преломления среды n от координаты z имеет единственный максимум при $z=0$ ($n(0)=1$). Поле монохроматического источника, расположенного в точке $(0, 0, z_0)$, удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta p + k^2 [n^2(z) - 2n^2(z)\mu(x, y, z)] p = -4\pi\delta(x)\delta(y)\delta(z-z_0), \quad (1)$$

где k — волновое число на оси канала $z=0$. Второе слагаемое в квадратных скобках описывает флуктуирующую часть квадрата показателя преломления среды, причем сомножитель $\mu \equiv \delta c/c$ задает относительные флуктуации скорости звука. Ограничиваясь рассмотрением поля вблизи оси x и полагая флуктуации скорости звука крупномасштабными, решение уравнения (1) в малоугловом приближении ищем в виде разложения по плоским волнам (в горизонтальной плоскости) и по собственным функциям

регулярной краевой задачи $\varphi_m(z)$ (вертикальной плоскости):

$$p(x, y, z) = \sum_m \int d\kappa A_{m,\kappa}(x) \varphi_m(z) \exp \left\{ i \left(k_m x + \kappa y - \frac{\kappa^2}{2k_m} x \right) \right\}, \quad (2)$$

где $A_{m,\kappa}(x)$ — амплитуда, а k_m — горизонтальное волновое число моды. При $x=0$ величина $A_{m,\kappa}$ имеет то же значение, что и в отсутствие случайных неоднородностей, т. е. $A_{m,\kappa}(0) = (i/k_m) \varphi_m(z_0)$. Далее будем использовать ВКБ-приближение функций $\varphi_m(z)$, которые между точками заворота моды $z=z_{\min}$ и $z=z_{\max}$ задаются соотношениями

$$\varphi_m(z) = \varphi_m^+(z) + \varphi_m^-(z), \quad (3)$$

где

$$\varphi_m^\pm(z) = \left(\frac{a_m}{D_m} \right)^{1/2} (n^2(z) - a_m^2)^{-1/4} \exp \left\{ \pm i \left[k \int_z^{z_{\max}} \sqrt{n^2(z) - a_m^2} dz - \pi/4 \right] \right\}, \quad (4)$$

D_m — длина цикла луча с теми же горизонтами заворота, что и у m -й моды. Присутствующие в (4) собственные числа краевой задачи a_m связаны с горизонтальными волновыми числами мод соотношениями $a_m = k_m/k$. Они находятся из условия

$$k \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \sqrt{n^2(z) - a_m^2} dz = \pi (m + 1/2), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Величина a_m равна косинусу угла, под которым волна Бриллюэна, отвечающая m -й моде, пересекает ось канала.

Из результатов работы [1] следует, что в области применимости геометрической оптики решение уравнения (1) задается соотношением (2) с

$$A_{m,\kappa}(x) = \frac{i}{k_m} [\varphi_m^+(z_0) \xi_{m,\kappa}^+(x) + \varphi_m^-(z_0) \xi_{m,\kappa}^-(x)], \quad (6)$$

причем

$$\xi_{m,\kappa}^\pm(x) = \exp \{ i X_{m,\kappa}^\pm(x) \}, \quad (7)$$

где

$$X_{m,\kappa}^\pm(x) = k \int_0^x dx' \mu [x', y_{m,\kappa}(x'), z_m^\pm(x')]. \quad (7a)$$

В последней формуле интегрирование идет вдоль траекторий лучей, названных в [1] модовыми. Каждой моде, характеризуемой набором (m, κ) , отвечают два таких луча. Оба они выходят из источника, причем индексы «+» и «-» показывают знаки углов выходов по отношению к горизонту. Траектории данных лучей удовлетворяют закону Снеллиуса $n[z_m^\pm(x)] \cos \theta_m^\pm(x) = a_m$ ($\theta_m^\pm(x)$ — углы скольжения лучей на удалении x от источника) и лежат в плоскости $y = y_{m,\kappa}(x) = (\kappa/k_m)x$. Горизонты заворота этих лучей совпадают с горизонтами заворота m -й моды. Как легко видеть, величины $X_{m,\kappa}^\pm(x)$ представляют собой случайные набегы фазы вдоль модовых лучей. Таким образом, формулы (7), (7a) являются «модовыми аналогами» хорошо известных выражений, используемых при лучевом описании флуктуаций волновых полей (см., например, [2–5]).

В данной работе проведен анализ средних значений $\langle A_{m,\kappa} \rangle$ и функций взаимной корреляции $\langle A_{m,\kappa} A_{m_1,\kappa_1}^* \rangle$ амплитуд мод. Указанные средние очевидным образом выражаются через соответствующие моменты функций $\xi_{m,\kappa}^\pm$. В предположении о гауссовости $X_{m,\kappa}$ и статистической независимости $\xi_{m,\kappa}^+$ и $\xi_{m,\kappa}^-$ (оба предположения выполняются, если модовые лучи, отве-

чающие m -й моде, проходят через большое число статистически независимых неоднородностей) из (7) и (7а) получаем

$$\langle \xi_{m,x}^\delta \rangle = \exp \left\{ -\frac{1}{2} d_{m,x}^\delta(x) \right\}, \quad (8)$$

где

$$d_{m,x}^\delta = \langle (X_{m,x}^\delta)^2 \rangle, \quad (9)$$

$$\langle \xi_{m,x}^\delta (\xi_{m_1,x_1}^{\delta_1})^* \rangle = \begin{cases} \exp \left\{ -\frac{1}{2} S_{m,x;m_1,x_1}^\delta(x) \right\}, & \delta = \delta_1, \\ \langle \xi_{m,x}^\delta \rangle \langle \xi_{m_1,x_1}^{\delta_1} \rangle, & \delta \neq \delta_1 \end{cases} \quad (10)$$

где

$$S_{m,x;m_1,x_1}^\delta(x) = \langle (X_{m,x}^\delta(x) - X_{m_1,x_1}^\delta(x))^2 \rangle. \quad (11)$$

Индекс δ в (8)–(11) обозначает либо «+», либо «-».

Рассмотрим конкретный пример применения приведенных формул. Используем волновод с каноническим профилем показателя преломления среды

$$n(z) = 1 - \varepsilon [\exp(2z/B) - 2z/B - 1], \quad (12)$$

где $\varepsilon = 5,7 \cdot 10^{-3}$, $B = 1000$ м. Как указано ранее, причиной флуктуаций скорости звука считаем влияние внутренних волн. Соответствующая модель поля флуктуаций показателя преломления среды, основанная на использовании спектра Гарретта-Манка, развита в [3–5].

Отметим важное обстоятельство. Как следует из соотношений (6)–(11), искомые статистические моменты амплитуд мод выражаются через дисперсии $d_{m,x}^\delta(x)$ и структурные функции $S_{m,x;m_1,x_1}^\delta(x)$ случайных набегов фаз вдоль модовых лучей. Через те же функции (рассчитанные только вдоль не модовых, а произвольных лучей) выражаются аналогичные средние для амплитуд лучей. Это обстоятельство, отражающее глубокую взаимосвязь модового и лучевого представлений поля в случайно-неоднородном волноводе, облегчает нашу задачу. Дело в том, что выражения для дисперсий и структурных функций случайных набегов фаз для рассматриваемой здесь модели подводного звукового канала уже получены в работах [3–5], посвященных лучевому описанию статистических характеристик поля. Поэтому при выполнении расчетов используем готовые формулы из указанных работ. Эти формулы имеют вид

$$d_{m,0}^\delta(x) = k^2 \int_0^x dx' [\langle \mu^2(z) \rangle L_p(\theta_m^\delta, z)] \Big|_{z=z_m^\delta(x')}^2 \quad (13)$$

$$S_{m,m_1,0}^\delta(x) = 2k^2 \int_0^x dx' \left[\langle \mu^2(z) \rangle L_p \left(\frac{\theta_m^\delta + \theta_{m_1}^\delta}{2}, z \right) f(\Delta z, z) \right] \Big|_{\substack{z=(z_m^\delta(x') + z_{m_1}^\delta(x'))/2 \\ \Delta z = z_m^\delta(x') - z_{m_1}^\delta(x')}} \quad (14)$$

Здесь

$$L_p(\theta, z) = \langle j^{-1} \rangle \frac{4}{\pi^2} \frac{N_0}{\omega_i} Bg \left[\frac{N(z)}{\omega_i} \operatorname{tg} \theta \right],$$

$$g[x] = (1+x^2)^{-1} + \frac{x^2}{2} (1+x^2)^{-1/2} \ln \{ [(1+x^2)^{1/2} + 1] / [(1+x^2)^{1/2} - 1] \}, \quad (15)$$

$$\langle j^{-1} \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} [j(j^2 + j^2)]^{-1} / \sum_{j=1}^{\infty} (j^2 + j^2)^{-1},$$

$$f(\Delta z, z) = M_j \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{j\pi N(z)\Delta z}{BN_0}\right)}{j(j^2 + j^2)}; \quad M_j^{-1} = \sum_{j=1}^{\infty} [j(j^2 + j^2)]^{-1},$$

ω_i — инерционная частота, $N(z) = N_0 \exp\{(z - z_n)/B\}$ — зависимость частоты плавучести от глубины, $\langle \mu^2(z) \rangle = \langle \mu_0^2 \rangle \exp\{3(z - z_n)/B\}$. Величина z_n задает расстояние от оси канала до поверхности моря. При расчетах использованы следующие значения

констант, фигурирующих в приведенных выше формулах: $z_n = 10^3$ м, $j_0 = 3$, $N_0 = 5,3 \cdot 10^{-3}$ с⁻¹, $\omega_i = 7,3 \cdot 10^{-5}$ с⁻¹, $\langle \mu_0^2 \rangle = 2,5 \cdot 10^{-7}$.

На фиг. 1–3 представлены результаты вычислений статистических характеристик амплитуд мод, возбуждаемых точечным источником, расположенным на оси канала ($z=0$) и работающим на частоте 300 Гц ($k=1,26$ м⁻¹). На фиг. 1, а показана зависимость дисперсий случайных набегов фаз $d_{m,0}^{\pm}(x)$ от длины трассы x . Расчеты выполнены для моды с номером $m=170$. Точки заворота этой моды лежат на горизонтах $z_{\min} = -2084$ м и $z_{\max} = 893$ м, а соответствующие ей модовые лучи, траектории которых изображены на фиг. 1, б, пересекают ось канала под углами $\pm 10,9^\circ$. Из сравнения фиг. 1, а, б, видно, что дисперсии $d_{m,0}^{\pm}(x)$ особенно быстро нарастают при прохождении модовыми лучами окрестностей своих верхних точек заворота, где флуктуации показателя преломления среды особенно сильны. Точно такая же ситуация имеет место и для обычных лучей. Она подробно обсуждается в [3, 4], где можно найти дополнительную информацию о зависимости дисперсий $d_{m,0}^{\pm}(x)$ от углов, под которыми лучи пересекают ось канала (или с соответствующим пересчетом от номеров мод m).

Фиг. 1. Зависимость от длины трассы x дисперсий случайных фаз $d = d_{m,0}^{\pm}(x)$ (а): 1 — $d_{m,0}^+(x)$, 2 — $d_{m,0}^-(x)$ и модулей средних амплитуд мод $A = |\langle B_m(x) \rangle|$ (в): 1 — $m=168$, 2 — $m=169$, 3 — $m=170$. Траектории модовых лучей (б): 1 — $z_m^+(x)$, 2 — $z_m^-(x)$

На фиг. 1, в приведены зависимости модулей средних значений комплексных амплитуд мод с номерами $m=168, 169, 170$. На этом и следующих графиках расчеты выполнены для нормированных амплитуд мод $B_{m,x}$, связанных с $A_{m,x}$ соотношением

$$A_{m,x}(x) = \frac{1}{k_m} \left(\frac{a_m}{D_m} \right)^{1/2} [n^2(z_0) - a_m^2]^{-1/2} B_{m,x}(x). \quad (16)$$

Значения определенных таким образом функций $|B_{m,x}(x)|$ при $x=0$ лежат в интервале 0–2 (см. (4) и (6)). Указанным модам отвечают практически равные дисперсии $d_{m,0}^{\pm}(x)$. Интересным и на первый взгляд неожиданным является тот факт, что для некоторых мод (на фиг. 1, в это мода с номером 170) рассматриваемые средние на отдельных участках трассы могут возрастать. Как легко видеть из соотношений (6), (8) и (16), такое явление может наблюдаться только для мод с $|B_{m,x}(0)| < 1$. Если величина $\langle \xi_m^+ \rangle$ затухает в несколько раз после прохождения модовым лучом верхней точки заворота, то это приводит к возрастанию модуля

среднего значения амплитуды моды от $|B_{m, \kappa}(0)| < 1$ до величины, близкой к единице (см. кривую 3 на фиг. 1, в). После прохождения верхней точки заворота вторым модовым лучом затухает величина $\langle \xi_m^- \rangle$ и значение $|\langle B_{m, 0} \rangle|$ резко уменьшается. Это хорошо видно на кривой 3 фиг. 1, в. Сказанное допускает простую физическую интерпретацию. При возбуждении поля точечным источником соседние моды нередко имеют сильно различающиеся начальные амплитуды $B_{m, 0}(0)$ (см. фиг. 1, в). В процессе взаимодействия на случайных неоднородностях среды амплитуды мод постепенно выравниваются, причем это выравнивание может происходить быстрее, чем затухание когерентной компоненты поля¹. Таким образом, в процессе распространения средние значения амплитуд слабозвужденных мод временно возрастают.

Перейдем к рассмотрению межмодовых корреляций. Для простоты ограничимся анализом взаимных корреляций величин $A_{m, \kappa}(x)$ с одинаковыми значениями κ , равными нулю. На фиг. 2, б изображены зависимости структурной функции фазы $S_{m, m_1, 0}^+(x)$ от разности номеров $m_1 - m$ для трех значений длины трассы $x = 40, 160, 400$ км. Номер m фиксирован и равен 170. Для наглядности на фиг. 2 (и далее на фиг. 3) точки, отвечающие целочисленным значениям номеров мод, соединены отрезками. Более детальный анализ зависимости величины структурной функции фазы от длины трассы x (соответствующие расчеты на графиках не отражены) показывает что наиболее сильные изменения функций $S_{m, m_1, 0}^+(x)$ так же, как и дисперсий $d_{m, 0}^{\pm}(x)$, происходят при прохождении модовыми лучами верхних точек заворота.

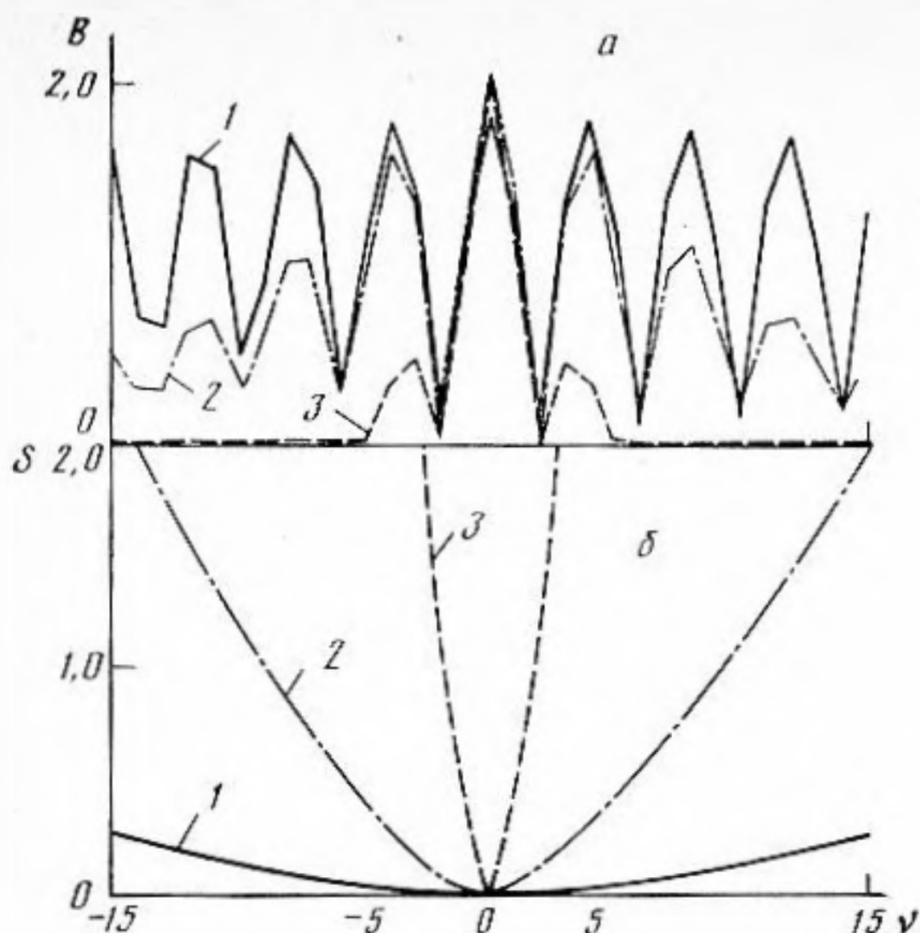
На фиг. 2, а представлены результаты расчетов функций взаимных корреляций нормированных амплитуд мод $|\langle B_m B_{m_1}^* \rangle|$ ($m = 170, m_1 = 155 - 185$) на тех же дистанциях 40, 160 и 400 км. Поскольку $|B_{170}(0)| < 1$, величина $\langle |B_{170}(x)|^2 \rangle$ быстро растет на начальном участке трассы вследствие перекачки в данную моду энергии соседних более эффективно возбужденных источников мод. Как и у функции $|\langle B_{170}(x) \rangle|$, основной рост происходит здесь в окрестности первой точки заворота модового луча, вышедшего из источника вверх. Эта точка расположена на удалении, меньшем 40 км. Поэтому нарастание $\langle |B_{170}(x)|^2 \rangle$ на фиг. 2, а проявляется лишь в том, что величина данной функции при $x = 160$ и 400 км немного больше, чем при $x = 40$ км. В отличие от среднего значения амплитуды моды величина $\langle |B_m(x)|^2 \rangle$, достигнув своего максимального значения, остается далее постоянной. Это справедливо лишь в рамках используемого в данной работе приближения. Приведенные на фиг. 2, а кривые количественно характеризуют ослабление межмодовых корреляций с увеличением длины трассы. Осцилляции зависимости $|\langle B_m B_{m_1}^* \rangle|$ как функции $m_1 - m$ объясняются быстрой зависимостью от номера m коэффициентов возбуждения мод $\varphi_m(z_0)$ (это видно из соотношений (6) и (10)), т. е. в конечном итоге спецификой рассматриваемого источника звука.

Ясно, что закон спада межмодовых корреляций с ростом дистанции фактически определяется экспоненциальными множителями, которые задаются соотношениями (10) и (11). Поэтому в качестве оценки количества мод, коррелированных с m -й на расстоянии x от источника, разумно принять величину Δm_{κ} , определенную условием

$$S_{m, m + \Delta m_{\kappa}}^+(x) = 2. \quad (17)$$

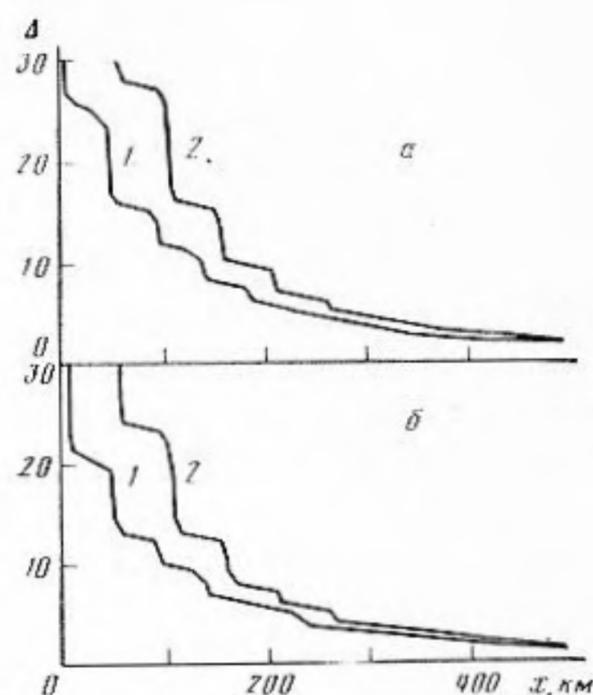
Это условие означает, что коэффициент взаимной корреляции $\xi_m^+(x)$ и $\xi_{m + \Delta m_{\kappa}}^+(x)$ равен e^{-1} . На расстояниях, превышающих длину цикла D_m модового луча, аналогичное условие выполняется и для $\xi_m^-(x)$. На фиг. 3, а изображены зависимости $\Delta m_{\kappa}(x)$ для двух мод с номерами $m = 50$ (6°)

¹ Отметим, что вопрос о затухании среднего поля моды в каноническом подводном звуковом канале в иной постановке рассмотрен в работе [6].



Фиг. 2

Фиг. 2. Зависимости модулей функций взаимной корреляции амплитуд мод $B = |\langle B_m B_{m_1}^* \rangle|$ (а) и структурных функций фаз $S = S_{m, m_1, 0}^+(x)$ (б) от разности номеров $\nu = m_1 - m$ для трех значений длины трассы x , км: 1 - 40, 2 - 160, 3 - 400 ($m = 170$)



Фиг. 3

Фиг. 3. Зависимость числа коррелированных мод $\Delta = \Delta m_k$ от длины трассы x . Частота сигнала $f = 300$ Гц (а) и $f = 500$ Гц (б): 1 - $\chi = 6^\circ$, 2 - $\chi = 10,9^\circ$

и 170 ($10,9^\circ$). В скобках указаны величины углов χ , под которыми соответствующие модовые лучи пересекают ось канала. Как видим, корреляции мод, у которых точки заворота находятся выше (в данном случае это моды с χ , близкими к $10,9^\circ$), с ростом длины трассы спадают медленнее, несмотря на то, что флуктуации скорости звука возрастают по мере приближения к поверхности. Это кажущееся противоречие объясняется следующим образом. Крутые модовые лучи проходят свои верхние точки заворота «быстрее», чем пологие [4], и поэтому влияние сильных флуктуаций среды сказывается на отвечающих им модах слабее.

Частотная зависимость числа коррелированных мод Δm_k обусловлена конкуренцией двух факторов. С увеличением частоты излучения f дисперсия флуктуаций фазы растет пропорционально f^2 . В то же время пропорционально f^{-1} сокращается расстояние по вертикали $(|z_m^\pm(x) - z_{m-1}^\pm(x)|)$ между модовыми лучами. В результате величины Δm_k на фиксированном расстоянии от источника убывает примерно пропорционально f^{-1} . Тенденция уменьшения числа коррелированных мод с ростом частоты f качественно подтверждается сравнением графиков на фиг. 3, а, б. На фиг. 3, б показаны результаты расчетов Δm_k в случае, когда частота излучения $f = 500$ Гц (все предыдущие расчеты выполнены для $f = 300$ Гц), а остальные параметры задачи совпадают с использованными ранее. Величины Δm_k найдены для мод, модовые лучи которых, как и прежде, пересекают ось канала под углами $\chi = 6^\circ$ и $10,9^\circ$. Номера этих мод при смене частот, разумеется, изменились и стали равны $m = 70$ и 280 . Таким образом, при возбуждении поля в глубоководном подводном звуковом канале источником, работающим на частотах порядка нескольких сотен герц и выше, межмодовые корреляции практически исчезают на дистанциях порядка 500 км.

Приведенные выше сведения дают представление о поведении и типичных значениях первых двух статистических моментов амплитуд мод в океанических волноводах, гидрология которых может быть задана описанной здесь моделью. Эти данные могут быть применены при решении ряда прикладных задач (см., например, ниже) и позволяют судить о том, в ка-

ких случаях для анализа (в частности, численными методами на ЭВМ) акустических полей в океанических волноводах можно пользоваться детерминированной теорией, неучитывающей флуктуации скорости звука.

В заключение в качестве примера использования полученных результатов кратко обсудим вопрос о возможности селекции мод путем спектрального анализа горизонтального разреза поля [7-9]. В регулярном плоскостойном волноводе зависимость поля m -й моды от расстояния до источника r выражается, как известно, множителем $\exp(ik_m r)$ (считаем, что уменьшение амплитуды моды с ростом расстояния r по закону $r^{-1/2}$ компенсируется при обработке). Несложно показать [7-9], используя (5), что $|k_{m+1} - k_m| = 2\pi/D_m$ и, следовательно, фурье-преобразование горизонтального разреза поля длиной $R > D_m$ позволяет разрешить вклад отдельной m -й моды. Соотношения (6) и (7) означают, что влияние флуктуаций показателя преломления среды сводится к разбиению указанного множителя на два слагаемых с разными случайными набегам фаз X_m^+ и X_m^- . Анализ условий разрешения мод в общем случае приводит к известной задаче о ширине спектральной линии колебания со случайной фазой [10]. Здесь же будем предполагать приближенно, что рост дисперсии фаз $d_m^\pm(x)$ происходит скачкообразно на величину Δd_m в верхних точках заворота модовых лучей. Подробный анализ показывает, что энергетическая ширина спектрального максимума $\Delta q_m(R)$, отвечающего отдельной моде, при длине реализации $R \gg D_m$ равна

$$\Delta q_m(R) = |k_{m+1} - k_m| \frac{N(1-\alpha)^2}{N(1-\alpha^2) - 2\alpha(1-\alpha^N)},$$

$$\alpha = \exp\{-\Delta d_m/2\}, \quad N = R/D_m$$

и не превосходит интервала пространственных частот $|k_{m+1} - k_m|$ между соседними модами даже при величине скачка $\Delta d_m \gg 1$. Однако в случае $\Delta d_m \gg 1$, строго говоря, необходим анализ не только ширины, но и формы спектральной линии. При этом на практике возможно потребуются выбор пространственного окна специального вида, исключающего появления в спектре отдельной моды побочных максимумов. Если же величина скачка Δd_m невелика ($\Delta d_m \leq 1$), то разрешение модовых максимумов возможно при длине реализации $R > D_m 2/(1+\alpha)$ независимо от вида пространственного окна. Для рассмотренной выше модели волновода это имеет место при частоте сигнала меньше 150 Гц. Отметим, что условия разрешения отдельных модовых максимумов в пространственном спектре не зависят от расстояния r_0 от источника до центра анализируемой реализации (при этом $r_0 > R/2$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Вировлянский А. Л., Костерин А. Г. Метод плавных возмущений для описания полей в многомодовых волноводах // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 4. С. 599-605.
2. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. М.: Наука, 1978.
3. Munk W. H., Zaccariazen Z. Sound propagation through a fluctuating stratified ocean: Theory and observation // J. Acoust. Soc. Amer. 1976. V. 59. № 4.
4. Распространение звука во флуктуирующем океане/Пер. с англ. под ред. Флатте С. М.: Мир, 1982.
5. Esswein R., Flatte S. Calculation of the phase-structure function density form oceanic internal waves // J. Acoust. Soc. Amer. 1981. V. 70. № 5. P. 1387-1396.
6. Сазонтов А. Г., Фарфель В. А. Об однократном рассеянии акустического сигнала на внутренних волнах в подводном звуковом канале // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 5. С. 635-641.
7. Горская Н. В., Николаев Г. Н., Рычова Т. А., Салин В. М. Спектральный анализ при исследовании полей гармонических источников в акустических волноводах // Акуст. журн. 1981. Т. 27. № 2. С. 202-205.
8. Вировлянский А. Л., Саичев А. И., Славинский М. М. Проявление модовой и лучевой структур в спектре сигнала, регистрируемого движущимся приемником // Изв. АН СССР. Физика атм. и океана. 1985. Т. 21. № 8. С. 888-890.
9. Вировлянский А. Л., Костерин А. Г. О доплеровском уширении спектра тонального сигнала в многомодовом волноводе // Акуст. журн. Т. 33. № 3. С. 416-423.
10. Малахов А. И. Флуктуации в автоколебательных системах. М.: Наука, 1967.