

УДК 534.21

## ДИСЛОКАЦИИ ФАЗОВОГО ФРОНТА В ОКЕАНИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ И ИХ ПРОЯВЛЕНИЕ В АКУСТИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЯХ

*Журавлев В. А., Кобозев И. К., Кравцов Ю. А.*

Рассмотрено возникновение дислокаций фазового фронта акустического поля в океаническом волноводе с небольшим числом мод. Показано, что распределение дислокаций в сечении волновода является неравномерным, дается оценка средней плотности дислокаций. Рассмотрено движение дислокаций, вызванное приливом, и на численном примере иллюстрируется характер изменения фазы поля при прохождении дислокации вблизи приемной антенны.

В многомодовом волноводе в результате интерференции между модами возможно возникновение особых линий в трехмерном пространстве, на которых модуль акустического поля равен нулю, а фаза не определена. В окрестности этих линий поверхности равных фаз (фазовый фронт) испытывают сильные искажения и образуют характерную структуру, напоминающую дислокации в твердом теле [1-4].

Явление дислокаций фазового фронта хорошо изучено для случая спекл-полей в оптике [3-5], где их образование носит случайный характер. В данной работе рассмотрим возникновение дислокаций в океаническом волноводе на примере горизонтально-однородного волновода в условиях, когда в рассматриваемой области распространяется небольшое число мод (2; 3 и более) и картина поля является детерминированной.

Изучение дислокаций фазового фронта в океанических волноводах представляет особый интерес потому, что положение нулей поля дает возможность качественно понять поведение фазы поля как функции координат во всей рассматриваемой области в целом. Кроме того, необходимо учитывать наличие нулей поля и дислокаций фазового фронта при интерпретации результатов измерения фазы в экспериментах по акустическому зондированию океана, поскольку градиент фазы полного поля в окрестности дислокаций существенно больше, чем в других областях волновода, а непосредственно в точке нулевого поля градиент фазы обращается в бесконечность. Ясно, эта особенность не может не проявляться при фазовых измерениях в волноводе.

Пусть в горизонтально-однородном океаническом волноводе монохроматическим источником возбуждено акустическое поле  $u(r, z) = |u(r, z)| \exp[i\Phi(r, z)]$ , где  $z$  — глубина,  $r$  — горизонтальное расстояние от источника (для простоты предположим наличие аксиальной симметрии). Будем интересоваться областью волновода, достаточно удаленной от источника, в которой акустическое поле выражается суммой конечного числа  $N$  «выживших» мод со сравнимыми затуханиями:

$$u(r, z) = \sum_{n=1}^N u_n \exp[i(h_n r + \theta_n)], \quad (1)$$

Здесь  $u_n = a_n \psi_n(z)$ ,  $\psi_n(z)$  — собственные функции волновода,  $a_n$  — амплитуда  $n$ -й моды,  $\theta_n$  — начальная фаза,  $h_n$  — постоянная распространения. Функции  $\psi_n(z)$  и амплитуды  $a_n$  будем считать вещественными, а слабой зависимостью  $a_n$  от  $r$  на рассматриваемом участке волновода будем пренебрегать.

Амплитуда  $|u|$  и фаза  $\Phi$  полного поля находятся по формулам

$$|u|^2 = \sum_{n,m=1}^N u_n u_m \cos(h_{nm}r + \theta_{nm}), \quad (2)$$

$$\Phi = \operatorname{arctg} \frac{\sum_{n=1}^N u_n \sin(h_n r + \theta_n)}{\sum_{n=1}^N u_n \cos(h_n r + \theta_n)}, \quad (3)$$

где  $h_{nm} = h_n - h_m$ ,  $\theta_{nm} = \theta_n - \theta_m$ .

В выражении (1) амплитуды  $u_n(z)$  отдельных мод меняют знак на горизонтах, соответствующих узлам собственных функций  $\psi_n(z)$ , и удобно учитывать это изменение знака в фазовом множителе, положив  $u_n(z) = |u_n| \exp(i\chi_n)$ , где  $\chi_n = \pi(1 - \operatorname{sign} u_n)/2$ . При этом (1) принимает вид

$$u(r, z) = \sum_{n=1}^N |u_n| \exp(i\varphi_n); \quad \varphi_n = h_n r + \theta_n + \chi_n. \quad (4)$$

Рассмотрим сечение волновода вертикальной плоскостью, проходящей через начало координат  $r=0$ . В точках, где поле обращается в нуль, справедливы равенства

$$\operatorname{Re} u(r, z) = 0; \quad \operatorname{Im} u(r, z) = 0, \quad (5)$$

каждое из них в плоскости  $(r, z)$  определяет линию, на пересечении которых и появляются нули поля.

Равенства (5) эквивалентны условию

$$|u(r, z)|^2 = \sum_{m,n} |u_n| |u_m| \cos \varphi_{nm} = 0, \quad (6)$$

где обозначено  $\varphi_{nm} = \varphi_n - \varphi_m$ .

Рассмотрим вначале простейший случай  $N=2$ , когда в волноводе распространяются две моды. Уравнение (6) в этом случае принимает вид или

$$u_1^2 + u_2^2 + 2|u_1||u_2| \cos \varphi_{12} = 0, \quad (7)$$

$$(|u_1| - |u_2|)^2 + 2|u_1||u_2|(1 + \cos \varphi_{12}) = 0. \quad (8)$$

Уравнение (8) эквивалентно системе из двух уравнений

$$\begin{cases} |u_1(z)| = |u_2(z)|, & (9a) \\ \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = -1, & (9b) \end{cases}$$

имеющей ясный физический смысл: полное поле обращается в нуль, если модули двух комплексных составляющих равны между собой (9а), а аргументы противоположны (9б). Из системы (9) следует, что нули поля расположены в плоскости  $(r, z)$  на пересечении горизонтальных прямых  $z = z^* = \text{const}$ , где  $z^*$  — решения уравнения (9а), и вертикальных отрезков, определяемых условием (9б)

$$r = -(\theta_{12} + \chi_{12}(z))/h_{12} + 2\pi K/h_{12}, \quad (10)$$

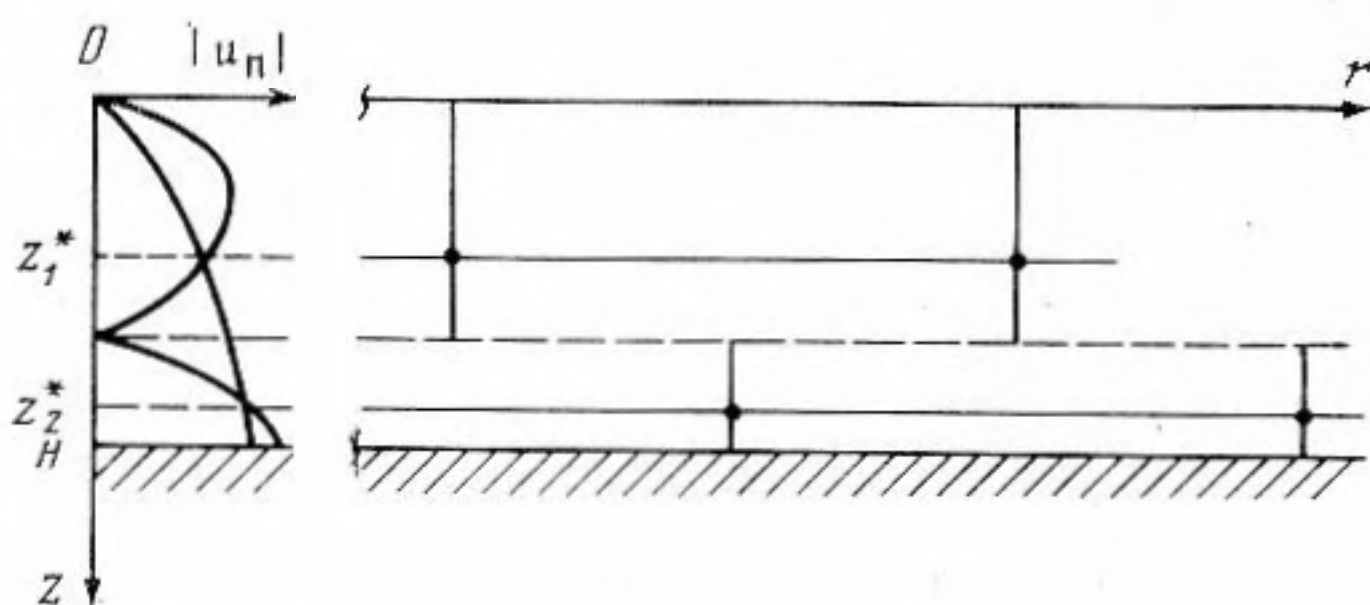
где  $\chi_{12} = \pi[1 - \operatorname{sign}(u_1 u_2)]/2$ , а  $K$  — произвольное целое число. На фиг. 1 показано положение нулей поля в сечении волновода в случае, когда уравнение (9а) имеет два решения  $z_1^*$  и  $z_2^*$  (графическое решение (9а) показано на фигуре слева), каждое из которых порождает ряд нулей поля, отстоящих друг от друга по горизонтали на расстояние  $D = 2\pi/h_{12}$ , а расстояние по  $r$  между ближайшими нулями, находящимися на разных

горизонтах, равно  $D/2$ . Уравнение линий равных фаз  $\Phi(r, z) = \Phi_0 = \text{const}$  с учетом (3) можно представить в виде

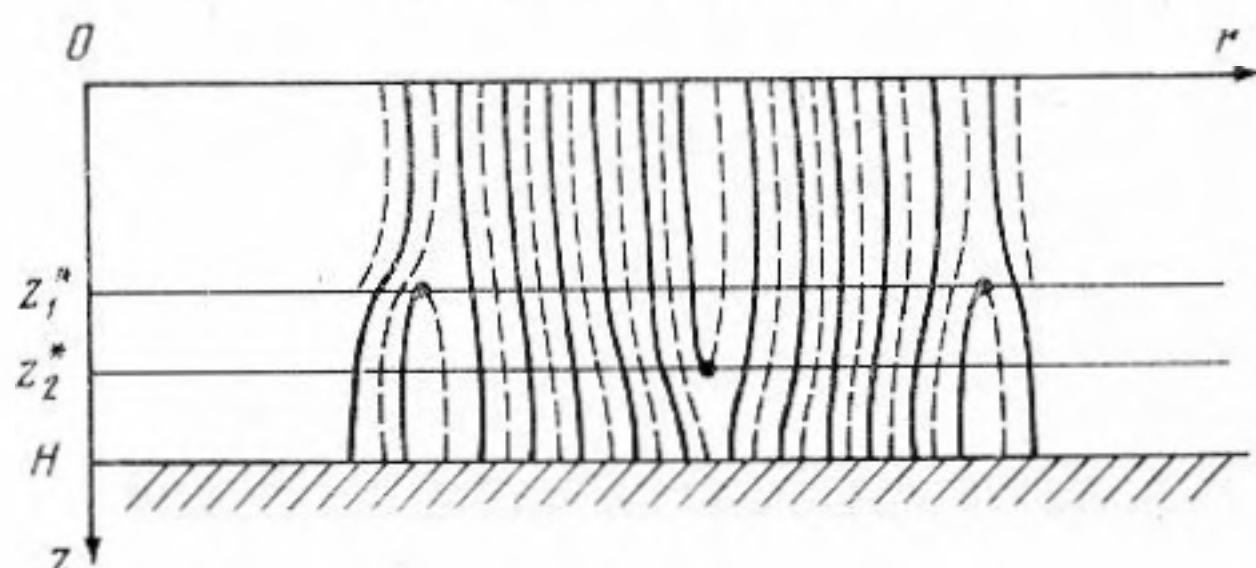
$$\frac{u_2(z)}{u_1(z)} = - \frac{\sin(h_1 r + \theta_1 - \Phi_0)}{\sin(h_2 r + \theta_2 - \Phi_0)}, \quad (11)$$

где, однако, значения  $\Phi_0$  и  $\Phi_0 + \pi$  неразличимы. Чтобы восстановить однозначность, следует принять во внимание, что при прохождении линии равной фазы через нуль поля значение фазы скачком меняется на  $\pi$  (в самой особой точке фаза не определена).

Картину линий равных фаз проиллюстрируем на простейшем примере волновода с абсолютно жестким дном глубины  $H$ , в котором распрост-



Фиг. 1. Положение нулей поля в сечении волновода при распространении двух мод



Фиг. 2. Дислокации линий равных фаз в сечении волновода при распространении двух мод

раняются две моды, так что  $u_1(z) = a_1 \sin(\pi z/2H)$ ,  $u_2(z) = a_2 \sin(3\pi z/2H)$ . Длина волны  $\lambda$  такова, что  $H = 8\lambda$ , при этом  $D = 2\pi/h_{12} = 15,3\lambda$  (при таком выборе параметров на расстоянии  $D/2$  между соседними дислокациями укладывается небольшое число длин волн и картина становится более наглядной). Кроме того, примем  $a_2/a_1 = 2$ , так что (9а) имеет два решения  $z_1^* = 0,58H$  и  $z_2^* = 0,77H$ . На фиг. 2 в соответствии с уравнением (11) изображены линии равных фаз при указанных параметрах на некотором участке волновода протяженностью  $\approx D$ . Сплошные линии соответствуют значениям  $\Phi_0 = 0, 2\pi, \dots$ , а пунктирные —  $\Phi_0 = \pi, 3\pi, \dots$ .

Существование дислокаций линий равных фаз в волноводе становится особенно понятным, если рассмотреть поведение фазы  $\Phi$  как непрерывной функции расстояния  $r$  при фиксированном горизонте  $z$ . Пусть на некотором горизонте  $z$  справедливо соотношение  $|u_1(z)| > |u_2(z)|$ . Тогда, выделяя в (1) общий фазовый множитель  $\exp[i(h_1 r + \theta_1)]$ , можно представить (3) в эквивалентной форме

$$\Phi(r, z) = h_1 r + \theta_1 - \text{arctg} \frac{u_2(z) \sin(h_{12} r + \theta_{12})}{u_1(z) + u_2(z) \cos(h_{12} r + \theta_{12})}; \quad |u_1| > |u_2|. \quad (12)$$

Равенство (12) имеет ту особенность, что оно определяет фазу  $\Phi$  как непрерывную функцию координаты  $r$  и не содержит неопределенности типа  $\pi K$ , свойственной формуле (3), благодаря тому, что знаменатель аргу-

мента арктангенса ни при каких  $r$  на данном горизонте  $z$  не обращается в нуль.

Аналогично для тех  $z$ , для которых  $|u_1| < |u_2|$ , имеем

$$\Phi(r, z) = h_2 r + \theta_2 + \operatorname{arctg} \frac{u_1(z) \sin(h_{12} r + \theta_{12})}{u_2(z) + u_1(z) \cos(h_{12} r + \theta_{12})}; \quad |u_1| < |u_2|. \quad (13)$$

Поскольку в (12) и (13) значения арктангенса по абсолютной величине строго меньше  $\pi/2$ , то средняя скорость роста фазы с расстоянием при фиксированном  $z$  определяется величиной  $h_1$  либо  $h_2$  в зависимости от того, какая мода превалирует по амплитуде на данном горизонте. В рассмотренном примере (фиг. 2)  $|u_1| > |u_2|$  в слое  $z_1^* < z < z_2^*$ , поэтому здесь фаза растет в среднем как  $h_1 r$ , а вне этого слоя — как  $h_2 r$ , так что на расстоянии  $D = 2\pi/h_{12}$  набегает разность фаз  $2\pi$ , что и приводит к образованию дислокации, наличие которой «сбрасывает» это рассогласование. Как известно [3, 6], в зависимости от топологической структуры поля дислокациям можно приписать различный знак, соответствующий увеличению или уменьшению фазы на  $2\pi$  при обходе нуля поля в положительном направлении (против часовой стрелки). На фиг. 2 хорошо видно, что дислокации, соответствующие корню  $z_1^*$ , являются положительными, а корню  $z_2^*$  — отрицательными.

Если в волноводе распространяются три моды ( $N=3$ ), картина становится более сложной. Из-за того что пространственные периоды межмодовых биений  $D_{nm} = 2\pi/h_{nm}$ , вообще говоря, несоизмеримы, распределение нулей поля в сечении волновода не будет периодическим по  $r$ , как в случае  $N=2$ . Считая поле трех мод состоящим из двух компонент — суммы двух мод ( $n=1, 2$ ) и третьей моды ( $n=3$ ) — по аналогии с (9) получим систему, определяющую положение нулей поля трех мод:

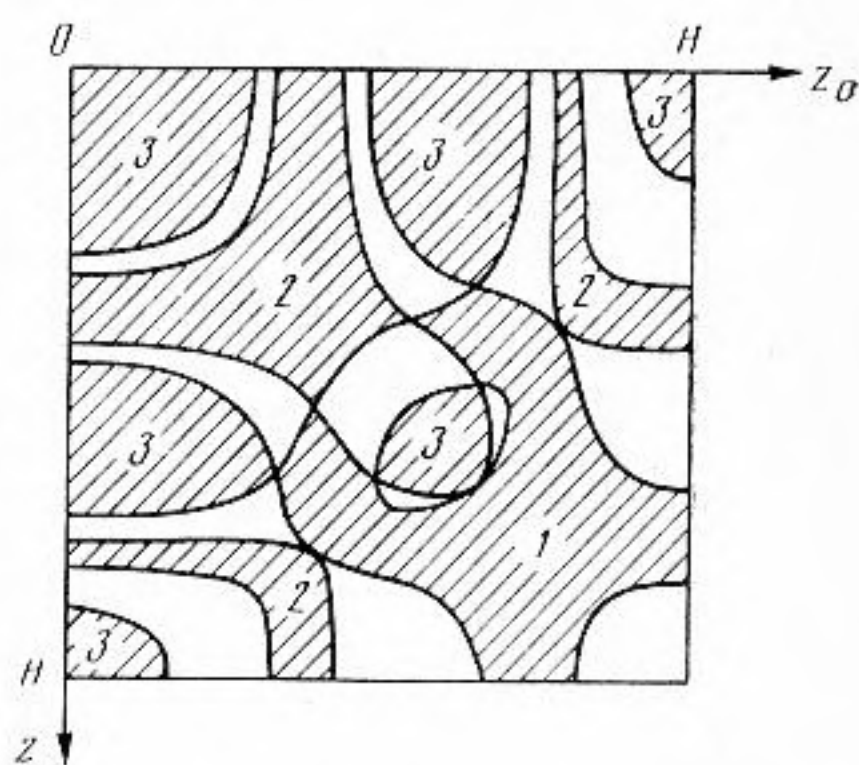
$$\begin{cases} |u(r, z)| = |u_3(z)|, & (14a) \\ \cos[\Phi(r, z) - \varphi_3] = -1, & (14b) \end{cases}$$

где  $|u(r, z)|$  — амплитуда поля суммы двух мод, даваемая левой частью уравнения (7), а  $\Phi(r, z)$  — фаза (12), (13). Систему (14) запишем в следующем виде:

$$\begin{cases} u_3^2(z) - u_1^2(z) - u_2^2(z) = 2u_1(z)u_2(z)\cos(h_{12}r + \theta_{12}), & (15a) \\ \Phi(r, z) - (h_3 r + \theta_3) = -\chi_3(z) + \pi + 2\pi K, \quad K=0, 1, \dots & (15b) \end{cases}$$

Не останавливаясь здесь подробно на исследовании системы уравнений (15), укажем лишь, что уравнение (15а) дает систему кривых, периодичных по  $r$  с периодом  $D_{12}$ , в то время как (15б) определяет кривые, подобные линиям равных фаз  $\Phi(r, z) = \text{const}$  на фиг. 2 (с заменой  $h_n$  на  $h_{n3}$  и  $\theta_n$  на  $\theta_{n3}$ ,  $n=1, 2$ ), с тем отличием, что из-за скачкообразного характера  $\chi_3(z)$  линии терпят разрыв на горизонтах, соответствующих нулям функции  $\psi_3(z)$ .

Из системы уравнений (15) видно, что при заданных амплитудах  $a_n$  в волноводе существуют области, в которых не могут находиться нули поля. По вертикальной оси  $z$  это те интервалы, для которых не выполнены неравенства треугольника между величинами  $|u_n(z)|$  с  $n=1, 2, 3$ , поскольку уравнение (15а) при этом не может выполняться. Напротив, в тех ин-

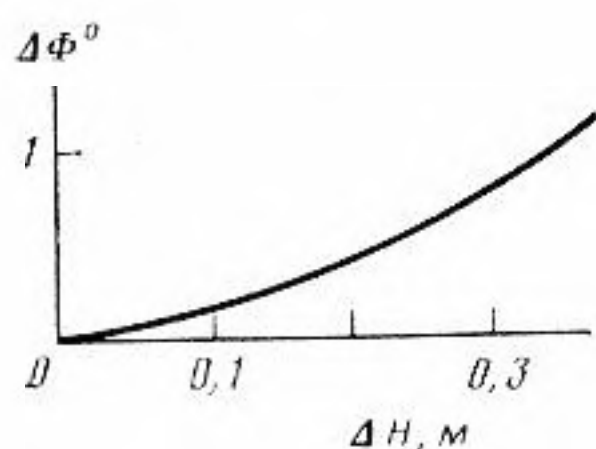


Фиг. 3. Области, где дислокации отсутствуют (выделены штриховкой), в пространстве параметров  $(z, z_0)$  при распространении трех мод

тервалах  $z$ , где неравенства треугольника выполнены,

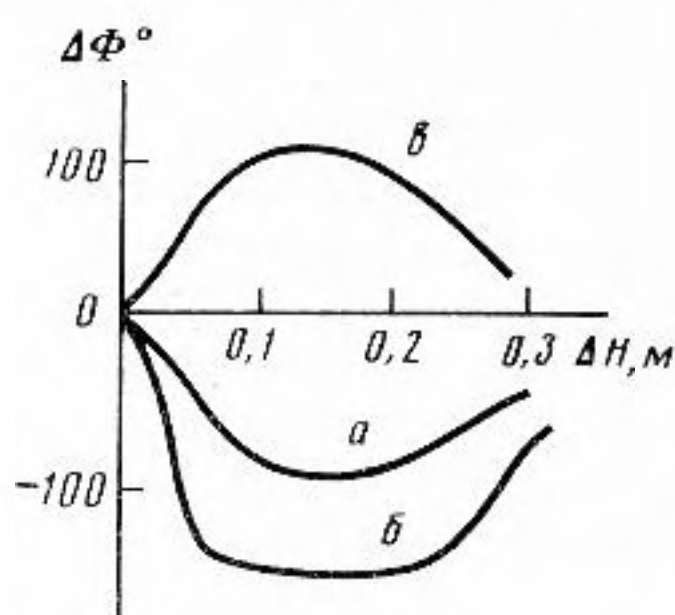
$$|u_3(z)| < |u_1(z)| + |u_2(z)| \quad (16)$$

и аналогичные с циклической перестановкой индексов, как раз и находят-ся нули поля. Проиллюстрируем это на модельном примере, когда соб-ственные функции  $\psi_n(z)$  ( $n=1, 2, 3$ ) выражаются формулой  $\psi_n(z) = \sin \alpha_n z$ ,  $\alpha_n = \pi(n-1/2)/H$ , как для волновода с абсолютно жестким дном глубины  $H$ , а амплитуды возбуждения выбраны соответствующими точеч-ному источнику, помещенному на глубине  $z_0$ :  $a_n = \text{const} \cdot \sin \alpha_n z_0$ . В итоге все три амплитуды  $a_n$  зависят от одного параметра  $z_0$ . На фиг. 3 заштри-хованные области соответствуют тем горизонтам  $z=z(z_0)$ , где амплитуда моды с указанным на фигуре номером превышает по абсолютной величине



Фиг. 4

Фиг. 4. Зависимость разности фаз, измеряемой гидрофонами  $\Delta\Phi$ , от вы-соты прилива  $\Delta H$  в области, где дислокаций нет



Фиг. 5

Фиг. 5. Зависимость разности фаз  $\Delta\Phi$  от высоты прилива  $\Delta H$  вблизи дислокации:  $a$  — антенна на дне,  $b$  — 6 м от дна,  $в$  — 9 м от дна волновода

сумму амплитуд двух других мод, и нулей поля нет. Напротив, в неза-штрихованных областях выполняются неравенства (16) и на этих интер-валах  $z$  и находятся нули поля.

По оси  $r$  также существуют интервалы, где нули поля отсутствуют. Это следует из (15б) и (12) — (13). Пусть, например, на некотором участке оси  $z$  выполнено условие  $|u_1(z)| > |u_2(z)|$ . Тогда из (12) следует, что  $|\Phi - h_1 r - \theta_1| < \pi/2$ . Поэтому (15б) может выполняться на интервалах  $r_k - \pi/2h_{13} < r < r_k + \pi/2h_{13}$ , где  $r_k = (\theta_{13} + \chi_3 - \pi)/h_{13} + 2\pi K/h_{13}$ ,  $K=0, 1, \dots$ . Та-ким образом, по оси  $r$  участки длиной  $\pi/h_{13}$ , где не могут быть нули поля, чередуются с участками такой же длины, где находятся нули поля. Для горизонтов, где  $|u_1(z)| < |u_2(z)|$ , картина та же, только длина интервала, где нет нулей, равна  $\pi/h_{23}$ .

Нетрудно оценить максимальное число дислокаций  $\nu_{\max}$  на единицу длины волновода. Пусть распространяются только две моды с номерами  $n=1$  и  $n=N$ . Тогда нули поля находятся из системы типа (9). Макси-мальное число решений (9а) равно  $2(N-1)$ , а период по  $r$  равен  $2\pi/h_{1N}$ , откуда

$$\nu_{\max} = (N-1)h_{1N}/\pi. \quad (17)$$

Очевидно, что добавление поля остальных мод с номерами  $1 < n < N$  не увеличит это число.

Флуктуации океана приводят к перемещению дислокаций в простран-стве. Поскольку градиент фазы в окрестностях дислокаций растет, ампли-туда флуктуаций фазы может существенно различаться в зависимости от того, насколько близко к дислокации расположена приемная антенна. В качестве примера приведем результаты численного эксперимента с па-раметрами, весьма часто встречающимися в реальных условиях. Изме-нение уровня океана под влиянием прилива было взято в качестве основного эффекта, приводящего к изменению постоянных распространения и пере-мещению нулей поля. Была использована простейшая модель волновода

с абсолютно жестким дном, в котором распространяются четыре моды с номерами  $n=1, \dots, 4$ . При расчетах было принято, что глубина волновода 200 м, длина волны  $\lambda=15$  м. Величина прилива  $\Delta H$  менялась от нуля до 0,3 м. Изменялась разность фаз между двумя «гидрофонами»  $\Delta\Phi$ , расположенными на одинаковой глубине  $z_A$  и разнесенными вдоль направления распространения волны на 50 м. В первом случае (фиг. 4), когда «антенна» находилась в области волновода, где дислокаций нет, величина  $\Delta\Phi \sim 1^\circ$ . В другом случае (фиг. 5), когда «антенна» находилась вблизи дислокации (нуль поля при этом был на глубине  $\approx 6$  м от дна), так что по мере прилива нуль поля перемещался над (фиг. 5, а, б) или под (фиг. 5, в) «антенной»,  $\Delta\Phi$  становится порядка  $\sim 150^\circ$ .

Таким образом, в многомодовых волноводах существование интерференционных нулей поля и дислокаций фазового фронта является скорее правилом, а не исключением. Характерно, что дислокации распределены неравномерно по сечению волновода: существуют области, зависящие от амплитуд возбуждения мод, в которых нулей поля нет. Плотность дислокаций дается формулой (17). Из-за флуктуаций среды, в частности приливных возмущений океана, дислокации перемещаются в пространстве, причем, как показывают численные расчеты в приведенном выше примере, нуль поля движется практически горизонтально (при изменении уровня океана на 0,3 м нуль поля перемещается на  $\sim 150$  м по  $r$ ). Изменение фазы, вызванное приливом, носит существенно различный характер в зависимости от того, проходит ли дислокация вблизи антенны либо вдали от нее, и поэтому при интерпретации результатов измерения фазы в волноводе необходимо учитывать возможную близость дислокаций.

Авторы глубоко признательны Б. Я. Зельдовичу за деловые замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Nye J. F., Berry M. N. Dislocations in wave trains // Proc. Roy. Soc. London. 1974. V. A336. P. 165–190.
2. Nye J. F. The motion and structure of dislocation in wavefront // Proc. Roy. Soc. London. V. A378. P. 219–239.
3. Баранова Н. Б., Зельдович Б. Я. Дислокации поверхностей волнового фронта и нули амплитуды // ЖЭТФ. 1981. Т. 80. № 5. С. 1789–1797.
4. Баранова Н. Б., Зельдович Б. Я., Мамаев А. В. и др. Исследование плотности дислокаций волнового фронта световых полей со спекл-структурой // ЖЭТФ. 1982. Т. 83. № 5. С. 1701–1710.
5. Абдуллаев С. С., Заславский Г. М. Спекл-структура оптического поля в многомодовых волноводах // Квантовая электрон. 1987. № 7. С. 1475–1484.
6. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979. С. 760.

Институт общей физики  
Академии наук СССР

Поступила в редакцию  
26.V.1988