АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXV 1989 Вып. 4

УДК 534.13

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ КРУГЛЫХ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ПЛАСТИН КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

Ивина Н.Ф.

Методом конечных элементов выполнен анализ симметричных колебаний пьезопластин: спектров собственных частот в режимах резонанса и антирезонанса, динамического коэффициента электромеханической связи (ДКС) и форм колебаний в большом диапазоне изменения геометрических размеров пластин. Определены оптимальные геометрические размеры, при которых достигается максимальное значение ДКС. Рассмотрены особенности спектров собственных частот для пьезокерамики различных составов и дана классификация пьезокерамики с учетом этих особенностей.

В современной акустической аппаратуре широко используются круглые пьезокерамические пластины и стержни соизмеримых размеров, для которых одномерная модель колебаний неприменима. В рамках одномерной теории невозможно описать зависимость резонансных частот толщинных колебаний от радиуса пластины, влияние формы электродов на спектр собственных частот, явление краевого резонанса.

Спектр собственных частот круглых пластин произвольных размеров в изотропном приближении рассмотрен в монографии [1], где указано на сложный характер толщинных колебаний и исследовано явление краевого резонанса. Зависимость спектра собственных частот круглой анизотропной пластины от геометрических размеров представлена в [2]. В монографии [3] вариационным методом получены зависимости восьми низших резонансных частот пьезопластины от геометрических размеров (в небольшом диапазоне их изменения). Осесимметричные колебания пьезопластин и стержней конкретных размеров рассмотрены в статье [4] методом конечных элементов (МКЭ) с учетом только одной компоненты электрического поля для трех низших мод.

Цель данной работы — анализ симметричных колебаний пьезопластин: определение спектров собственных частот в режимах резонанса и антирезонанса, распределения смещений на излучающей поверхности (форм колебаний) и ДКС в большом диапазоне изменения геометрических размеров пластин, оптимальных геометрических размеров, при которых достигается максимальное значение ДКС; исследование особенностей спектров собственных частот для пьезокерамики различных составов и классификация пьезокерамики с учетом этих особенностей.

Для этой цели применен весьма универсальный МКЭ с учетом двух компонент электрического поля, что позволяет получить более точные результаты для пластин произвольных размеров, чем в статье [4] и, кроме того, исследовать собственные колебания пластин при их частичном покрытии осесимметричными кольцевыми электродами. Основные соотношения МКЭ для анализа колебаний твердого тела без учета пьезоэффекта изложены в монографии [5]. Колебания пьезоэлектрического резонатора произвольной формы в МКЭ описываются линейной системой алгебраических уравнений [6, 7]

$$\begin{vmatrix} K_{uu}-\omega^2 M & K_{uv} \\ K_{uv}^T & K_{vv} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_i \\ V \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ Q \end{vmatrix} \qquad (1)$$

где K_{uu}, M, K_{uv}, K_{vv} — глобальные матрицы жесткости, массы, пьезоэлектрической и диэлектрической жесткости, K_{uv}^T — транспонированная матрица; ω — круговая частота; $|u_i|$ — вектор узловых смещений, определяющий форму колебания; V, Q — напряжение и заряд пьезорезонатора. Глобаль-

ные матрицы формируются из соответствующих элементных матриц, в которых учтены упругие, пьезоэлектрические и диэлектрические постоянные керамики, по обычной методике МКЭ [5, 6]. Матрицы в системе (1) имеют поправки за счет исключения внутренних, не связанных с электродами узловых потенциалов.

В системе (1) учтены следующие граничные условия: отсутствие механических напряжений на поверхности пьезорезонатора; отсутствие нормальной компоненты индукции на поверхностях, не покрытых электродами; эквипотенциальность электродов.

Режим резонанса определяется равенством нулю электрического импеданса. Резонансные частоты (собственные значения) и формы колебаний (собственные векторы), определяются следующей матричной задачей ($V=0$): $|K_{uu}-\omega^2 M||u_i|=0$.

Режим антирезонанса определяется равенством нулю электрической проводимости, что приводит к матричной задаче ($Q=0$): $|K_{uu}-K_{uv}K_{uv}^T/ /K_{vv}-\omega^2 M||u_i|=0$, определяющей частоты антирезонанса.

Одной из основных характеристик пьезоэлектрических материалов является коэффициент электромеханической связи. Он характеризует преобразование энергии в пьезоэлектрическом материале лучше, чем набор упругих, пьезоэлектрических и диэлектрических констант, и, например, ширина полосы преобразователя непосредственно зависит от соответствующего коэффициента связи. Коэффициент электромеханической связи можно вычислить по определению [8]

$$k=k_1(1+k_1)^{-1/2};\ k_1^2=E_{em}/E_mE_e, \tag{2}$$

где E_{em} — взаимная энергия, E_m — механическая энергия, E_e — электрическая энергия. Статические коэффициенты связи определяются через константы пьезокерамики выражением (2) в приближении однородной деформации по известным соотношениям [8, 9]. ДКС зависит от распределения механических напряжений по объему пьезоэлемента и поэтому зависит от типа колебания и геометрических размеров пьезоэлемента. Зная собственные векторы и собственные числа, можно определить составляющие полной энергии колебаний (2) и ДКС [6]

$$k_1^2=\frac{(|u_i||K_{uv}|)^2}{\omega^2|u_i||M||u_i|K_{vv}}.$$

Выбором оптимальных геометрических размеров можно получить максимальное значение ДКС для конкретной моды колебаний.

Разработанный на основе МКЭ пакет прикладных программ, в котором использованы треугольные и прямоугольные кольцевые конечные элементы второго порядка, позволяет анализировать собственные колебания пьезопреобразователей любой осесимметричной формы, состоящих из пьезоактивных и пассивных элементов при любом типе поляризации и произвольной форме осесимметричных электродов. Пакет программ проверен по известным частным результатам и экспериментальным данным [7, 9].

Рассмотрим пульсирующие симметричные по толщине колебания круглой конечной пьезопластины, плоские поверхности которой полностью покрыты электродами. Материал пластины — керамика ЦТБС-3, константы которой приведены в справочнике [9]; толщина пластины $2l$, радиус — a. Спектр собственных частот удобно изображать в координатах $x=k_ta$, $y=k_tl$ (рис. 1); k_t — волновое число, $k_t=\omega/C_t$, C_t — скорость поперечной волны, $C_t^2=C_{44}/\rho$, C_{44} — элемент матрицы упругих постоянных, ρ — плотность пьезокерамики. Размер пластины можно задать безразмерным отношением l/a. Каждый луч, выходящий из начала координат, характеризуется угловым коэффициентом $k'=k_tl/k_ta=l/a$, т. е. соответствует постоянному размеру пластины. При движении по лучу от начала координат значение частотного параметра увеличивается; $l/a\gg1$ — диапазон длинных стержней; $l/a\ll1$ — диапазон тонких пластин. На каждый луч, соответствующий определенному размеру пластины, нанесены одновременно

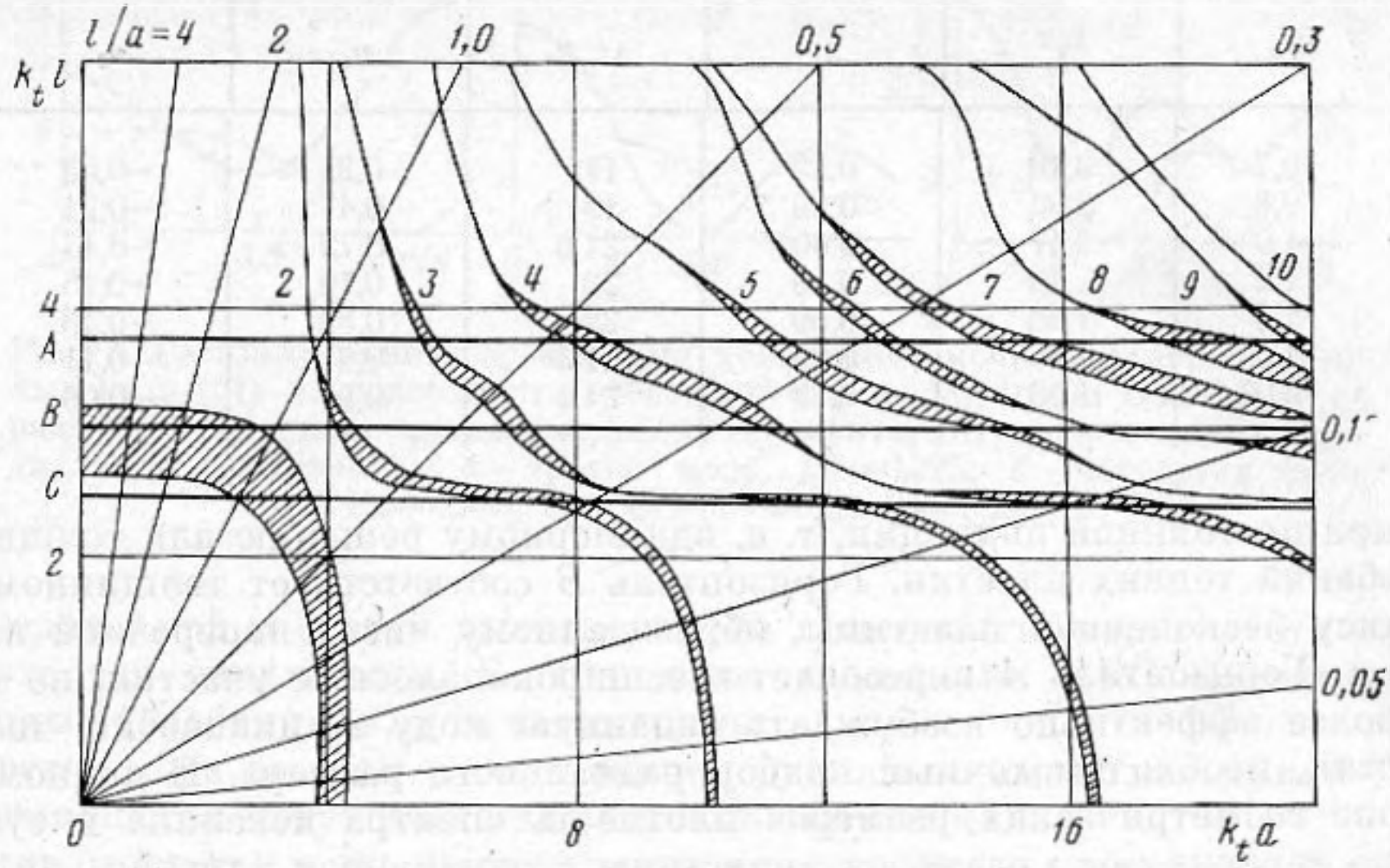

Рис. 1. Спектр собственных частот пьезопластины из керамики ЦТБС-3

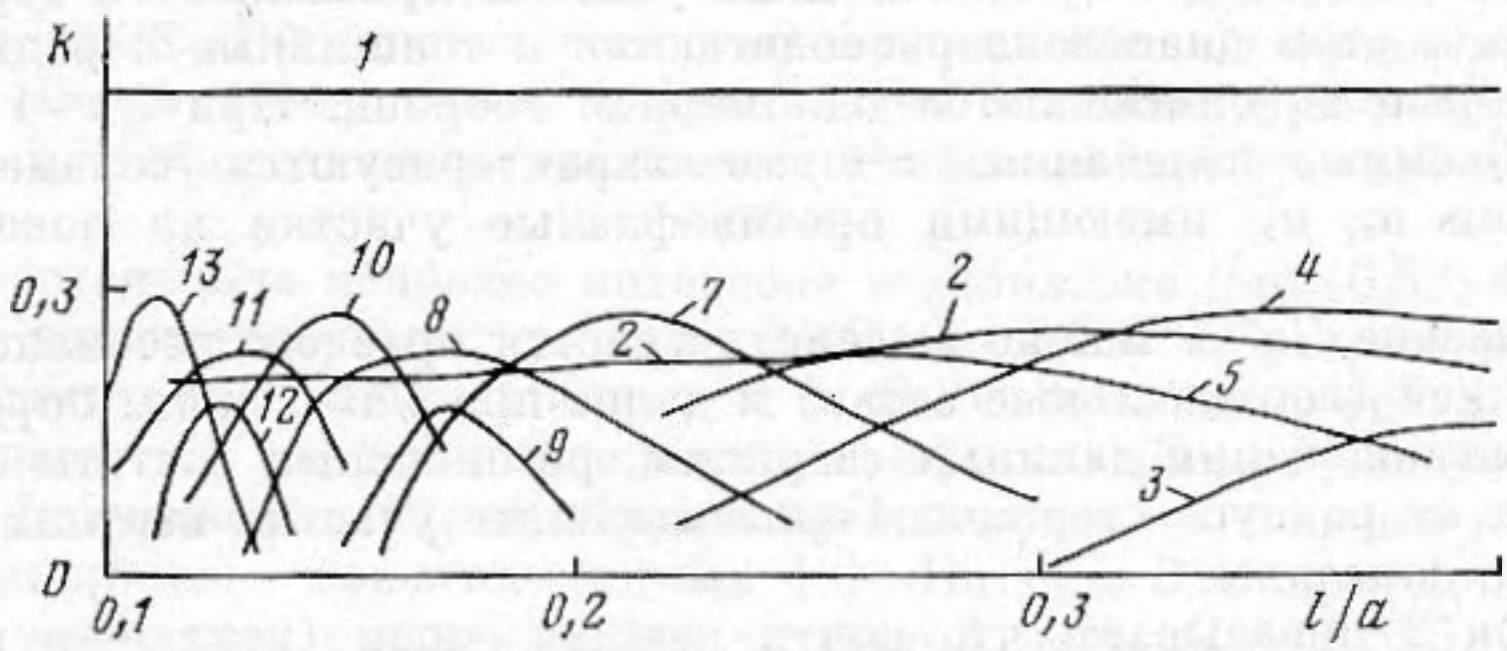

Рис. 2. Зависимость динамического коэффициента электромеханической связи пьезопластины из керамики ЦТБС-3 от размера l/a

частоты резонанса и антирезонанса, диапазон частот между ними заштрихован, номера мод обозначены цифрами. На рис. 2 представлена зависимость ДКС от размера пластины l/a для тринадцати низших мод.

Общий вид спектра дает представление о плотности спектра для любых размеров пластины и о расположении широкополосных участков. Наиболее широкополосные участки для каждой моды соответствуют максимуму ДКС данной моды на рис. 2. Таким образом, пьезоэлектрическим эффектом возбуждаются далеко не все кинематически допустимые формы колебаний механически свободного резонатора. Заштрихованные области (пьезоактивные участки) определяют ветви спектра, которые возбуждаются пьезоэффектом в резонаторе со сплошными электродами. Из всех мод, имеющих большой ДКС, основной интерес представляют моды с синфазным распределением осевой компоненты смещения на излучающей поверхности.

Спектр можно разделить на следующие характерные участки. Вертикальные участки ($l/a \ll 1$) соответствуют радиальным колебаниям тонких пластин (радиальная компонента смещения значительно больше осевой компоненты $u_r \gg u_z$, резонансные частоты не зависят от толщины пластины).

При увеличении толщины пластины ветви высших мод, расположенные около горизонтали C, соответствуют краевым резонансам пластин, эти участки мод возбуждаются слабо, ДКС невелик. Широкополосные участки высших мод расположены в основном между двумя горизонталями A и B. Горизонталь A соответствует толщинному антирезонансу тонкой свободной пластины $2k^D l = \pi$, k^D — волновое число продольной вол-

l/a	$k_t a$	k	Δf, %	u_1	u_2
0,7	3,10	0,58	17	0,35	−0,63
0,8	2,88	0,59	19	0,47	−0,21
1,0	2,47	0,60	21,5	0,72	−0,17
1,2	2,13	0,59	22	0,79	−0,15
1,4	1,86	0,59	22	0,82	−0,13
1,6	1,65	0,59	21,5	0,91	−0,11
2,0	1,33	0,59	21,5	0,97	−0,09

ны при постоянной индукции, т. е. одномерному решению для толщинных колебаний тонких пластин. Горизонталь B соответствует толщинному резонансу бесконечной пластины, образованному чисто поперечной волной $k_t l=\pi$. Горизонталь A пересекает все широкополосные участки, но чтобы наиболее эффективно возбуждать заданную моду в диапазоне толстых пластин, необходим точный подбор радиального размера. В данном диапазоне геометрических размеров плотность спектра невелика и существенно зависит от размеров пластины; одномерная теория толщинных колебаний дает большую погрешность определения собственных частот. Для высших мод широкополосные участки примыкают к горизонтали A, т. е. в этом диапазоне располагаются и толщинные и радиальные моды, которые не описываются одномерной теорией. При $l/a\approx1$ формируются объемные колебания, которые характеризуются соизмеримыми смещениями u_r, u_z, имеющими противофазные участки на поверхности резонатора.

В диапазоне $l/a>1$ можно выделить участок краевого резонанса длинных стержней (вертикальные ветви) и далее при $l/a>1$ моды определяют продольные колебания длинных стержней, резонансные частоты которых не зависят от радиуса стержня. Горизонтальные участки высших мод на рисунке не показаны.

Рисунок 2 показывает, что почти каждая мода (исключая первую) имеет максимум ДКС при определенном — оптимальном размере, при котором мода возбуждается наиболее эффективно. Высокий ДКС достигается в том случае, если распределение возбуждающего электрического поля соответствует типу собственных колебаний, причем это соответствие должно быть не только на поверхности пьезопластины (эквипотенциальных электродах), но и во всем объеме пластины.

Рассмотрим подробнее диапазон первой моды. При увеличении толщины пластины тип колебаний изменяется от радиальных колебаний тонких пластин к объемному резонансу и далее к продольным колебаниям длинных стержней. Во всем диапазоне изменения размеров сохраняется высокий ДКС, порядка 0,5—0,6; по данным [9], планарный коэффициент связи $k_p=0{,}45$, коэффициент связи продольных колебаний $k_{33}=0{,}6$. При $l/a>0{,}8$ на излучающей поверхности преобладает осевая компонента, которая монотонно спадает к краю стержня. В таблице приводятся зависимости от геометрических размеров пластины: безразмерной первой частоты ($k_t a$), ДКС (k), относительной полосы частот, определенной по частотам резонанса и антирезонанса (Δf, %), отношения амплитуды осевой компоненты смещения при $r=a$ к амплитуде при $r=0$ (u_1), отношения амплитуды радиальной компоненты смещения при $r=a$ к амплитуде осевой компоненты при $r=0$ (u_2). Распределение компонент смещения по радиусу пластины для первой моды довольно монотонное, поэтому нормированное значение осевого и радиального смещения на краю пластины достаточно точно характеризует равномерность распределения смещений. Приведенные в таблице результаты позволяют выбрать размер пластины для заданной частоты.

Вторая мода имеет довольно большой ДКС, но распределение смещений на поверхности резонатора противофазное, изменяют знак обе компоненты смещения. Такая мода будет плохо излучаться в нагрузку. При изменении размера пластины $l/a\in(0,1;\ 2)$ изменяется только соотноше-

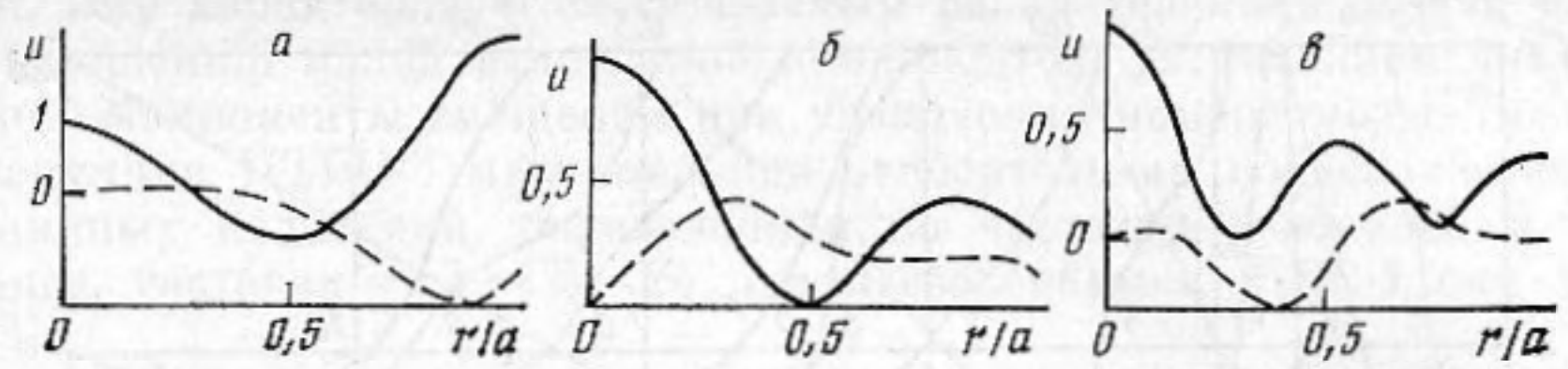

Рис. 3. Распределение безразмерных компонент смещения (нормированных на $u_z(0)$) на поверхности пьезопластины из керамики ЦТБС-3 по ее радиусу (сплошная линия – осевая компонента, штриховая линия – радиальная компонента): *а* – третья мода, $l/a=0{,}225$; *б* – четвертая мода, $l/a=0{,}325$; *в* – седьмая мода, $l/a=0{,}22$

ние радиальной и осевой компонент, обе компоненты могут иметь по одной узловой окружности. В диапазоне максимума ДКС формируются объемные колебания, u_r и u_z соизмеримы.

Третья мода во всем рассмотренном диапазоне имеет невысокий ДКС, обе компоненты могут иметь две узловые окружности.

Вторая, третья и все высшие моды имеют плато – горизонтальные участки, соответствующие краевым резонансам. Отмеченные ранее [1] характерные особенности сохраняются и в пьезоэлектрическом резонаторе; максимальный ДКС достигается в центре каждого плато и уменьшается с увеличением номера моды в следующем порядке: 0,234; 0,144; 0,087. На рис. 3, *а* приведено распределение смещений для третьей моды ($l/a=0{,}225$).

Четвертая мода наиболее интересна в диапазоне $l/a\in(0{,}32;\ 0{,}37)$, этот участок характеризуется высоким ДКС ($k=0{,}28$) и расположен между указанными ранее горизонталями A и B. Осевая компонента смещения преобладает над радиальной и имеет синфазное распределение на излучающей поверхности. Таким образом, можно говорить только о колебаниях типа толщинных – квазитолщинных [8]. На рис. 3, *б* приведено распределение компонент смещения для четвертой моды ($l/a=0{,}325$). Для других размеров ДКС уменьшается, появляется противофазный участок в минимуме u_z.

Пятая мода имеет максимальный ДКС при $l/a\approx0{,}25$, колебания носят объемный характер, компоненты u_z и u_r соизмеримы, компонента u_z имеет противофазные участки на излучающей поверхности. Шестая мода имеет невысокий ДКС во всем диапазоне геометрических размеров.

Седьмая мода имеет высокий ДКС в диапазоне $l/a\in(0{,}21;\ 0{,}24)$ и квазитолщинный характер колебаний – рис. 3, *в* ($l/a=0{,}22$). Компонента u_z имеет синфазное распределение на излучающей поверхности подобно четвертой моде, только увеличивается число осцилляций.

Максимумы ДКС восьмой и девятой мод соответствуют колебаниям с противофазным распределением осевой компоненты смещения на излучающей поверхности.

При уменьшении l/a квазитолщинный характер колебаний формируется также десятой модой в диапазоне $l/a\in(0{,}145;\ 0{,}155)$, ДКС сохраняет прежнее максимальное значение $k=0{,}28$, что хорошо видно на рис. 2. Распределение смещений аналогично седьмой моде, только увеличивается число осцилляций. Следующий максимум ДКС квазитолщинных колебаний соответствует тринадцатой моде при $l/a\in(0{,}11;\ 0{,}12)$. При уменьшении толщины пластины увеличивается число осцилляций, сохраняется синфазность компоненты u_z. Необходимо отметить, что для четвертой и седьмой мод максимум ДКС совпадает с максимумом полосы частот, определенной по частотам резонанса и антирезонанса, и выполняется соответствие между ДКС и полосой, предусмотренное одномерной моделью. В районе квазитолщинных резонансов десятой и тринадцатой мод такого соответствия нет, так как очень велика плотность спектра. Чтобы реализовать максимальную полосу толщинных колебаний и избежать влияния соседних радиальных резонансов, необходим точный подбор радиального размера. Размер, при котором достигается максимальный ДКС толщин-

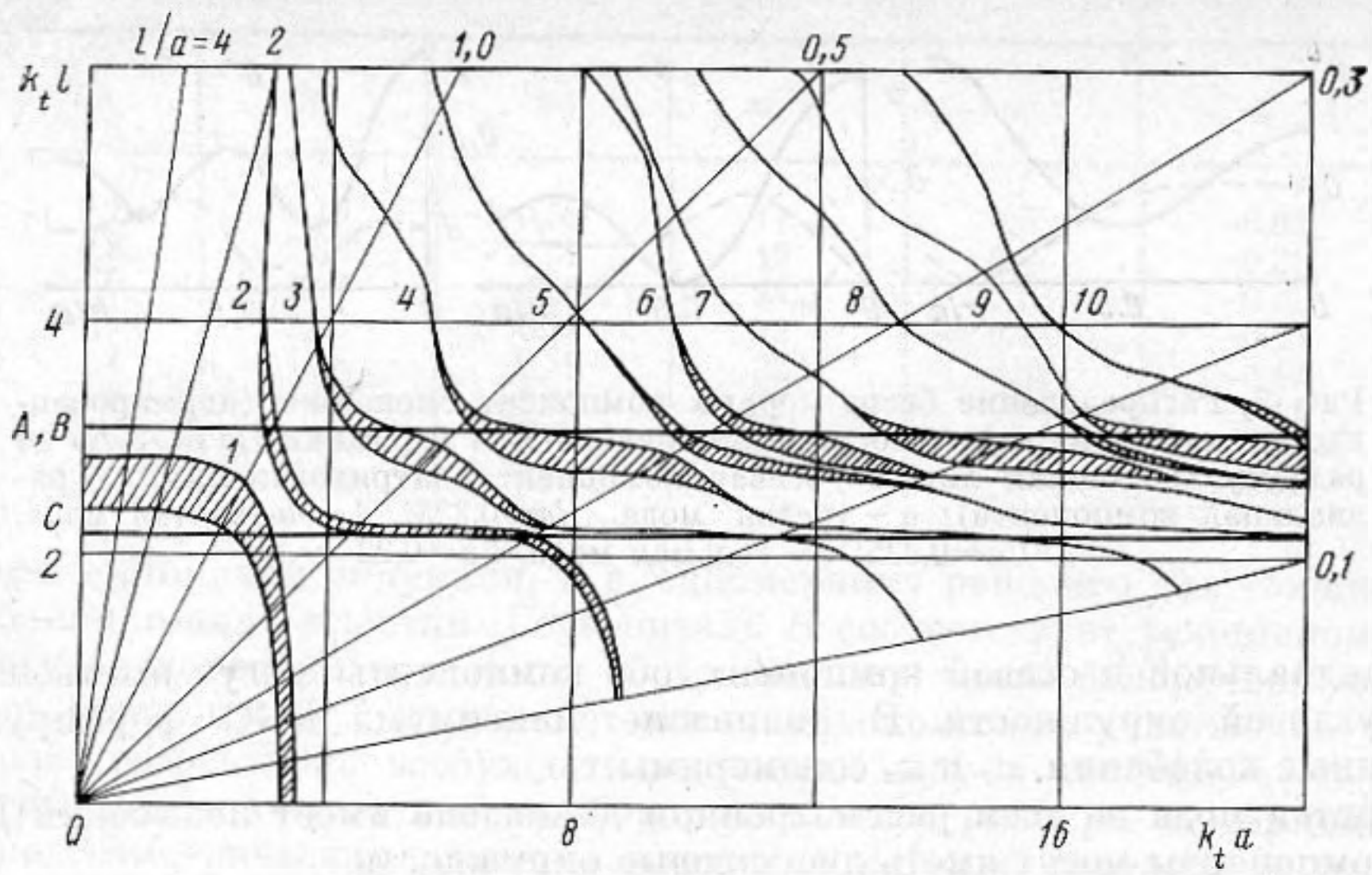

Рис. 4. Спектр собственных частот пьезопластины из керамики НБС-1

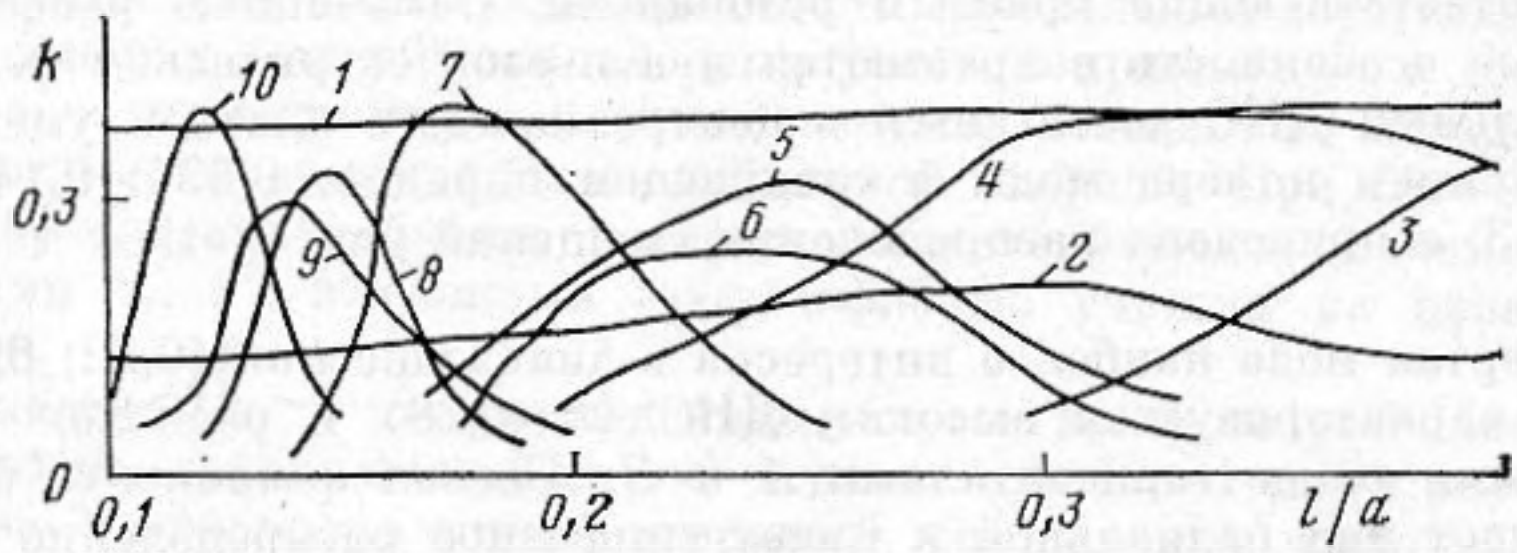

Рис. 5. Зависимость динамического коэффициента электромеханической связи пьезопластины из керамики НБС-1 от размера l/a

ных колебаний, соответствует и минимальным значениям ДКС соседних радиальных мод, т. е. подбор оптимального размера позволяет избежать влияния паразитных радиальных колебаний.

Изложенное выше позволяет сделать следующие выводы о характере собственных колебаний пьезопластин в диапазоне $l/a \in (0,\ 1;\ 2)$.

Колебания поршневого типа формируются только первой модой при $l/a > 1$.

Квазитолщинные колебания формируются четвертой, седьмой, десятой, тринадцатой и последующими модами и имеют максимумы ДКС и полосы частот при определенных — оптимальных размерах. Максимальное значение ДКС квазитолщинных колебаний $k=0{,}28$ меньше статического коэффициента связи толщинных колебаний $k_t=0{,}41$ [9], рассчитанного по одномерной теории.

Для пьезокерамики ЦТБС-3 частота толщинного антирезонанса больше частоты толщинно-сдвигового резонанса, т. е. $A>B$ (рис. 1) и наблюдается сильная зависимость собственных частот от размера пластины. Для пьезокерамики НБС-1 $A \approx B$, что приводит к существенным изменениям в структуре спектра (рис. 4). Если в предыдущем случае широкополосные участки располагались между двумя горизонталями A и B, то в данном случае эти горизонтали практически совпадают ($A=3{,}10$; $B=3{,}14$) и широкополосные участки почти горизонтальны. В этом случае собственные частоты слабо зависят от радиуса пластины даже для толстых пластин, что подчеркивалось в [1] как аномальное поведение спектра. Рисунок 5 показывает, что максимальные значения ДКС у высших квазитолщинных мод больше, чем у керамики ЦТБС-3, хотя ДКС основной моды меньше, чем у ЦТБС-3.

Максимальный ДКС квазитолщинных колебаний $k=0{,}38$ ($k_t=0{,}45$) достигается, как и прежде, четвертой, седьмой, десятой и последующими

модами. Они характеризуются синфазным распределением осевой компоненты смещения, малой радиальной компонентой, увеличением числа осцилляций компоненты смещения при увеличении номера моды. Если для пьезокерамики ЦТБС-3 максимальная относительная полоса частот квазитолщинных колебаний, определенная по частотам резонанса и антирезонанса, составляет 3–4%, то для пьезокерамики НБС-1 она достигает 7%.

Таким образом, рассмотрены два варианта спектров A>B и A≈B. К первому типу относится пьезокерамика следующих составов: ЦТС-19, ЦТС-23, ЦТБС-3, ЦТСНВ-1; ко второму типу: НБС-1, ТБК-3, ТБКС. У пьезокерамики ТБК-3 (A=3,04) и ТБКС (A=2,86, A<B, A≈B) анализ спектра показывает, что он не имеет существенных отличий от спектра керамики НБС-1. Для пьезокерамики первого типа максимальный ДКС в диапазоне конечных пластин можно оценить через статические коэффициенты следующим образом: $k \approx 0{,}5k_{33}$ и $k \approx 0{,}7k_t$, тогда как для пьезокерамики второго типа $k \approx 0{,}7k_{33}$, $k \approx 0{,}8k_t$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 284 с.
2. *Ивина Н. Ф., Касаткин Б. А.* Численный анализ объемных колебаний анизотропного резонатора произвольных размеров // Тез. докл. Всесоюз. конф. «Использование современных физических методов в неразрушающих исследованиях и контроле». Хабаровск: ЦНТИ, 1984. С. 108–109.
3. *Holland R., Eer Nisse E. P.* Design of piezoelectric devices. Cambridge: MIT, 1969. 258 p.
4. *Kagawa Y., Yamabuchi T.* Finite element approach for a piezoelectric circular rod // IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics. 1976. V. 23. № 6. P. 379–385.
5. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 544 с.
6. *Boucher D., Lagier M., Maerfeld C.* Computation of the vibrational modes for piezoelectric array transdusers using a mized finite element-perturbation method // IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics. 1981. V. 28. № 5. P. 318–330.
7. *Балабаев С. М., Ивина Н. Ф.* Собственные колебания пьезокерамических цилиндров произвольных размеров с осевой поляризацией. М.: Деп. в ВИНИТИ 17.12.86. № 8646–В86.
8. *Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г.* Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // Физическая акустика/Под ред. Мезона У. Т. 1. Ч. А. М.: Мир, 1966. С. 204–326.
9. Пьезокерамические преобразователи/Под ред. Пугачева С. И. Л.: Судостроение, 1984. 256 с.

Научно-исследовательский
физико-технический институт
при Дальневосточном государственном университете

Поступила в редакцию
3.V.1988