АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXV 1989 Вып. 4

УДК 534.21

ВЛИЯНИЕ ЛОКАЛЬНОЙ ИНЕРЦИОННОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ НА ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА СЛОЖНЫМИ МЕХАНИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Лебедев А. В.

Исследовано влияние локальной инерционной неоднородности на звукоизлучение механических систем. Определены условия, при которых возможно увеличение резонансной составляющей излучения и ее исчезновение.

Определение уровня излучения звука сложными механическими системами (СМС), т. е. системами с распределенными параметрами [1], совершающими под действием заданной силы колебания в сжимаемой среде, представляет собой сложную самосогласованную задачу [2]. Решение этой задачи на основе традиционных методов (метод конечных элементов, разложение по собственным формам колебаний) требует выполнения большого объема вычислений [2—4]. Кроме того, малые изменения параметров системы, например внесение неоднородностей, могут существенно изменить механические свойства СМС [1, 5], что приводит к необходимости таких расчетов в каждом конкретном случае.

При расчетах характеристик СМС с большим количеством внутренних связей из-за ограниченных возможностей вычислительной техники невозможно учесть все детали рассматриваемой конструкции. В связи с этим возникает вопрос о грубости системы.

Использование статистических методов, существенно упрощающих решение задачи, возможно лишь в случаях, когда резонансы СМС перекрываются [6, 7]. В то же время наибольший интерес представляют случаи резонансного излучения, определяющего максимальные уровни излучения СМС.

В настоящей работе на примере наиболее распространенных на практике инерционных неоднородностей рассмотрена задача о влиянии локальной неоднородности на резонансное излучение СМС [1].

Предположим, что в точке A на систему действует гармоническая сила вида $\mathbf{F}\exp(-i\omega t)$. В точке B локализована неоднородность массы M (рис. 1). Относительно «однородной» ($M=0$) СМС предположим, что вид поверхности S допускает введение ортогональной криволинейной системы координат ($\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{n}$); известна система собственных функций $\{\Psi_j\}$ и собственных частот $\{\omega_j\}$, причем $\omega_{j+1}>\omega_j$; добротности мод велики настолько, что различимы отдельные резонансные отклики; известны акустические импедансы мод — Z_j^{ac}.

В случае малой (критерий малости обсуждается ниже) неоднородности амплитуды смещений в модах определяются выражениями

$$w_j=(w_j^{(0)}+w_j^{(1)})/\omega_c^2,$$
$$w_j^{(0)}=f_j/Z_j, \tag{1}$$

$$w_j^{(1)}=\varkappa_j\Omega^2 Z_j^{-1}\sum_{q\neq j} w_q^{(0)}\,(\psi_q(B),\mathbf{b}_j), \tag{2}$$

[1] Локальность неоднородности не является существенным ограничением общности, поскольку нас интересует резонансная составляющая излучения, которая превышает фоновое излучение в области частот, соответствующей резонансам низших мод [2].

где

$$Z_j=-\Omega^2(1+\mu_j)+\Omega_j^2\left(1-i\left(1+\alpha_j\frac{\Omega}{\Omega_j}\right)Q_j^{-1}\right)$$

$$f_j=(\mathbf{F},\mathbf{a}_j)/m_j(1+\zeta_j),\ \mathbf{a}_j=\mathbf{\Psi}_j(A)/|\mathbf{\Psi}_j(A)|,$$
$$\mu_j=M\mathbf{\Psi}_j^2(B)/m_j(1+\zeta_j)\mathbf{\Psi}_j^2(A),$$
$$\varkappa_j=M/m_j(1+\zeta_j),\ \mathbf{b}_j=\mathbf{\Psi}_j(B)/\mathbf{\Psi}_j^2(A),$$

m_j — массы мод [1], ζ_j — коэффициенты присоединенных масс мод [2], Q_j — добротности колебаний в модах при отсутствии радиационных потерь, α_j — отношение радиационных потерь в модах к потерям в материале СМС, $\Omega=\omega/\omega_c$, ω_c — характерная частота однородной СМС, например, частота низшего тона.

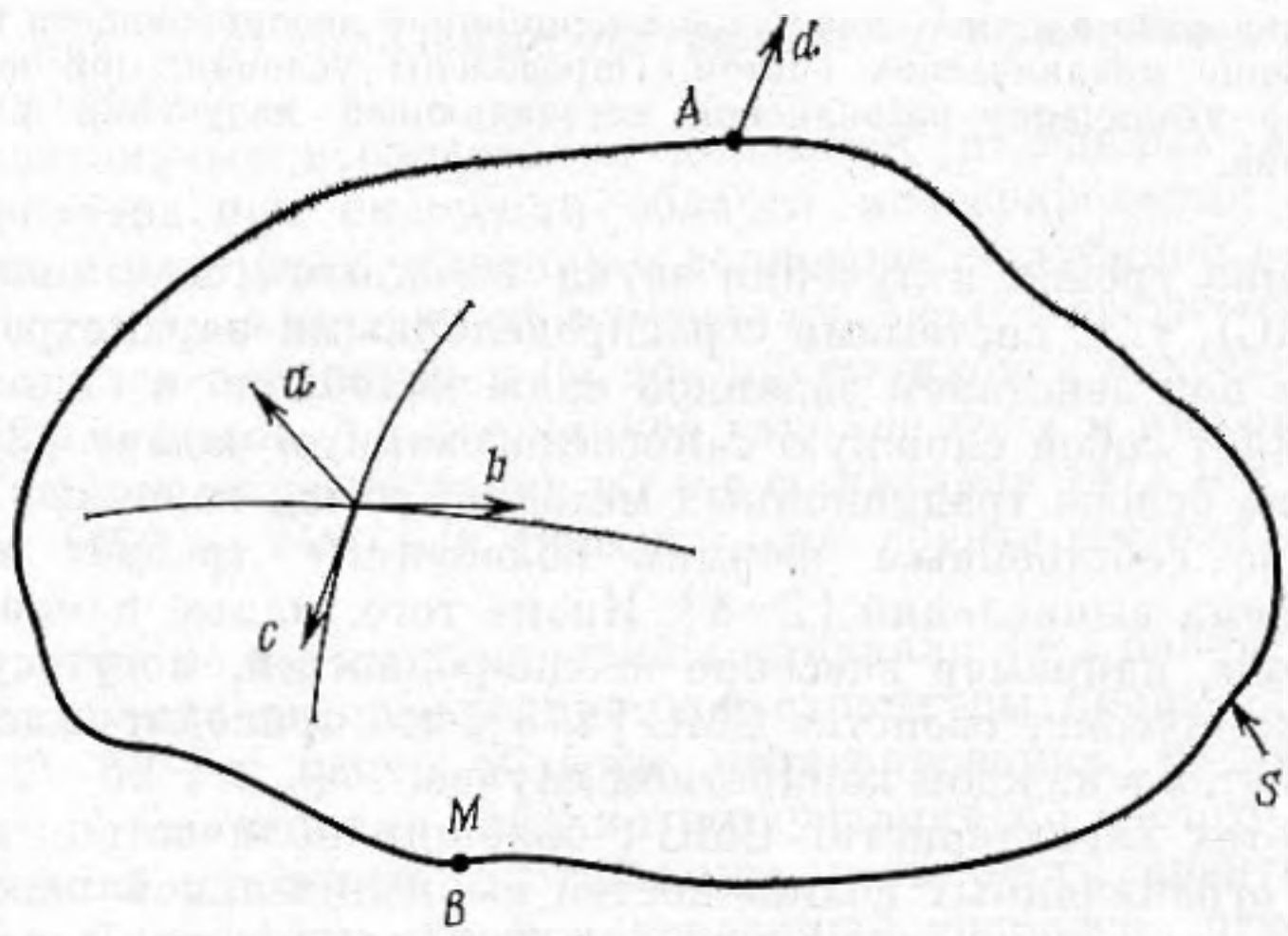

Рис. 1. Сложная механическая система: $a=\mathbf{n}$, $b=\mathbf{x}_2$, $c=\mathbf{x}_1$, $d=\mathbf{F}$

Пусть частота возбуждающей колебания неоднородной СМС силы совпадает с k-й резонансной частотой. Запишем выражение для акустической мощности СМС. Используя определение акустической мощности через сопротивление излучения мод и пренебрегая взаимодействием последних через акустическое излучение, нетрудно показать, что

$$N_{ac}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\alpha_j\Omega_j\Omega_k^2}{Q_j}m_j(1+\zeta_j)\,\omega_c^3|w_j|^2. \tag{3}$$

Выражение (3) определяет резонансное и нерезонансное излучения СМС. Нас интересует только резонансная составляющая излучения (РСИ).

Прежде всего отметим, что зависимость РСИ однородной СМС от параметра α_k имеет вид

$$N_{ac}^{\text{res}}=\frac{1}{2}\frac{(\mathbf{F},\mathbf{a}_k)^2}{m_k(1+\zeta_k)\,\omega_c}\frac{\alpha_kQ_k}{\Omega_k(1+\alpha_k)^2} \tag{4}$$

или

$$N_{ac}^{\text{res}}=\frac{1}{2}\frac{F^2R_k}{(R_k+r_k)^2}, \tag{4'}$$

где R_k — сопротивление излучения k-й моды, r_k — сопротивление потерь в материале СМС на k-м резонансе.

Отсюда нетрудно видеть, что при $\alpha_k<1$ излучение растет с ростом α_k, затем достигает абсолютного максимума при $\alpha_k=1$ и убывает обратно пропорционально α_k при $\alpha_k>1$. Внесение неоднородности приводит к дополнительному возбуждению нерезонансных мод СМС резонансными колебаниями в k-й моде. Среди этих подвозбуждаемых мод могут оказаться

акустически быстрые, которым соответствуют большие α_j [8]. Покажем, что при увеличении M растут коэффициенты возбуждения этих мод и, следовательно, за счет появления дополнительного оттока энергии в излучение эффективное значение α_k^* увеличивается.

Рассмотрим задачу в двухмодовом приближении. Предположим, что возбуждаются только k-я и q-я моды, причем $\alpha_k<1$, $\alpha_q \gg \alpha_k$. Записав уравнения, описывающие колебания в этих модах, нетрудно показать, что

$$R_k^*=R_k+R_q\varkappa_q^2\frac{\Omega_k^4}{(\Omega_q^2-\Omega_k^2)^2}(\boldsymbol{\psi}_k(B),\mathbf{b}_q)^2. \tag{5}$$

Отсюда видно, что, во-первых, сопротивление излучения R_k^*, а значит, и α_k^*, растет пропорционально $\varkappa_q^2$, а, во-вторых, увеличение сопротивления излучения тем значительней, чем больше отношение R_q/R_k и чем ближе друг к другу резонансные частоты этих мод (множитель $\Omega_k^4/(\Omega_q^2-\Omega_k^2)^2$).

На основе метода, предложенного в статье [9], можно определить собственные моды неоднородной СМС. Новые собственные функции выразим через старые:

$$\boldsymbol{\psi}_j'=\sum_{p=1}^{\infty}a_{pj}\boldsymbol{\psi}_p,\qquad a_{pj}=\langle\boldsymbol{\psi}_j',\boldsymbol{\psi}_p\rangle/\langle\boldsymbol{\psi}_p,\boldsymbol{\psi}_p\rangle; \tag{6}$$

здесь угловые скобки являются сокращенным обозначением скалярного произведения $\langle\boldsymbol{\psi}_j,\boldsymbol{\psi}_q\rangle=\int\limits_S\boldsymbol{\psi}_j(x_1,x_2)\boldsymbol{\psi}_q(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2$.

Используя (1), (2), нетрудно получить выражения для a_{pj} в случае малой неоднородности. При этом оказывается, что выражение (5) может быть переписано в виде

$$R_k^*=R_k+R_q(a_{kq}/a_{kk})^2, \tag{7}$$

т. е. дополнительное сопротивление излучения определяется квадратом проекции новой собственной формы на соответствующую ось в пространстве $\{\boldsymbol{\Psi}_j\}$, умноженным на соответствующее сопротивление однородной СМС.

Если возбуждается больше, чем две моды, выражение (7) должно быть переписано с учетом возможности переизлучения через все возбуждающиеся моды и многократного переизлучения. При этом

$$R_k^*=R_k+\sum_{q\neq k}R_q^*(a_{kq}/a_{kk})^2. \tag{8}$$

Выражение (8), справедливое для любых M, по сути дела является сокращенной формой записи системы уравнений, определяющей сопротивление излучения неоднородности СМС. Если же взаимодействие между модами через неоднородность носит характер поправки и многократностью переизлучения можно пренебречь, то эффективное значение R_q^* можно заменить на сопротивление излучения однородной системы — R_q, а $(a_{kq}/a_{kk})^2=\varkappa_q^2(\boldsymbol{\Psi}_k(B),\mathbf{b}_q)^2(\Omega_k^4/(\Omega_k^2-\Omega_q^2)^2)$.
При этом

$$R_k^*=R_k+\sum_{q\neq k}R_q\varkappa_q^2(\boldsymbol{\psi}_k(B),\mathbf{b}_q)^2\frac{\Omega_k^4}{(\Omega_q^2-\Omega_k^2)^2}. \tag{9}$$

Неоднородность изменяет не только сопротивление излучения мод СМС, но и сопротивление внутренних потерь, которое пропорционально массе соответствующей моды. В случае малой неоднородности масса моды увеличивается пропорционально $1+\mu_k$. При определенных условиях величина $R_k^*/(R_k^*+r_k^*)^2$ может расти, т. е. внесение неоднородности будет приводить к увеличению излучения. Поскольку при внесении неоднородности сопротивление излучения и сопротивление внутренних потерь растут, очевидно, что рост РСИ возможен только для мод, которым соответствуют $\alpha_k<1$.

По мере увеличения неоднородности величина РСИ может и уменьшаться. Это обусловлено двумя причинами. Во-первых, в случае $\alpha_k<1$, $\alpha_q>1$ при некотором M величина α_k^* может достигнуть единицы и, следовательно, N_{ac}^{res} — абсолютного максимума. Во-вторых, начиная с некоторого M может существенно упасть коэффициент возбуждения мод системы (возрасти r_k^*), что приведет сначала к уменьшению N_{ac}^{res}, а затем и к исчезновению резонансных свойств СМС [5].

Исследуем влияние малой неоднородности на величину РСИ. Из приведенных выше качественных соображений ясно, что наибольший интерес представляет анализ случая $\alpha_k \ll 1$. Нетрудно убедиться, что при этом выражение для РСИ примет вид

$$N_{ac}=\frac{1}{2}\frac{(\mathbf{F},\mathbf{a}_k)}{m_k(1+\zeta_k)\omega_c}\frac{\alpha_k Q_k}{\Omega_k}\left[\frac{1}{1+\mu_k}+\sum_{j\neq k}\frac{R_j}{R_k}\frac{\varkappa_j^2(\psi_k(B),\mathbf{b}_j)^2}{\varepsilon_j^2(2-\varepsilon_j)^2}\right], \quad (10)$$

где $\varepsilon_j=(\Omega_k-\Omega_j)/\Omega_k$ — относительная разность частот.

Первое слагаемое в (10) описывает собственное излучение k-й моды, выражение под знаком суммы — переизлучение через неоднородность. Из выражения (10) нетрудно получить условие увеличения излучения при внесении неоднородности. Для начала предположим, что все α_j, кроме α_k и α_q, равны нулю. Тогда условие увеличения излучения запишется следующим образом: $\varkappa_q>\varkappa'$, где

$$\varkappa'=\frac{R_k}{R_q\beta_q}\varepsilon_q^2(2-\varepsilon_q)^2,$$

$$\beta_q=\frac{m_k(1+\zeta_k)}{m_q(1+\zeta_q)}\frac{\psi_k^2(A)}{\psi_q^2(A)}\frac{(\psi_k(B),\psi_q(B))^2}{\psi_q^2(A)\psi_k^2(B)}. \quad (11)$$

Таким образом, чем больше отношение R_q/R_k и чем ближе друг к другу по частоте расположены k-й и q-й резонансы, тем меньше величина $\varkappa'$.

С другой стороны, величина $\varkappa_q$ должна быть малой настолько, чтобы разонансная частота k-й моды неоднородной СМС, определяемая по методу Рэлея $\Omega_k'=\Omega_k/\sqrt{1+\mu_k}$, была больше предельного значения. Предельное значение резонансной частоты k-й моды совпадает с частотой $(k-1)$-го антирезонанса однородной СМС и располагается согласно теореме Фостера между $(k-1)$-й и k-й резонансными частотами однородной СМС [1]. Не конкретизируя вид СМС и тип колебаний, частоту антирезонанса можно оценить в рамках предположения о связи через неоднородность только $(k-1)$-й и k-й мод. Можно показать, что такой подход оправдан в случае, когда обе моды хорошо возбуждаются и функция плотности резонансов однородной СМС не имеет особенностей [10]. При этом

$$\Omega_{\lim}^2=\Omega_k^2\frac{\delta+(1-\varepsilon_{k-1})^2}{1+\delta}, \quad (12)$$

где $\delta=\mu_k/\mu_{k-1}$.

Величина $\varkappa^*$ — критерий малости неоднородности

$$\varkappa^*=\frac{\varepsilon_{k-1}(2-\varepsilon_{k-1})}{(\delta+1)-\varepsilon_{k-1}(2-\varepsilon_{k-1})}\frac{\beta_q}{(\psi_k(B),\mathbf{b}_q)^2}=\mu^*\frac{\beta_q}{(\psi_k(B),\mathbf{b}_q)^2}. \quad (13)$$

Нетрудно видеть, что рост излучения при внесении неоднородности возможен при выполнении условия $\varkappa'<\varkappa_q\ll\varkappa^*$. Это неравенство является непротиворечивым при $\varkappa'\ll\varkappa^*$, т. е.

$$\frac{R_q}{R_k}\gg\frac{\varepsilon_q^2(2-\varepsilon_q)^2}{\varepsilon_{k-1}(2-\varepsilon_{k-1})}(\delta+1-\varepsilon_{k-1}(2-\varepsilon_{k-1}))\frac{(\psi_k(B),\mathbf{b}_q)^2}{\beta_q^2}. \quad (14)$$

Предположим, что точка возбуждения и точка локализации неоднородности совпадают $(A=B)$ и $(k-1)$, k, q-я моды имеют одинаковые полные массы. Кроме того, предположим, что ε_{k-1}, $\varepsilon_q\ll 1$, т. е. резонансы расположены достаточно густо (но по-прежнему разрешаются). При этих условиях выражение (14) существенно упрощается: $R_q/R_k\gg 4\varepsilon_q^2/\varepsilon_{k-1}$.

Отсюда можно сделать вывод о том, что, чем выше плотность резонансов однородной СМС, тем меньше должно быть отличие в сопротивлениях излучения мод для того, чтобы внесение малой неоднородности приводило к росту излучения, и тем меньшая величина неоднородности приводит к увеличению излучения.

Следует отметить, что все сказанное выше остается в силе и при учете переизлучения не только в q-ю моду, но и во все оставшиеся. Условие (11) при этом перепишется следующим образом:

$$\sum_{j\neq k}\frac{R_j}{R_k}\frac{\varkappa_j^2(\psi_k(B),\mathbf{b}_j)^2}{\varepsilon_j^2(2-\varepsilon_j)^2}>\mu_k. \tag{15}$$

Поскольку в левой части суммируются неотрицательные величины, учет многократного рассеяния энергии на неоднородности, как и следовало ожидать, приводит только к уменьшению порогового значения.

Рассмотрим случай больших неоднородностей. Ясно, что сколько-нибудь строгий анализ задачи в общем виде невозможен — необходима конкретизация СМС. Поэтому поступим так же, как и ранее при определении $\varkappa^*$.

Поскольку при некоторых условиях резонансная частота сильнонеоднородной системы определяется в основном взаимодействием двух близлежащих мод, естественно провести исследование в рамках модели связанных через неоднородность $(k-1)$-й и k-й мод. При этом выражение для РСИ сильнонеоднородной СМС запишется следующим образом:

$$N_{ac}^{\text{res}}=N_0(1-\varepsilon_{k-1})^2\frac{\delta+(1-\varepsilon_{k-1})^2}{1+\delta}\left(\frac{Q_k}{Q_{k-1}}\right)^2\times$$
$$\times\frac{(1+\alpha_{k-1})^2}{\left(1+\frac{Q_k}{Q_{k-1}}\left(1+\alpha_{k-1}(1-\varepsilon_{k-1})\left(\frac{\delta+(1-\varepsilon_{k-1})^2}{1+\delta}\right)^{1/2}\right)\right)^2}\times$$
$$\times\left(\frac{f_k}{f_{k-1}}-\frac{\varkappa_k(\psi_k(B),\mathbf{b}_{k-1})}{\mu_{k-1}}-\frac{\mu^*}{\mu_{k-1}}\right)^2, \tag{16}$$

где $N_0=(\mathbf{F},\ \mathbf{a}_{k-1})\alpha_{k-1}Q_{k-1}/2m_{k-1}(1+\zeta_{k-1})\omega_c\Omega_{k-1}(1+\alpha_{k-1})^2$ — РСИ однородной СМС на $(k-1)$-м резонансе. При выводе выражения (16) предполагалось, что $\alpha_k\ll 1$.

Упростим полученное выражение. Положим $\delta=1$, $f_{k-1}=f_k$ — моды одинаково возбуждены, $A=B$, $\varepsilon_{k-1}\ll 1$. При этом

$$N_{ac}^{\text{res}}=N_0(\mu^*/\mu_{k-1})^2. \tag{17}$$

Отсюда нетрудно видеть, что РСИ сильнонеоднородной СМС меньше РСИ однородной и асимптотически стремится к нулю при увеличении неоднородности. Следовательно, сильнонеоднородная СМС излучает нерезонансным образом.

Заметим, что $\mu^*\sim\varepsilon_{k-1}$, а ε_{k-1} можно определить, зная плотность резонансов однородной СМС:

$$\varepsilon_{k-1}=1/G(\Omega)\Omega. \tag{18}$$

Для механических систем (балки, пластины, оболочки) функция $G(\Omega)$ является неубывающей функцией частоты [1], следовательно, величина ε_{k-1}, а значит, и μ^* уменьшаются не медленнее, чем Ω^{-1}. А это в свою очередь означает, что с увеличением неоднородности частота среза или частота, начиная с которой излучение неоднородной СМС носит нерезонансный характер, уменьшается не медленнее, чем прямо пропорционально величине неоднородности.

В заключение приведем график, иллюстрирующий влияние неоднородности на излучение СМС. На рис. 2 представлен график зависимости N_{ac}^{res} (μ) (сплошная кривая), полученный на основе (3) в двухмодовом приближении — $w_j=0$, $j\neq k-1$, k. Параметры СМС: $\alpha_k=0{,}01$, $\alpha_{k-1}=10$, $Q_{k-1}=Q_k=500$, $\varepsilon_{k-1}=0{,}1$, $f_{k-1}=f_k=1$, $\mu_{k-1}=\mu_k=\varkappa_k=\mu$. Штриховые линии со-

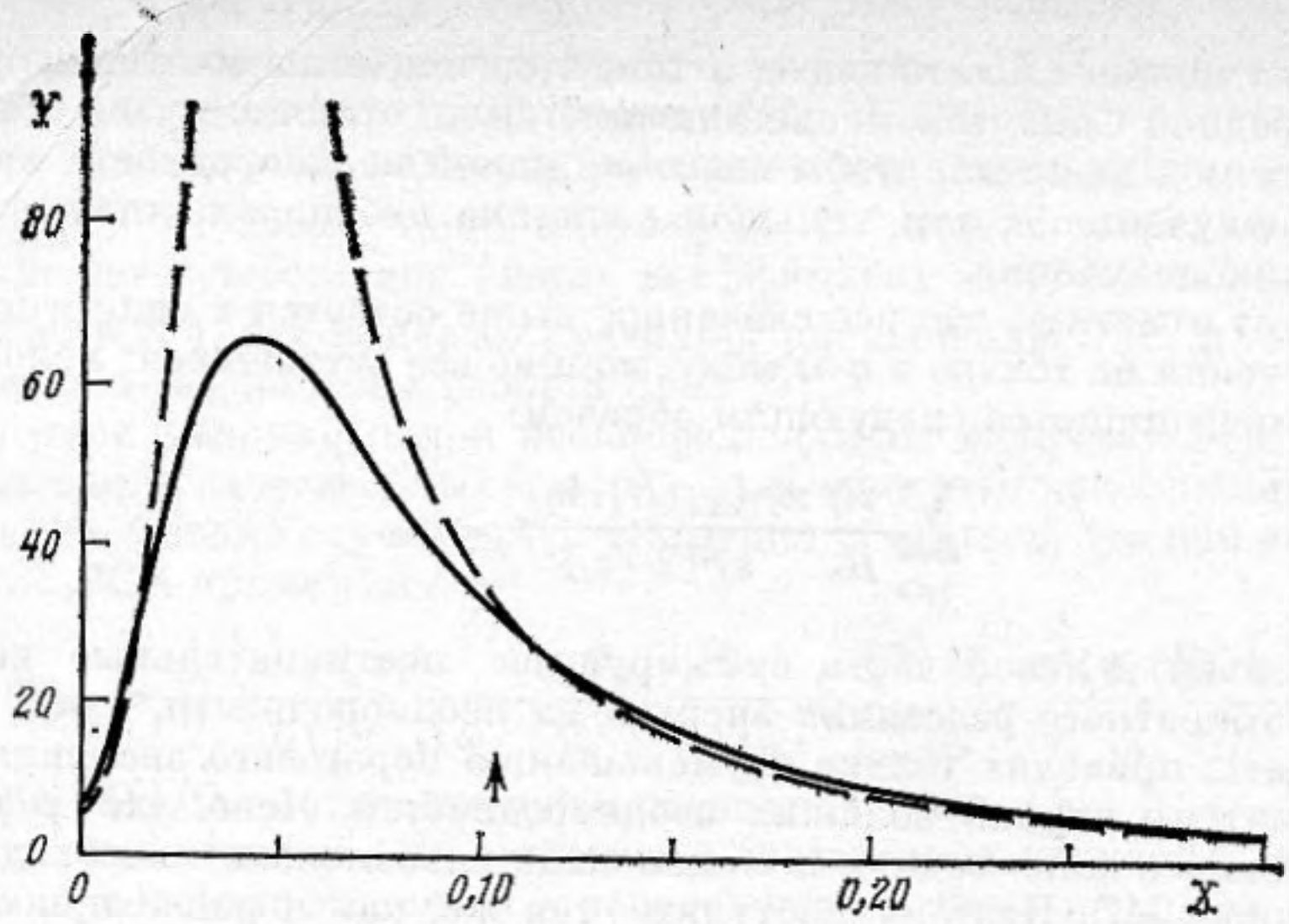

Рис. 2. Влияние неоднородности на уровень излучения СМС: $X=\mu$, $Y=N_{ac}^{res}$

ответствуют расчетам по асимптотическим формулам (10), (16). Вертикальной стрелкой показано положение μ^*.

Выделим следующие основные результаты, полученные в данной работе.

Зависимость РСИ от величины неоднородности в общем случае немонотонна. Малая неоднородность может существенно увеличить уровень излучения, поэтому при расчетах характеристик излучения механических систем с неоднородностями пренебрегать малыми неоднородностями необходимо с осторожностью.

Характеристики направленности неоднородных СМС могут существенно отличаться от аналогичных характеристик однородных в случае, когда добавочное сопротивление излучения, обусловленное неоднородностью, превосходит сопротивление излучения той же моды однородной СМС. Кроме того, в силу резонансного характера переизлучения через неоднородность можно ожидать, что на частотной зависимости излучения неоднородной СМС будут выделяться относительно широкие области повышенного излучения. Центральные частоты этих областей должны совпадать с собственными частотами простых форм (монополь, диполь) колебаний СМС. В пределах каждого из таких максимумов направленность неоднородной СМС должна слабо зависеть от частоты и совпадать с направленностью центральной, «затравочной» моды.

В случае сбалансированной с возбуждением нагрузки ($f_j=f$, $\mu_j=\varkappa_j=\mu$) излучение сильнонеоднородной СМС носит нерезонансный характер. При этом частота среза уменьшается не медленнее, чем прямо пропорционально величине неоднородности.

В заключение автор выражает признательность Митюгову В. В., Островскому Л. А. и Цибереву А. В. за полезные дискуссии и интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Скучик Е.* Простые и сложные колебательные системы. М.: Мир, 1971.
2. *Junger M. C., Feit D.* Sound, structures and their interaction // The MIT Press. Cambridge: 1972.
3. *Chen L. H., Schweikert D. G.* Sound radiation from arbitrary body // J. Acoust. Soc. Amer. 1963. V. 35. № 10. P. 1626–1632.
4. *Авербух А. А., Вейцман Р. И., Генкин М. Д.* Колебания элементов конструкций в жидкости. М.: Наука, 1987.
5. *Екимов А. Э., Лебедев А. В.* О колебаниях сложных механических систем с сосредоточенными неоднородностями // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 5. С. 841–844.

6. *Shechenyi E.* Modal densities and radiation efficiencies of unstiffened cylinder, using statistical methods // J. Sound and Vibration. 1971. V. 19. № 1. P. 65–81; 83–94.
7. *Степанов В. Б., Тартаковский Б. Д.* О статистическом методе расчета вибраций сложной конструкции // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 4. С. 743–750.
8. *Manning J. E., Maidanik G.* Radiation properties of cylindrical shells // J. Acoust. Soc. Amer. 1964. V. 36. № 9. P. 1691–1698.
9. *Fourney W. L., O'Hara G. J.* Normal modes and natural frequencies of combined structures // J. Acoust. Soc. Amer. 1968. V. 44. № 5. P. 1220–1224.
10. *Skudrzyk E.* The mean-value method of predicting the dynamic response of complex vibrators // J. Acoust. Soc. Amer. 1980. V. 67. № 4. P. 1105–1135.

Институт прикладной физики
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
4.V.1988