АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXV 1989 Вып. 5

УДК 534.222

НЕЛИНЕЙНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ КВАЗИПЛОСКИХ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В СЛОЕ

Заболотская Е. А.

Показано, что волны конечной амплитуды, распространяясь в слое жидкости или газа, находящемся между двумя абсолютно жесткими стенками, искажаются вплоть до образования разрыва. Расчет проведен на основе уравнений гидродинамики, которые решались во втором приближении по величине возмущения.

В последнее время наблюдается возрождение интереса к проблеме распространения волн конечной амплитуды в волноводах и слоях [1—4]. Необходимость этих исследований диктуется широким распространением слоистых сред в природе и повышением интенсивности излучаемого звука. В отличие от свободного пространства для волноводного распространения акустических волн существенна дисперсия. Образующиеся в волноводе гармонические составляющие распространяются с различными фазовыми скоростями, что ослабляет их взаимодействие, поэтому в акустических волноводах ударные волны, как правило, не образуются. Исключение составляет прямоугольный волновод или слой, находящийся между двумя абсолютно жесткими или абсолютно мягкими стенками. Распространяясь в таком слое звуковые волны сильно искажаются и образуют разрывы [5].

В данной работе теоретически исследуется процесс искажения пространственно-ограниченной акустической волны, распространяющейся в в нелинейном жидком или газообразном слое, ограниченном двумя абсолютно жесткими стенками. Показано, что форма возмущения при фиксированной поперечной координате описывается приближенным уравнением нелинейной акустики ограниченных пучков. В основу расчета положены результаты [4].

Распространение волн конечной амплитуды в слое описывается уравнениями гидродинамики, которые во втором приближении по величине возмущения могут быть сведены к уравнению вида [4]:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = \Delta\left(\frac{\rho_0}{2}v^2 - \frac{p^2}{2\rho_0 c^2}\right) - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\alpha}{2}p^2\right) - \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\frac{pv}{c^2}. \qquad (1)$$

Здесь введены обозначения: p — возмущение давления, связанное с волной, v — колебательная скорость частиц среды, c — скорость распространения слабого сигнала в свободном пространстве, ρ_0 — равновесная плотность среды, $\alpha = \partial^2\rho/\partial p^2$. При вычислении лапласиана и дивергенции нужно иметь в виду, что ось z направлена вдоль слоя, ось x — поперек слоя.

Величина возмущения предполагается малой. Задача решается во втором приближении по величине возмущения, поэтому достаточно линейного соотношения между p и v, чтобы исключить v из уравнения (1). Это соотношение следует из уравнения Эйлера [6]:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p. \qquad (2)$$

Допустим, что при $z = 0$ возбуждается гармонический сигнал частоты ω и излучатель имеет конечные размеры по координате y. Нелинейность среды приведет к его искажению или обогащению гармониками, поэтому сигнал на любом расстоянии от плоскости $z = 0$ может быть

представлен в виде суммы гармоник:

$$p(x, y, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(z, y) \cos\left(\frac{\pi n m}{h} x\right) e^{in(\omega t - \varkappa_m z)}, \tag{3}$$

где n — номер гармоники, $m = 1, 2, 3, \ldots$ номер моды основной компоненты, $\varkappa_m{}^2 = \omega^2/c^2 - \pi^2 m^2/h^2$ — поперечная компонента волнового вектора m-й моды, h — ширина слоя.

В каждой гармонике одна мода, а именно мода с номером $l = nm$, попадает в синхронизм с m-й модой основной волны и резонансно возбуждается. Это обстоятельство отражено в выражении (3). Для простоты записи в дальнейшем будет рассмотрен случай, когда возбуждается одна мода с $m = 1$, а соответствующее волновое число будем обозначать $\varkappa$. В этом случае в каждой гармонике возбуждается одна мода, совпадающая с номером гармоники. Такое резонансное возбуждение гармоник приводит к обогащению спектра сигнала высокочастотными компонентами и к сильному искажению волнового профиля.

Предполагается, что амплитуда гармонических составляющих в выражении (3) медленно изменяются вдоль направления распространения и поперек, причем этим изменениям приписываются разные порядки малости.

Строго говоря, при выводе укороченных уравнений для гармонических составляющих правая и левая части каждого уравнения должны умножаться на соответствующую собственную функцию и интегрироваться по слою. Однако в данном случае нет необходимости это делать. Из-за ортогональности собственных функций вклад в нелинейные члены укороченных уравнений внесут только те взаимодействия, которые образуют моду, совпадающую с модой рассматриваемой гармоники. Например, распределение поля n-й гармонической составляющей определяется собственной функцией $\cos(n\pi x/h)$, поэтому при вычислении нелинейных членов укороченного уравнения для n-й гармоники нужно учесть лишь те взаимодействия, которые могут дать $\cos(n\pi x/h)$.

Поведение медленно изменяющихся амплитуд гармонических составляющих описывается системой n укороченных уравнений вида

$$2in\varkappa \frac{\partial A_n}{\partial z} - \frac{\partial^2 A_n}{\partial y^2} = -\frac{n^2\omega^2}{4\rho_0 c^4}(\gamma + 1) \sum_{n'=-\infty}^{\infty} A_{n'} A_{n-n'}, \tag{4}$$

где γ — показатель адиабаты в уравнении состояния, n принимает значения $1, 2 \ldots \infty$. Заметим, что $A_{-n} = A_n{}^*$, где * означает комплексное сопряжение.

Заменяя $in\omega$ на $\partial/\partial\tau$, можно свернуть систему n уравнений (4) в одно уравнение для функции $P(z, y, \tau)$, совпадающей с функцией $p(x, y, z, \tau)$ при $x = 0$, т. е. $p(0, y, z, \tau) = P(y, z, \tau)$. Это уравнение имеет вид

$$\frac{\beta}{2} \frac{\partial^2 P^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial \tau\, \partial z} + \frac{c_\Phi}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0. \tag{5}$$

Здесь введены обозначения: $\beta = (\gamma + 1) c_\Phi/4\rho_0 c^4$, $\tau = t - z/c_\Phi$, c_Φ — фазовая скорость рассматриваемой основной компоненты, $\varkappa = \omega/c_\Phi$. Функция $P(z, y, \tau)$ описывает форму волны в сечении слоя $x = 0$. Естественно, что при переходе от системы (4) к уравнению (5) увеличивается число независимых переменных. Это уравнение известно в нелинейной акустике [7].

Если возмущение не зависит от координаты y, например звук возбуждается при всех значениях y, то уравнение (5) после интегрирования по τ и приравнивая нулю произвольной функции от z переходит в уравнение первого порядка:

$$\frac{\partial P}{\partial z} - \beta P \frac{\partial P}{\partial \tau} = 0. \tag{6}$$

Решение этого уравнения записывается в виде неявной функции:

$$\tau = -\beta z P + \Phi(P). \tag{7}$$

Здесь $\Phi(P)$ — произвольная функция, определяемая формой сигнала при $z = 0$. Выражение (7) описывает нелинейное искажение сигнала и позволяет определить расстояние образования разрыва $\mathscr{L}_p$. Для гармонической волны с амплитудой A и частотой ω это расстояние равно

$$\mathscr{L}_p = 1/\beta\omega A = 2\mathscr{L}_p{}^0 c/c_ф, \tag{8}$$

где $\mathscr{L}_p{}^0$ — расстояние образования разрыва в плоской гармонической волне, распространяющейся в свободном пространстве.

Выражение для $\mathscr{L}_p$ совпадает с результатом, приведенным в [5]. Нужно отметить, что в [5] в основу анализа положено представление простых волн, которое обобщается на случай волн, распространяющихся в ограниченных объемах (резонаторах и волноводах). Вводятся координаты вдоль направления распространения волн и предполагается, что форма волны медленно изменяется по этим координатам. Введение двух координат вдоль направления распространения простых волн приводит к появлению двух параметров, характеризующих степень проявления нелинейных эффектов в среде. Эти параметры совпадают только на оси волновода.

При модовом подходе только один параметр β определяет нелинейность среды. Кроме того, становится понятной причина сильного искажения волн в слое, ограниченном двумя абсолютно жесткими стенками. Эта причина заключается в кратности собственных значений.

По известному волновому профилю при $x = 0$ можно построить форму волны в любой точке поперечного сечения x. Форма волны определяется

$$p(t, x, z) = f_1\left(t + \frac{\pi}{h\omega}x, z\right) + f_2\left(t - \frac{\pi}{h\omega}x, z\right), \tag{9}$$

где f_1 и f_2 — функции, удовлетворяющие условию при $x = 0$ $f_1(t, z) = f_2(t, z) = \frac{1}{2}P(z, t)$, а $P(z, \tau)$ — решение уравнения (6). Таким образом, нужно сложить два волновых профиля, каждый из которых сдвинут по «фазе» на величину $\pi x/h$ соответственно вперед и назад относительно волнового профиля при $x = 0$. При этом на оси ($x = h/2$) будет периодический сигнал удвоенной частоты. В частности, если ударный фронт уже сформировался, то на оси будет пилообразный волновой профиль удвоенной частоты.

Возвращаясь к уравнению (5) и поступая так же, как это было сделано выше, можно построить волновой профиль в слое, в случае когда возмущение зависит от y. Форма волны определится в данном случае выражением (9), где функции f_1 и f_2 будут зависеть еще и от координаты y и удовлетворять условию при $x = 0$ $f_1(t, y, z) = f_2(t, y, z) = \frac{1}{2}P(t, y, z)$, а функция $P(t, y, z)$ является решением уравнения (5). Уравнение (5) интегрировалось численно для пучков с различными амплитудными распределениями, кроме того, построены его асимптотические решения [7]. Таким образом, зная форму волны при $x = 0$, можно построить волновой профиль в любой точке поперечного сечения.

Выражаю искреннюю благодарность Ф. В. Бункину за обсуждение работы и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зайцев В. Ю., Островский Л. А., Сутин А. М.* Модовая структура поля параметрического излучателя в акустическом волноводе // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 1.
2. *Карабутова Н. Е., Новиков Б. К.* Работа параметрического излучателя звука в плоском волноводе // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 1. С. 65—70.
3. *Hamilton M. J., Jen Cate J. A.* Sum and Difference Frequency Generation due to Noncollinear Interaction in a Rectangular Duct // J. Acoust. Soc. Amer. 1987. V. 81. № 6.
4. *Заболотская Е. А., Шварцбург А. Б.* Распространение волн конечной амплитуды в волноводе // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 5. С. 852—856.
5. *Канер В. В., Руденко О. В.* О распространении волн конечной амплитуды в акустических волноводах // Вестн. МГУ. 1978. Т. 19. № 4. С. 78—85.
6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: ГИТТЛ, 1953.
7. *Бахвалов Н. С., Жилейкин Я. М., Заболотская Е. А.* Нелинейная теория звуковых пучков. М.: Наука, 1982.

Институт общей физики
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
26.IX.1988