

УДК 534.22

ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН
В АНИЗОТРОПНОМ УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Газиев Р. М.

В явном виде получено дисперсионное уравнение, определяющее фазовые скорости акустических волн в упругом полупространстве. Приведены данные численных расчетов фазовых скоростей акустических волн в плоскостях различных срезов альфа-кварца.

Существующие отработанные численные методы [1, 2] расчета параметров акустических поверхностных волн не могут дать ответ на следующие вопросы: сколько существует решений, удовлетворяющих одновременно волновому уравнению и граничным условиям на свободной поверхности среды, и каковы значения их фазовой скорости? Это связано с тем, что машинные методы [1, 2] расчета параметров волны опираются на явные предположения о структуре и характеристиках исследуемой волны. Поэтому представляется важным получить дисперсионное уравнение для акустических волн в анизотропном полупространстве в явном виде.

Для достижения этой цели необходимо переформулировать задачу о поверхностных волнах таким образом, чтобы исключить из нее на всех промежуточных этапах операции, которые не удастся проделать аналитически. Подобная процедура проделана в работе [3], где исходную задачу удалось с помощью ЭВМ путем громоздких и сложных преобразований свести к вычислению собственных значений некоторой большой по размерам матрицы. Собственные значения этой матрицы определяют фазовую скорость волны, а собственные векторы — показатели спадания парциальных компонент волны. К существенным недостаткам этого метода следует отнести то, что эта матрица имеет «лишние» корни, не удовлетворяющие исходной задаче о спектре акустических волн в полупространстве. Это означает, что характеристическое уравнение матрицы не является истинным дисперсионным уравнением исходной задачи. В работе [4] хотя и получено дисперсионное уравнение путем исправления ошибок, допущенных в [5], однако анализ его решений авторами не приводится и поэтому вопрос об истинности этого уравнения остается открытым.

Цель настоящей работы — получить точное дисперсионное уравнение для акустических волн в явном виде в анизотропном упругом полупространстве. Исследовать поведение всех его решений в различных предельных ситуациях: наличии плоскостей симметрии кристалла, высокосимметричных направлений распространения волны и, таким образом, выяснить их физический смысл.

Пусть акустическая поверхностная волна распространяется вдоль оси X_1 , а ось X_3 — нормаль к поверхности кристалла. Решение ищем в виде $u_i \sim \exp ik(x_1 + \beta x_3 - vt)$. Считаем, что параметры волны не зависят от координаты X_2 . Подставив это решение в уравнение движения среды $\rho(\partial^2 u_i / \partial t^2) = \partial \sigma_{ij} / \partial x_j$ и материальные соотношения среды

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l},$$

получим матричное уравнение [6, 7]

$$Qy = \beta y, \quad (1)$$

где

$$Q = \begin{pmatrix} -B^T A^{-1} & -D + B^T A^{-1} B + \rho v^2 E \\ A^{-1} & -A^{-1} B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1^T & R_1 \\ A_1 & L_1 \end{pmatrix},$$

матрицы $A = C_{ij} (i = 3, 4, 5; j = 3, 4, 5)$, $B = C_{ij} (i = 3, 4, 5; j = 5, 6, 1)$, $D = C_{ij} (i = 5, 6, 1; j = 5, 6, 1)$, шестимерный вектор $y^T = (\sigma_{3j/ik}, u_j)$, $j = 3, 2, 1$, β — показатели спадания парциальных волн, C_{ij} , ρ — модули упругости и плотность среды, σ_{ij} , u_j — компоненты тензора напряжений и вектора смещения среды. Кроме того, решения системы (1) должны удовлетворять граничным условиям на поверхности кристалла:

$$\sigma_{3j} = C_k \sigma_{3j}^k = 0, \quad k, j = 3, 2, 1, \quad (2)$$

где C_k — неизвестные постоянные, σ_{3j}^k — парциальные компоненты тензора напряжения σ_{3j} , соответствующих трем собственным значениям β_k системы (1).

Везде структура решений уравнений (1) и (2) предполагается состоящей из трех парциальных волн y_j с показателями спадания β_j . Причем при выборе тройки парциальных решений y_j никаких ограничений, исходящих из физических соображений, не налагается. Это означает, что задаче о спектре акустических волн в полупространстве кроме решений, имеющих физический смысл, т. е. ограниченных в полупространстве, будут удовлетворять и решения нефизические, неограниченно нарастающие в глубь среды.

Для получения дисперсионного уравнения в явном виде преобразуем систему (1) с учетом условий (2). Обозначим правые собственные векторы матрицы Q для первых трех из шести собственных значений β_j как y_j , а левые собственные векторы для другой, оставшейся тройки показателей спадания β_j как x_i . Тогда несложно показать, что из условия биортогональности левых и правых собственных векторов матрицы $Qx_i^T y_j = \delta_{ij}$ можно вывести следующее условие ортогональности для полных векторов \hat{x} и \hat{y} :

$$\hat{x}^T Q \hat{y} = 0, \quad (3)$$

где $\hat{x} = P \sum_{i=4}^6 C_i y_i (\beta_i)$, $\hat{y} = \sum_{i=1}^3 C_i y_i (\beta_i)$, матрица перестановки

$P = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$, C_i — амплитудные множители парциальных волн, соответствующих собственным значениям β_i . Учет граничных условий (2) приводит к условию ортогональности на полные векторы смещения u_1 и u_2 :

$$u_2^T R_1 u_1 = 0, \quad \text{где } u_1 = \sum_{i=1}^3 C_i u_i (\beta_i), \quad u_2 = \sum_{i=4}^6 C_i u_i (\beta_i).$$

Другие условия ортогональности можно получить следующим образом. Если умножить систему (1) на матрицу Q n раз, где n — целое число, то получим ровно n различных систем уравнений $Q^n u = \beta^n u$. Поскольку собственные векторы u для этих систем идентичны, то, используя описанную выше процедуру получения для $n = 1$ уравнения типа свертки $u_2^T R_1 u_1 = 0$, имеем в самом общем виде для всех целых n

$$u_2^T R_j u_1 = 0, \quad j = 1, \dots \quad (4)$$

где матрицы R_j определяются из рекуррентных соотношений $L_j = A_1 R_{j-1} + L_1 L_{j-1}$, $A_j = A_1 L_{j-1}^T + L_1 A_{j-1}$, $R_j = L_1^T R_{j-1} + R_1 L_{j-1}$, $j = 2, \dots, n$. Однако не все уравнения (4) взаимно независимы. Можно показать, что все уравнения с номерами $n > 5$ будут следствием пяти первых уравнений. Действительно, матрица Q тождественно удовлетворяет своему характеристическому полиному шестой степени относительно β и, следовательно, все матрицы R_j с номерами $j > 5$ будут линейно зависимыми от пяти матриц R_1, \dots, R_5 .

Из симметричности матриц R_j следует, что (4) является системой из пяти линейных уравнений относительно шести неизвестных симметричных комбинаций $u_2^T u_1 + u_1^T u_2$. Если определенным образом нормировать векторы u_1 и u_2 , например, так, что $u_1^T = (1, a_1, a_2)$, а $u_2 = (1, b_1, b_2)$, то, решая полученную систему уравнений с правой частью методом Крамера, имеем

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 &= f_1/\Delta, & a_1 b_1 &= f_2/\Delta, & a_2 + b_2 &= f_3/\Delta, \\ a_2 b_2 &= f_4/\Delta, & a_1 b_2 + b_1 a_2 &= f_5/\Delta; \end{aligned} \quad (5)$$

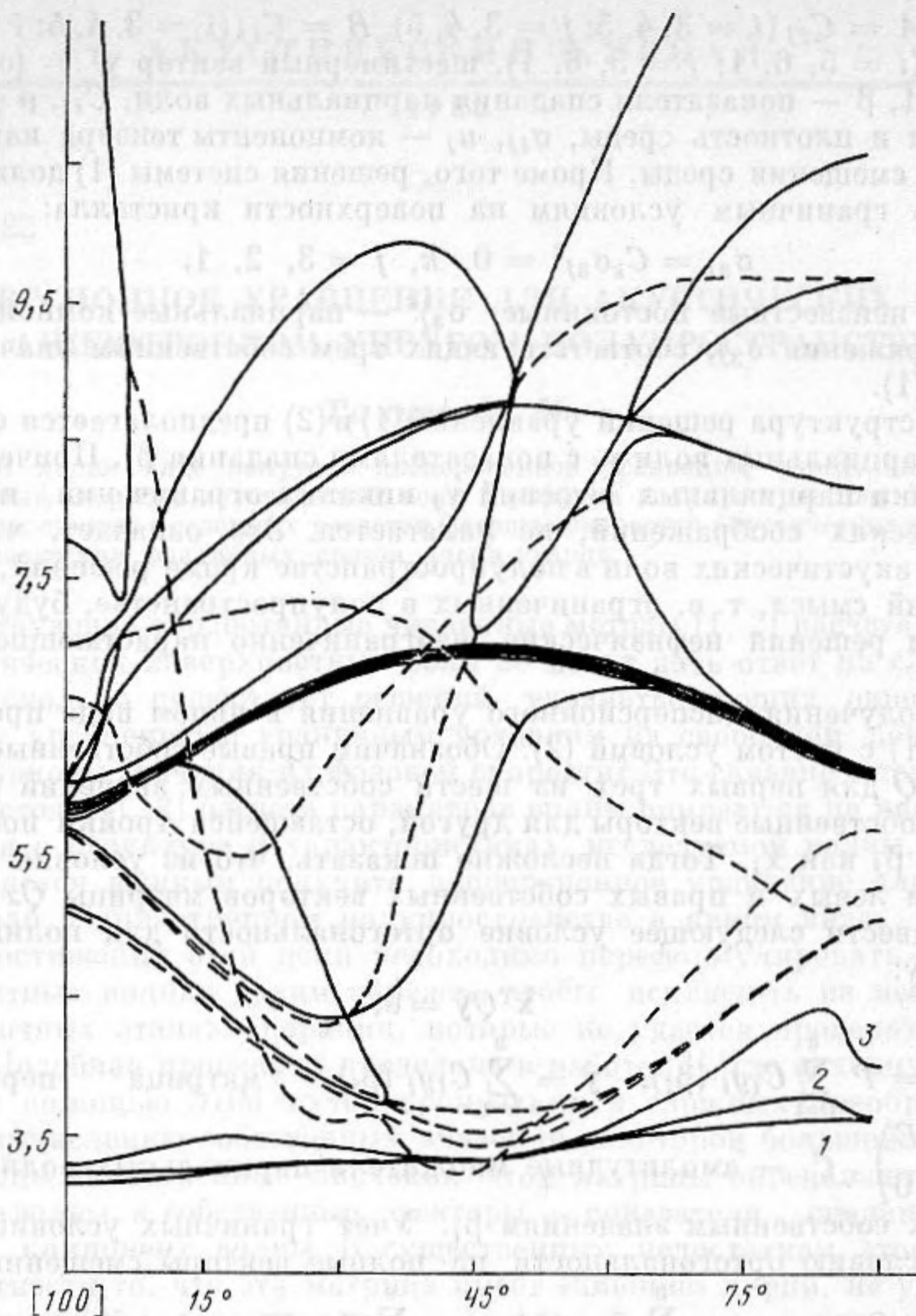


Рис. 1. Зависимость реальной части фазовых скоростей (10^3 м/с) акустических волн от направления распространения волны для ST-среза кварца: 1 — акустическая поверхностная волна, 2, 3 — нефизические решения. Штриховые линии соответствуют «оттекающим» решениям

здесь $f_i = f_i(C_{ij}, \rho v^2)$, $\Delta(C_{ij}, \rho v^2)$ — определитель матрицы полученной системы уравнений.

Так как неизвестных только четыре, а система (5) имеет пять уравнений, то из последнего уравнения этой системы получим дисперсионное уравнение для акустических волн в полупространстве

$$f_1^2 f_4 + f_3^2 f_2 + f_5^2 \Delta - f_1 f_3 f_5 - 4 f_2 f_4 \Delta = 0. \quad (6)$$

Элементы матриц R_1 и R_2 содержат члены, имеющие степень по ρv^2 не выше первой, а элементы матриц R_3 и R_4 — не выше второй и элементы матрицы R_5 — не выше третьей степени по ρv^2 . Элементарный анализ показывает, что дисперсионное уравнение (6) является полиномиальным уравнением 27-й степени относительно неизвестного ρv^2 . Это находится в согласии с результатом, полученным в работе [3], где прямой подстановкой найденных собственных решений некоторой матрицы в волновое уравнение и граничные условия показано, что среди 36 корней истинными являются только 27.

Если найдено значение фазовой скорости волны решением уравнения (6) каким-либо численным методом, то далее задача может быть решена аналити-

чески полностью. Действительно, по известному значению фазовой скорости можно определить векторы смещения волны u_1 и u_2 , а неизвестные показатели спадания волны, точнее их симметричные комбинации $\alpha_1 = -(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)$, $\alpha_2 = \beta_1\beta_2 + \beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_3$, $\alpha_3 = -\beta_1\beta_2\beta_3$, находятся из матричного уравнения $(A_3 + \alpha_1 A_2 + \alpha_2 A_1 + \alpha_3 E) u_1 = 0$. Как нетрудно показать, это уравнение является следствием граничных условий 2 и систем уравнений $Q^n u = \beta^n u$ или следствием более общего выражения $(Q^3 + \alpha_1 Q^2 + \alpha_2 Q + \alpha_3 E) \hat{y} = 0$.

На рис. 1 приведены значения фазовых скоростей волн, удовлетворяющих одновременно волновому уравнению (1) и граничным условиям (2) для ST-среза кварца в зависимости от направления распространения волны. Все 27 решений найдены численным решением дисперсионного уравнения (6) методом парабол. Значительная часть кривых соответствует особым случаям отражения объемных акустических волн от поверхности кристалла, отличающихся от общего случая отражения волн тем, что в особом случае, называемом Брюстеровским, одна из отраженных волн исчезает. Самая нижняя ветвь 1 на рис. 1 соответствует поверхностной волне, а ветви 2, 3 описывают нефизические решения, амплитуда которых неограниченно нарастает в глубь среды. Ветви, соответствующие псевдоповерхностным или «оттекающим» решениям, обозначены штриховой линией. Из рис. 1 видно, что ветви дисперсионного уравнения (6) переплетаются между собой довольно сложным образом и поэтому выяснение физического смысла каждой кривой затруднительно.

Для выяснения «происхождения» и физического смысла всех решений дисперсионного уравнения (6) исследуем поведение его корней в различных предельных ситуациях, упрощающих дисперсионное уравнение (6). При появлении различных элементов симметрии у среды матрица системы (4) становится блочной, что приводит к разложению дисперсионного уравнения (6) на относительно простые множители. Отдельный анализ каждого множителя существенно упрощает выяснение физического смысла решений уравнения (6).

Предположим, что нормаль к поверхности среды совпадает с нормалью к плоскости симметрии либо с осью симметрии второго порядка кристалла, а направление волнового вектора волны лежит в этой плоскости. В этом случае исходное дисперсионное уравнение (6) распадается на следующие множители:

$$D_1^4 D_2 D_3 = 0, \quad (7)$$

где $D_2 = (C_{11} - \rho v^2)(C_{66} - \rho v^2) - C_{16}^2$. Из-за громоздкости явные выражения для множителей D_1 и D_2 не выписываем, но заметим, что они являются уравнениями соответственно третьей и двенадцатой степеней относительно ρv^2 . Одно решение уравнения (6) из-за наличия плоскости симметрии кристалла исчезло, так как поведение этого корня $\rho v^2 \rightarrow \infty$ в малой окрестности плоскости симметрии кристалла. Подобное поведение одной из ветвей показано на рис. 1, когда волновой вектор k волны лежит в малой окрестности оси X кварца.

Дисперсионное уравнение $D_2 = 0$ описывает особые отражения объемных волн с показателями $\beta_2 = -\beta_1$ и $\beta_3 = 0$ (см. рис. 2). Это соответствует падению и отражению объемной волны от поверхности среды в совокупности с другой волной ($\beta_3 = 0$), распространяющейся параллельно поверхности среды. По отдельности ни одна объемная волна не удовлетворяет условию свободной поверхности кристалла.

Дисперсионное уравнение $D_1 = 0$ описывает падение и отражение от поверхности среды одной и той же объемной волны (см. рис. 2) (отражение без изменения поляризации падающей волны). По структуре эти волны двухпарциальны с показателями $\beta_2 = -\beta_1$, но имеют все три компоненты смещения. В этом случае только одна объемная волна, падая и отражаясь от поверхности, удовлетворяет граничным условиям на поверхности кристалла. Характерной чертой решений как уравнения $D_1 = 0$, так и $D_2 = 0$ является то, что на поверхности среды у них нормальная компонента смещения u_3 равна нулю. В точках пересечения ветви уравнения $D_1 = 0$ и

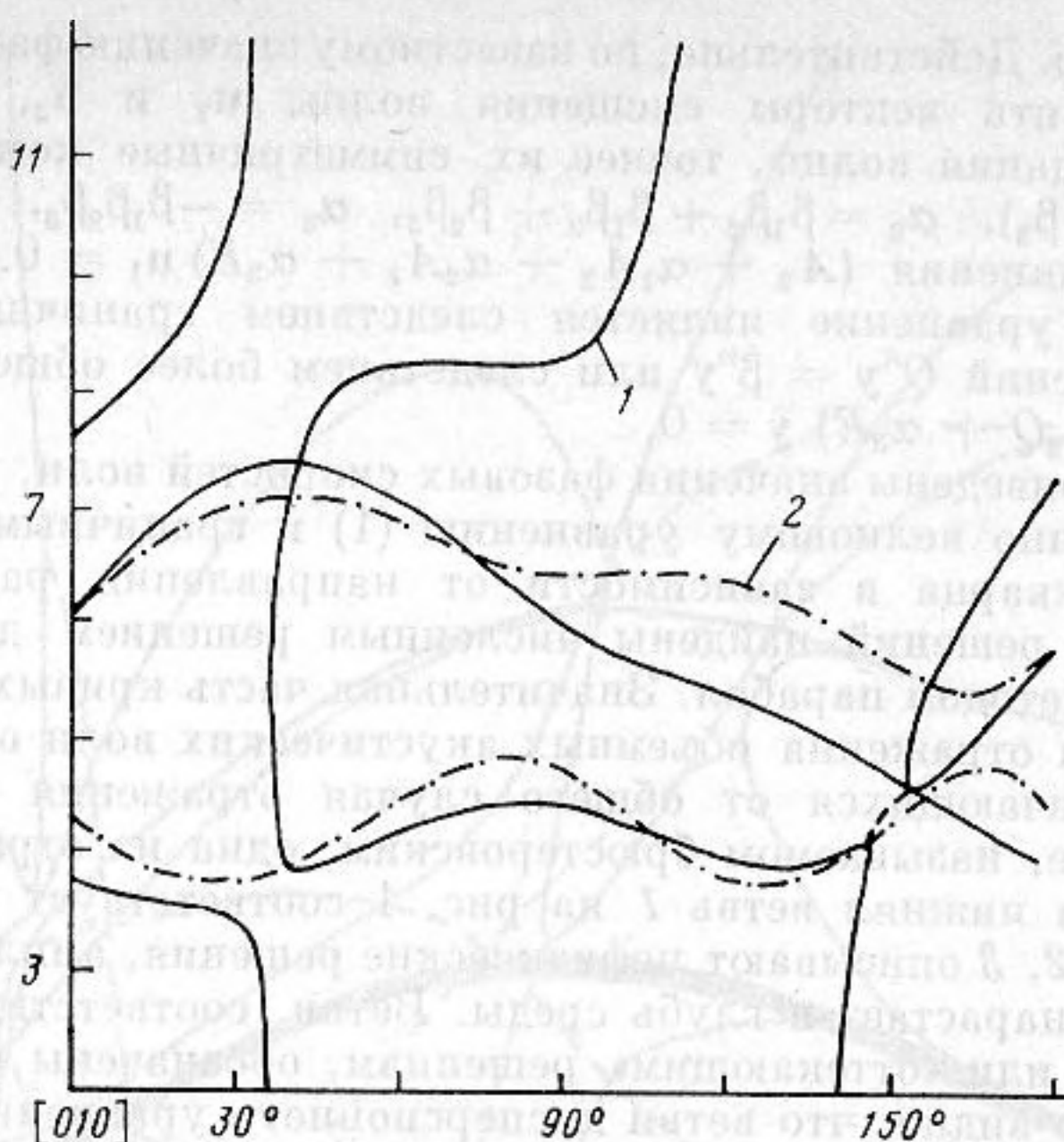


Рис. 2. Фазовые скорости (10^3 м/с) отражательных объемных волн в плоскости X-среза кварца: 1 — решения дисперсионного уравнения $D_1 = 0$, 2 — решения дисперсионного уравнения $D_2 = 0$

$D_2 = 0$ имеют место две ситуации: либо возникает однопарциальная квазипоперечная или квазипродольная объемная волна и двухпарциальная волна со степенной зависимостью от переменной kx_3 типа $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + kx_3\mathbf{u}_1$, либо возникают две трехпарциальные объемные волны со структурой $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + kx_3\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \exp(\pm ikx_3\beta)$, здесь показатель β не равен нулю.

Дисперсионное уравнение $D_3 = 0$ описывает другие допустимые типы решений в полупространстве (см. рис. 3): поверхностную волну, «оттекающие» решения, брюстеровское отражение объемных волн от поверхности кристалла и нефизические решения (отражение неоднородных волн), амплитуда которых неограниченно нарастает в глубь среды.

Для дальнейшего упрощения множителей дисперсионного уравнения (7) допустим, что кристалл обладает элементами ромбической симметрии, например тремя взаимно перпендикулярными осями симметрии второго порядка. Нормаль к поверхности среды по-прежнему ориентируем вдоль одной из осей второго порядка, а направление волнового вектора \mathbf{k} выберем в малой окрестности второй оси симметрии кристалла. Это приведет к тому, что громоздкие выражения D_1 и D_3 упростятся, разлагаясь на следующие простые множители:

$$D_1 = F_1 F_2 = 0, \quad (8)$$

$$D_3 = (C_{66} - \rho v^2)^2 L_1^2 L_2^2 = 0,$$

здесь, $L_1 = (C_{66} - \rho v^2)^2 - p_2 (C_{66} - \rho v^2) + p_0$,

$$p_2 = \frac{(C_{11} - \rho v^3)}{C_{55}} + \frac{(C_{55} - \rho v^2)}{C_{33}} - \frac{(C_{13} + C_{55})^2}{C_{33} C_{55}}, \quad K_{11} = -C_{11} + C_{13}^2 / C_{33},$$

$$p_0 = \frac{(C_{11} - \rho v^2)(C_{55} - \rho v^2)}{C_{33} C_{55}}, \quad F_1 = K_{11} + (C_{13} / C_{33} + 1) \rho v^2,$$

$$L_2 = (1 + K_{11} / \rho v^2)^2 (C_{55} - \rho v^2) C_{33} - C_{55} (C_{11} - \rho v^2) = 0$$

— дисперсионное уравнение для двухпарциальной рэлеевской волны.

Уравнение $F_2 = 0$ тождественно исчезает по мере приближения направления распространения волны к оси симметрии второго порядка. Для нахождения его решений необходимо рассмотреть предел корней уравнения

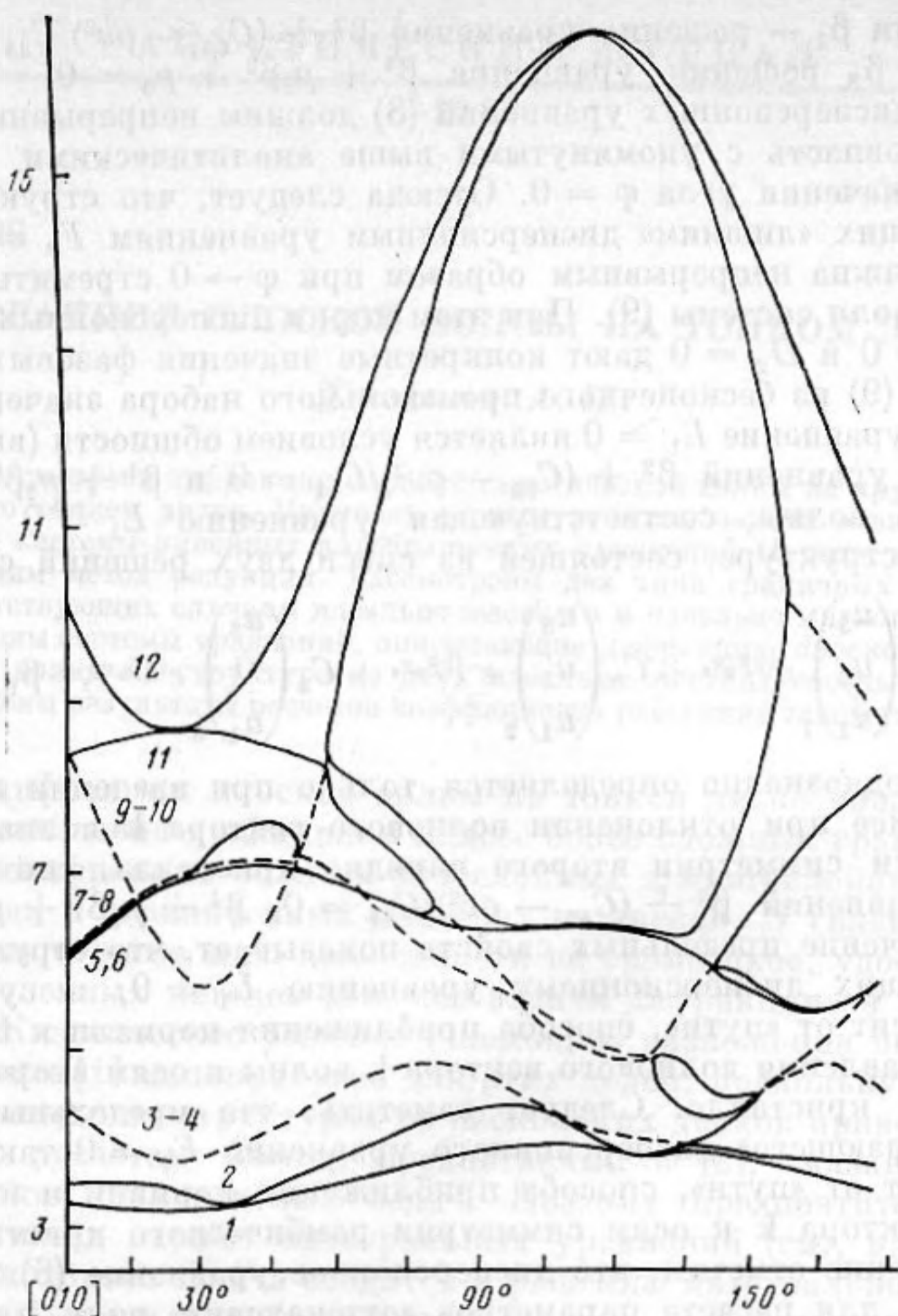


Рис. 3. Реальные части фазовых скоростей (10^3 м/с) акустических волн в плоскости X-среза кварца: 1 — поверхностная акустическая волна, 2 — нефизическое решение, 3, 4, 7—10 — «оттекающие» решения, 5, 6, 11, 12 — брюстеровские отражения объемных волн

$F_2 = 0$ при $\varphi \rightarrow 0$, где φ — угол отклонения волнового вектора волны от оси второго порядка. В результате можно получить полиномиальное уравнение второй степени относительно ρv^2 :

$$F_2 = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{1}{\varphi} \left\{ F_1 \left[\frac{K_{11}}{C_{55}} - \frac{C_{45}}{C_{55}} \frac{(\rho v^2 - C_{66})}{C_{44}} + \frac{C_{36}}{C_{33}} \right] + \left(K_{16} + \frac{C_{36}}{C_{33}} \rho v^2 \right) \left[\frac{(\rho v^2 - C_{66})}{C_{44}} - \frac{K_{11} + \rho v^2}{C_{55}} - \frac{C_{13}}{C_{33}} \right] \right\} = 0,$$

где $K_{16} = -C_{16} + C_{36}C_{13}/C_{33}$, при малых значениях угла φ имеют место оценки $C_{36} \approx \varphi (C_{23} - C_{13})$, $C_{45} \approx \varphi (C_{44} - C_{55})$, $C_{16} \approx \varphi (2C_{66} - C_{11} + C_{12})$.

При распространении акустической волны вдоль оси симметрии второго порядка ромбического кристалла все решения волнового уравнения (1), удовлетворяющие одновременно граничным условиям (2), можно получить аналитически [8]. Они являются решениями дисперсионных уравнений $L_2 = 0$, $C_{66} - \rho v^2 = 0$ и $F_1 = 0$. Кроме того, существуют и решения, удовлетворяющие волновому уравнению и граничным условиям при любом значении фазовой скорости:

$$u_2 = C_1 e^{ik\beta_2 x_3} + C_1 e^{-ik\beta_2 x_3}, \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} u_3 \\ u_1 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} u_3 \\ u_1 \end{pmatrix}_1 e^{ik\beta_1 x_3} + C_2 \begin{pmatrix} u_3 \\ u_1 \end{pmatrix}_2 e^{-ik\beta_1 x_3} + C_3 \begin{pmatrix} u_3 \\ u_1 \end{pmatrix}_3 e^{ik\beta_3 x_3},$$

где показатели β_2 — решения уравнения $\beta^2 + (C_{66} - \rho v^2)/C_{44} = 0$, а показатели β_1, β_3 решения уравнения $\beta^4 + p_2\beta^2 + p_0 = 0$.

Решения дисперсионных уравнений (8) должны непрерывным образом при $\varphi \rightarrow 0$ совпасть с упомянутыми выше аналитическими решениями задачи при значении угла $\varphi = 0$. Отсюда следует, что структура волн, соответствующих «лишним» дисперсионным уравнениям $F_2 = 0$, $L_1 = 0$ и $D_2 = 0$, должна непрерывным образом при $\varphi \rightarrow 0$ стремиться к одной из структур волн системы (9). При этом корни дисперсионных уравнений $F_2 = 0$, $L_1 = 0$ и $D_2 = 0$ дают конкретные значения фазовых скоростей для решений (9) из бесконечного произвольного набора значений скоростей. Так как уравнение $L_1 = 0$ является условием общности (вырождения) корней двух уравнений $\beta^2 + (C_{66} - \rho v^2)/C_{44} = 0$ и $\beta^4 + p_2\beta^2 + p_0 = 0$, то структура волны, соответствующая уравнению $L_1 = 0$ при $\varphi \rightarrow 0$ стремится к структуре, состоящей из смеси двух решений системы (9):

$$\begin{pmatrix} u_3 \\ u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_3 \\ u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}_1 e^{ik\beta_2 x_3} + C_2 \begin{pmatrix} u_3 \\ u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}_2 e^{-ik\beta_2 x_3} + C_3 \begin{pmatrix} u_3 \\ 0 \\ u_1 \end{pmatrix}_3 e^{ik\beta_3 x_3}, \quad \beta_1 = \beta_2.$$

Причем она однозначно определяется только при введении возмущения в среду, точнее при отклонении волнового вектора \mathbf{k} волны на малый угол φ от оси симметрии второго порядка кристалла, снимающей вырождение уравнений $\beta^2 + (C_{66} - \rho v^2)/C_{44} = 0$, $\beta^4 + p_2\beta^2 + p_0 = 0$. Более того, изучение предельных свойств показывает, что структура волн, соответствующих дисперсионному уравнению $L_1 = 0$, в существенной степени зависит от «пути», способа приближения нормали к поверхности среды и направления волнового вектора \mathbf{k} волны к осям второго порядка ромбического кристалла. Следует заметить, что предельные значения корней «исчезающего» дисперсионного уравнения $F_2 = 0$ также существенно зависят от «пути», способа приближения нормали и направления волнового вектора \mathbf{k} к осям симметрии ромбического кристалла.

В заключение отметим, что дисперсионное уравнение (6) может быть использовано для расчета параметров «оттекающих» волн, так как применение для этих целей других известных численных методов [1, 2] приводит к существенным затруднениям.

Автор выражает признательность И. А. Гилинскому, И. Б. Яковкину за обсуждение и полезные замечания по данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фарнелл Дж. Свойства упругих поверхностных волн // Физическая акустика. Т. 6 / Под ред. Мэзона У. и Терстона Р. М.: Мир, 1973.
2. Тазиев Р. М., Ляхов Н. З. Улучшенный алгоритм расчета параметров акустических поверхностных волн в анизотропных средах // Рук. деп. в ВИНТИ. № 5235-84 Деп.
3. Taylor D. B. Surface waves in anisotropic media: the secular equation and its numerical solution // Proc. Roy. Soc. London. 1981. V. A376. № 1765. P. 265—300.
4. Taylor D. B., Currie P. K. The secular equation for Rayleigh waves on elastic crystals. Corrections and additions // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1981. V. 34. № 2. P. 231—234.
5. Currie P. K. The secular equations for Rayleigh waves on elastic crystals // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1979. V. 32. № 2. P. 163—173.
6. Ingebrigtsen K. A., Tønning A. Elastic surface waves in crystals // Phys. Rev. 1969. V. 184. № 5. P. 924—951.
7. Stroh A. N. Steady state problems in anisotropic elasticity // J. Math. Phys. 1962. V. 41. № 2. P. 77—103.
8. Балакирев М. К., Гилинский И. А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982.

Институт физики полупроводников
СО Академии наук СССР

Поступила в редакцию
2.XI.1987

после исправления
2.XI.1988