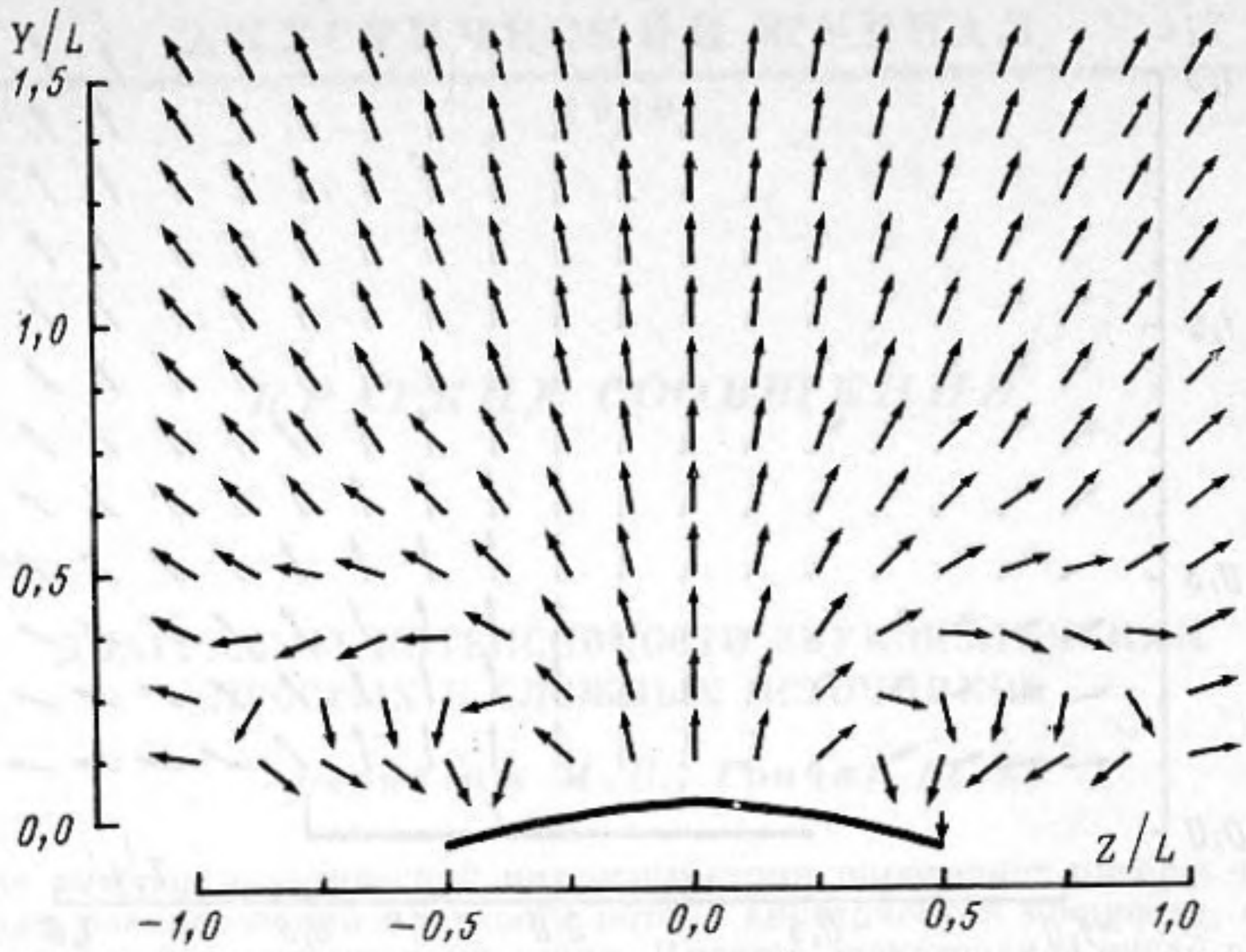

Рис. 2. Диаграмма интенсивности изгибно колеблющейся балки на частоте первого резонанса

нии от оси z порядка длины балки. Такая карта совпадает с диаграммой интенсивности трех симметрично расположенных по длине балки элементарных монопольных излучателей с относительным распределением производительностей $\{-1; 2{,}16; -1\}$, полученным усреднением колебательной скорости первой резонансной формы балки по ее участкам, колеблющимся синфазно, размещенных в центрах таких участков (см., например, работу [3]). Это обстоятельство может быть полезным при моделировании звукоизлучения сложных колебательных систем дискретными эквивалентными источниками. Сравнение диаграмм на рис. 1 и 2 наглядно показывает, что на резонансной частоте излучение балки не имеет дипольного характера.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Peterson O. K.* Sound intensity measurements for describing power flow // Appl. Acoust. 1981. V. 14. № 5. P. 387—397.
2. *Abe T.* Noise source identification by acoustic intensity method // J. Acoust. Soc. Japan. 1983. V. 39. № 10. P. 697—702.
3. *Mann J. A., Tichy I. J., Romano A. J.* Instantaneous and time-averaged energy transfer in acoustic fields // J. Acoust. Soc. Amer. 1987. V. 82. № 1. P. 17—30.
4. *Kristiansen U. K.* A prosedure for determining the sound intensity distribution close to a vibrating surface // J. Sound Vib. 1981. V. 76. № 2. P. 305—309.
5. *Скучик Е.* Основы акустики. М.: Мир, 1976. Т. 2. С. 11.
6. *Миниович И. Я., Перник А. Д., Петровский В. С.* Гидродинамические источники звука. Л.: Судостроение, 1972. С. 152.
7. *Thompson J. K., Trec D. K.* Finite difference approximation Errors in acoustic intensity measurements // J. Sound Vib. 1981. V. 75. № 2. P. 229—236.

Ленинградский кораблестроительный институт

Поступило в редакцию 27.IV.1988
после исправления 23.I.1989

УДК 551.463.2 : 519.25

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДАХ АНАЛИЗА СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Голанд В. И., Кляцкин В. И.

Один из подходов к решению задачи о влиянии тонкой структуры поля скорости звука на акустическое поле в океане связан с решением стохастической задачи Штурма-Лиувилля

$$\varphi'' + \lambda\varphi = V(z)\,\varphi,\quad \varphi'(-L) = \varphi(0),$$
$$\lambda = \frac{\omega^2}{c^2} - \varkappa^2,\quad V(z) = \frac{\omega^2}{c^2}\,\varepsilon(z). \tag{1}$$

где ω — частота волны, c — скорость звука, $\varkappa$ — волновое число, L — глубина моря. Случайная функция $\varepsilon(z)$ описывает неоднородность скорости звука.

В работе [1] стохастическая спектральная задача (1) решалась численным моделированием в предположении о том, что $\varepsilon(z)$, а с ней и $V(z)$ является гауссовским дельта-коррелированным случайным процессом с параметрами

$$\langle V(z)\rangle = 0,\ \langle V(z)\ V(z')\rangle = 2\sigma_V^2 l\delta(z-z'). \tag{2}$$

Расчеты, проведенные в этой работе для интервала изменения безразмерного коэффициента диффузии нулевой моды $D_0 = 3\sigma_V^2 lL^3/2\pi^2 < 5$, сопоставлялись с формулами

$$\langle\lambda_n\rangle = \lambda_{0n} = \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2/L^2, \tag{3}$$
$$\langle(\lambda_n - \langle\lambda_n\rangle)^2\rangle = 3\sigma_V^2 l/L,$$

$n = 0,\ 1,\ 2\ldots,$

полученными в [2, 3] методом усреднения по быстрым осцилляциям уравнения Фоккера—Планка (УФП) для плотности вероятности $f(\theta; L, \lambda)$ фазы θ собственной функции. Оказалось, что вторая из формул (3) даже при $D_0 \geqslant 1$ хорошо описывает дисперсии собственных чисел. Однако вопреки (3) в работе [1] было выявлено отличие $\langle\lambda_n\rangle$ от λ_{0n}. В интервале $1 < D_0 < 5$, в котором среднее смещение нулевой моды было найдено с погрешностью, не превышающей 10%, оказалось, что $\langle\lambda_0 - \lambda_{00}\rangle \approx -D_0/L$.

Близкие результаты, как показано ниже, могут быть получены во втором порядке теории возмущений и в рамках метода усреднения по быстрым осцилляциям УФП, в основе которого лежат найденные в [2, 3] соотношения между $f(\theta, L, \lambda)$ и плотностью вероятности собственных чисел $W_n(\lambda; L)$:

$$W_n(\lambda; L) = -\frac{\partial}{\partial\lambda}\int\limits_{\infty}^{\sqrt{\lambda_{0n}}L} f(\theta; L, \lambda)\, d\theta = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\sqrt{\lambda}\int\limits_0^L f(\sqrt{\lambda_{0n}}\,L; x, \lambda)\, dx\right], \tag{4}$$

где λ_{0n} — невозмущенные ($V(z) = 0$) собственные числа.

Если $V(z)$ — процесс «белого шума» (2), то для достаточно малых значений безразмерного коэффициента диффузии $D_n = 3\sigma_V{}^2 lL/8\lambda_{0n}$ УФП может быть осреднено по быстрым осцилляциям собственной функции и для $f(\theta; L, \lambda)$ получено аналитическое выражение [2, 3]

$$f(\theta; L, \lambda) = \left(\frac{2\lambda}{3\sigma_V{}^2 lL\pi}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{2\lambda}{3\sigma_V{}^2 lL}(\theta - \sqrt{\lambda}\,L)^2\right]. \tag{5}$$

Плотность вероятности

$$W_n(\lambda; L) = \left(\frac{L}{6\pi\sigma_V{}^2 l}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{L(\lambda-\lambda_{0n})^2}{6\sigma_V{}^2 l}\right] \tag{6}$$

была найдена в [2, 3] на основе (5) и второй из формул (4) методом стационарной фазы. При этом следующие из (6) формулы (3) совпадают с выражениями, которые могут быть получены в первом порядке тории возмущений.

Однако с помощью (5) и первой из формул (4) $W_n(\lambda; L)$ может быть получена без дополнительных приближений

$$W_n(\lambda; L) = \left(\frac{L}{6\pi\sigma_V{}^2 l}\right)^{1/2}(2-(\lambda_{0n}/\lambda)^{1/2}) \exp\left[-\frac{2\lambda L}{3\sigma_V{}^2 l}(\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda_{0n}})^2\right], \tag{7}$$

что позволяет уточнить формулы (3). Отметим, что при $\lambda < \lambda_{0n}/4$ плотность вероятности $W_n(\lambda; L)$ (7) становится отрицательной. Это следствие приближения, сделанного при расчете (5) методом усреднения УФП по быстрым осцилляциям.

Если теперь применить метод стационарной фазы для вычисления моментов λ_n, то тогда в основном порядке получим (3), (6), а в следующем приближении

$$W_n^{(1)}(\lambda; L) = W_n^{(0)}(\lambda; L)\left(1 + \frac{\lambda-\lambda_{0n}}{2\lambda_{0n}} - \frac{(\lambda-\lambda_{0n})^3}{12\sigma_V{}^2 l\lambda_{0n}}\right), \tag{8}$$

где $W_n^{(0)}(\lambda; L)$ совпадает с (6), и

$$\langle\lambda_n\rangle - \lambda_{0n} = -2D_n/L^2. \tag{9}$$

Учет следующих членов разложения (7) по степеням $(\lambda - \lambda_{0n})$ приводит к поправкам более высокого порядка по D_n. Формула (9) соответствует произвольным однородным краевым условиям для уравнения (1).

Таким образом, метод усреднения по быстрым осцилляциям позволяет описать более тонкие эффекты, чем формулы (3), (5).

Отличие $\langle\lambda_n\rangle$ от λ_{0n} может быть получено и во втором порядке теории возмущений, согласно которой в случае $\varphi'(0) = \varphi(L) = 0$,

$$\langle\lambda_n\rangle - \lambda_{0n} = \sum_{m\neq n} \frac{\langle J^2_{nm}\rangle}{\lambda_{0n} - \lambda_{0m}} = -\frac{4D_n}{3L^2}, \quad D_n = \frac{3\sigma_V{}^2 lL^3}{8\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}, \tag{10}$$

$$J_{nm} = \int_0^L \varphi_{0n}(z)\,\varphi_{0m}(z)\,V(z)\,dz, \quad \varphi_{0n}(z) = \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2}\cos(n+{}^1/_2)\pi z/L.$$

Формула (10) существенно ближе к численным результатам [1], чем (9). Однако она в интервале $1 < D_0 < 5$ дает погрешность вычисления $\langle\lambda_0 - \lambda_{00}\rangle$ порядка 30%.

В случае симметричных краевых условий $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$ $(\lambda_{0n} = n^2\pi^2/L^2)$

$$\langle\lambda_n\rangle - \lambda_{0n} = -4D_n/L^2, \quad D_n = \frac{3\sigma_V{}^2 lL^3}{8n^2\pi^2}, \quad n = 1, 2, 3\ldots \tag{11}$$

Сравнивая (10) и (11), видим, что при изменении краевых условий меняются не только коэффициенты диффузии, но и численные множители в выражениях для $\langle\lambda_n - \lambda_{0n}\rangle$, что отсутствует в методе усреднения по быстрым осцилляциям.

В заключение отметим, что значения коэффициента диффузии $D_0 \geqslant 1$ соответствует области сильных флуктуаций параметров среды, в то время как формулы теории возмущений и метода усреднения по быстрым осцилляциям обоснованы только для слабых флуктуаций среды $(D_n \ll 1)$. Следовательно, полученные в работе [1] численные результаты показывают, что асимптотические разложения на самом деле имеют существенно бо́льшую область применимости, чем первоначально предполагалось.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Голанд В. И., Кляцкин В. И.* О статистике собственных значений и собственных функций одномерной краевой волновой задачи // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 5. С. 828—833.
2. *Кляцкин В. И.* Метод погружения в теории распространения волн. М.: Наука, 1986. 256 с.
3. *Саичев А. И.* О статистике собственных чисел одномерной случайно-неоднородной краевой задачи // Изв. вузов. Радиофизика. 1980. Т. 23. С. 183—188.

Тихоокеанский океанологический институт ДВО Академии наук СССР

Поступило в редакцию 25.VIII.1988

ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПИСАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ВЫТЕКАЮЩЕЙ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА И ЖИДКОСТИ

Гончаров В. С.

Строго говоря, вытекающие волны не являются собственными волнами границы раздела и не могут быть отнесены к «настоящим волнам» [1]. Они проявляют себя в том смысле, что при падении волны Рэлея на границу раздела с жидкостью в слоистой системе возбуждается волновое поле со структурой, близкой к структуре вытекающей волны [2]. Волновое поле со структурой вытекающей волны возбуждается при отражении бесконечно тонкого луча от границы раздела жидкость — твердое тело под углом Рэлея [3]. Именно в этом контексте вытекающие волны находят применение в акустоэлектронной диагностике жидкостей, методах неразрушающего контроля [4, 5]. Для определения параметров вытекающей волны (декремента α, скорости V_L, угла излучения θ_R) в основном используются численные методы [1]. Известная приближенная формула для описания величины декремента обладает низкой точностью [6]. Графическое представление результатов численных расчетов дает возможность сделать определенные выводы о зависимости параметров вытекающей волны от параметров жидкости и твердого тела. Однако эти возможности ограничены, а точность количественного описания невелика. Приближенные формулы лишены этих недостатков, обладают гарантированной точностью, в том числе позволяют выяснить взаимозависимость параметров вытекающей волны.

Дисперсионное уравнение для вытекающей волны записывается в виде [1]

$$4k^2qs - (k^2 + s^2)^2 = i\,\frac{\rho_f q k_t{}^4}{\rho_t p},$$

где $q = (k^2 - k_l{}^2)^{1/2}$, $s = (k^2 - k_t{}^2)^{1/2}$, $p = (k_f{}^2 - k^2)^{1/2}$, k_l, k_t, k_f — волновые числа сдвиговой и продольной волн в твердом теле и продольной волны в жидкости, ρ_t, ρ_f — плотности твердого тела и жидкости, $k = k_L + i\alpha$, $k_L = \omega/V_L$.