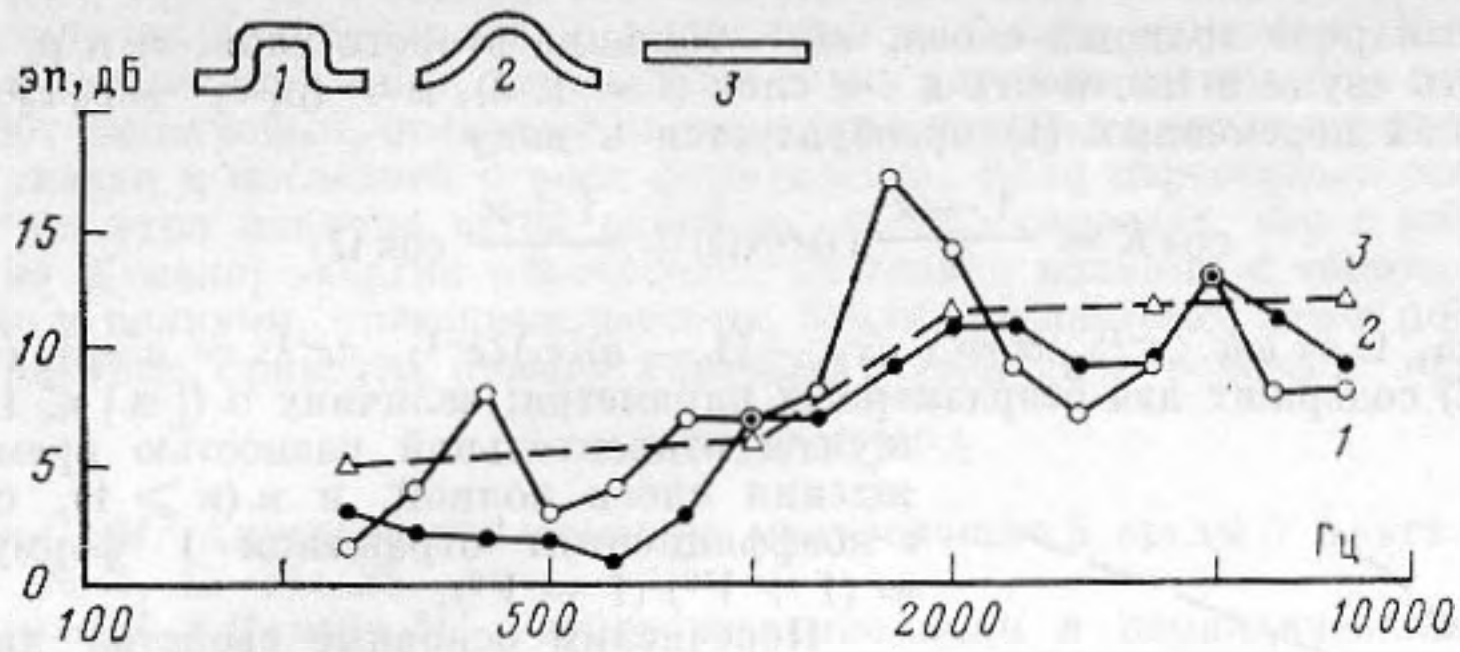


Рис. 2. Эффективность вибропоглощающего покрытия на образцах труб типа I: *1* — $r_1 = 0{,}11$ м, возбуждение вибратором, *2* — $r_1 = 0{,}45$ м, возбуждение насосом стенда, *3* — расчет для прямолинейной трубы

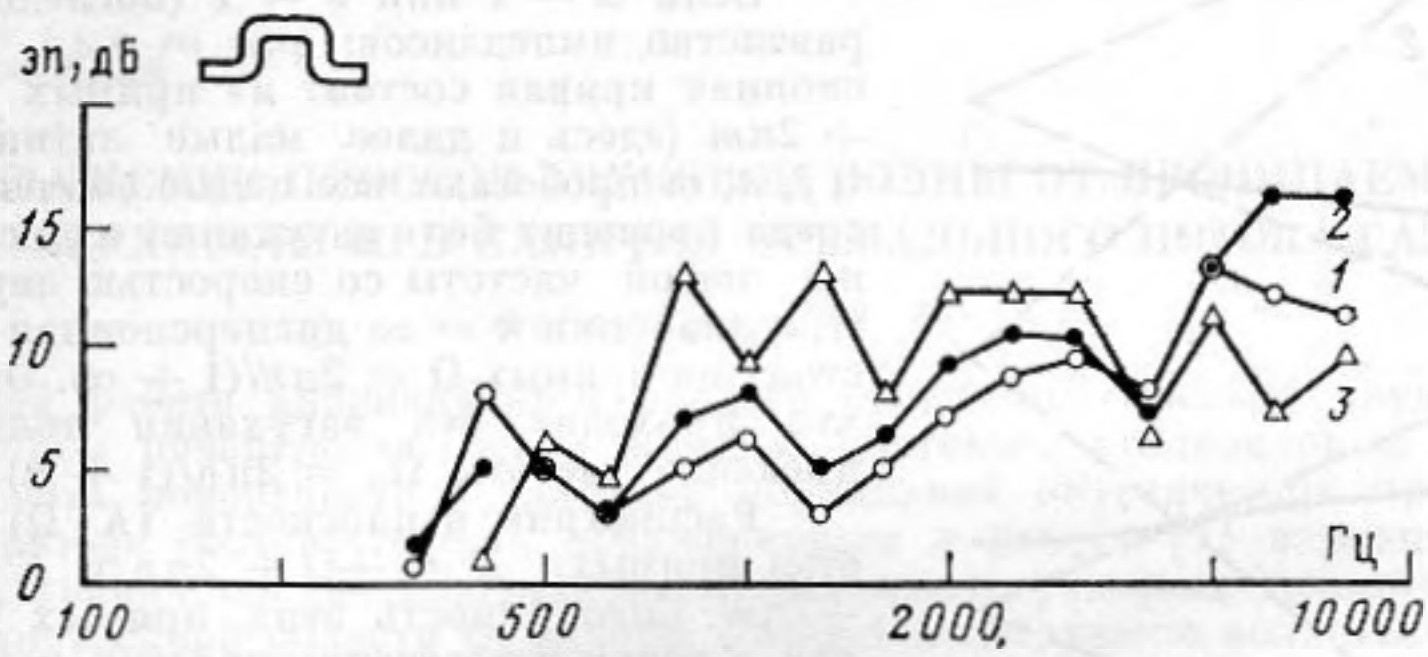


Рис. 3. Эффективность вибропоглощающего покрытия на образцах труб типа II: *1* — $r_1 = 0{,}25$ м, возбуждение вибратором, *2* — $r_1 = 0{,}25$ м, возбуждение насосом стенда, *3* — расчет для прямолинейной трубы

ческольких децибелов в области балочных колебаний до 10 ÷ 15 дБ на более высоких настотах (рис. 2, 3). Большая плотность резонансов труб типа I, II в исследуемой области частот обусловливает лучшее (чем на рис. 1) соответствие расчетных и экспериментальных значений эффективности.

Результаты проведенных исследований свидетельствуют о высокой эффективности вибропоглощающего покрытия «Антивибрит-5М», нанесенного на прямолинейные и криволинейные трубопроводы и о возможности приближенной расчетной оценки эффективности демпфирования криволинейных трубопроводов с помощью способа, описанного в [1] для случая прямолинейных труб.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ефимов И. А., Канаев Б. А., Тартаковский Б. Д.* Демпфирование вибрации трубопроводов вибропоглощающими покрытиями: эксперимент и расчет // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 4. С. 629—633.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
5.XII.1988

УДК 534.211

К АНАЛИЗУ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ

Перепёлкин Ю. П.

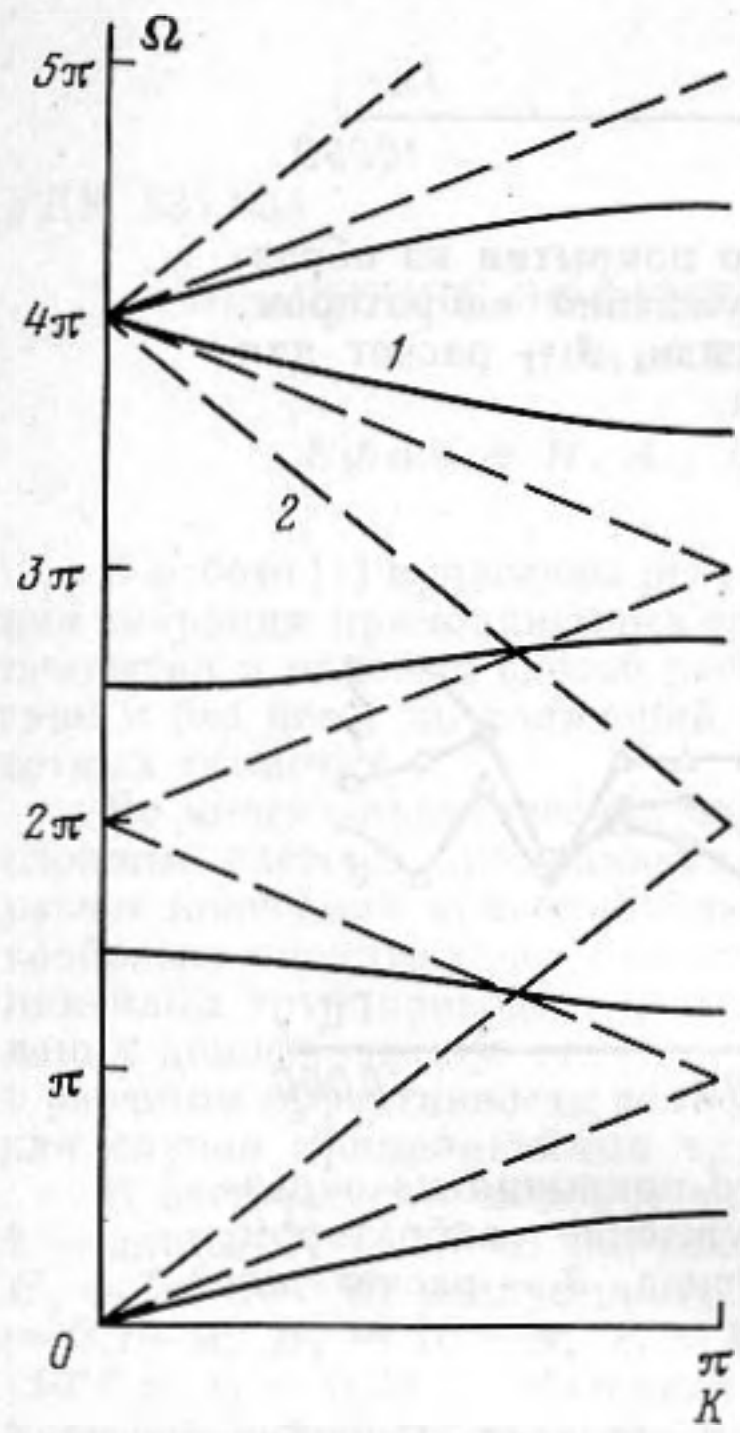
При изучении динамических свойств периодических структур важно хотя бы качественно представлять поведение дисперсионных кривых. В случае волн, распространяющихся поперек слоистой среды, составленной из двух чередующихся однородных слоев, дисперсионное уравнение можно выписать явно (см. [1—3]):

$$\cos(kh) = \cos\frac{\omega h a}{c_2}\cos\frac{\omega h(1-a)}{c_1} - \varkappa\sin\frac{\omega h a}{c_2}\sin\frac{\omega h(1-a)}{c_1}. \qquad (1)$$

Здесь h — суммарная толщина слоев, ah — толщина второго слоя, c_i и ρ_i соответственно скорость звука и плотность в i-м слое ($i = 1, 2$), $\varkappa = (\rho_1^2 c_1^2 + \rho_2^2 c_2^2)/2\rho_1\rho_2 c_1 c_2$. В безразмерных переменных (1) преобразуется к виду

$$\cos K = \frac{1-\varkappa}{2}\cos(\alpha\Omega) + \frac{1+\varkappa}{2}\cos\Omega. \tag{2}$$

Здесь $K = kh$, $\Omega = \omega h \langle c^{-1}\rangle$, $\alpha = (a/c_2 - (1-a)/c_1)\langle c^{-1}\rangle$, $\langle c^{-1}\rangle = a/c_2 + (1-a)/c_1$. Уравнение (2) содержит два безразмерных параметра: величину α ($|\alpha| \leqslant 1$), являющуюся относительной разностью времен прохождения слоев волной, и $\varkappa$ ($\varkappa \geqslant 1$), связанную с коэффициентом отражения V формулой $\varkappa = (1+V^2)/(1-V^2)$.



Пример слияния ветвей дисперсионной кривой: *1* — дисперсионная кривая; *2* — сетка; $\alpha = 0{,}5$, $\varkappa = 5$

Перечислим основные свойства дисперсионной кривой.

Дисперсионная кривая 2π-периодична по K и симметрична относительно прямых $K = \pi$, $\Omega = 0$, что позволяет проводить ее изучение лишь в полуполосе $0 \leqslant K \leqslant \pi$, $\Omega \geqslant 0$.

Если $\alpha = 1$ или $\varkappa = 1$ (последнее означает равенство импедансов: $\rho_1 c_1 = \rho_2 c_2$), то дисперсионная кривая состоит из прямых $K = \pm\Omega + 2\pi m$ (здесь и далее малые латинские буквы i, j, n, m пробегают все целые значения). Такая среда проводит без затухания и дисперсии волны любой частоты со скоростью звука $\langle c^{-1}\rangle^{-1}$. При значении $\varkappa = \infty$ дисперсионная кривая состоит из прямых $\Omega = 2\pi n/(1 \pm \alpha)$. Это означает, что проходят без затухания только волны, имеющие частоты $\Omega_n = 2\pi n/(1 \pm \alpha)$.

Рассмотрим в плоскости (K, Ω) два семейства прямых: $K = \pm\Omega + 2\pi n$ и $K = \pm\alpha\Omega + 2\pi m$. Совокупность этих прямых назовем сеткой, а точки пересечения прямых первого семейства с прямыми второго семейства — узлами сетки. Аналогичная сетка для уравнения Рэлея Лэмба называется решеткой Миндлина [4]. Нетрудно убедиться, что в случае $\alpha \neq 0; 1$ в каждом прямоугольнике $\pi i \leqslant \Omega \leqslant \pi(i+1)$, $0 \leqslant K \leqslant \pi$ лежит ровно одни узел сетки с координатой $\Omega = 2\pi j/(1 \pm \alpha)$.

Дисперсионные кривые пересекают сетку в ее узлах и только в них.

Для доказательства этого утверждения достаточно переписать (2) в виде

$$(\varkappa - 1)(\cos K - \cos(\alpha\Omega)) = (\varkappa + 1)(\cos K - \cos\Omega). \tag{3}$$

Производная функции $\Omega(K)$ в узлах сетки равна

$$\frac{d\Omega}{dK} = \begin{cases} \dfrac{2}{1+\varkappa+\alpha(1-\varkappa)}, & K = \dfrac{2\pi m}{1+\alpha} + 2\pi n, \quad \Omega = \dfrac{2\pi m}{1+\alpha}; \\ \dfrac{2}{1+\varkappa-\alpha(1-\varkappa)}, & K = \dfrac{2\pi m}{1-\alpha} + 2\pi n, \quad \Omega = \dfrac{2\pi m}{1-\alpha}; \\ -\dfrac{2}{1+\varkappa-\alpha(1-\varkappa)}, & K = \dfrac{2\pi m}{\alpha-1} + 2\pi n, \quad \Omega = \dfrac{2\pi m}{1-\alpha}; \\ -\dfrac{2}{1+\varkappa+\alpha(1-\varkappa)}, & K = -\dfrac{2\pi m}{1+\alpha} + 2\pi n, \quad \Omega = \dfrac{2\pi m}{1+\alpha}; \\ \pm\sqrt{\dfrac{2}{1+\varkappa+\alpha^2(1-\varkappa)}}, & K = \pi m, \quad \Omega = \pi n. \end{cases} \tag{4}$$

Первым двум строкам соответствуют неравенства $(2i-1)\pi < \Omega < 2i\pi$ и $0 < d\Omega/dK < 1$, третьей и четвертой — $2i\pi < \Omega < (2i+1)\pi$ и $-1 < d\Omega/dK < 0$. Во всех этих случаях $|d\Omega/dK| \leqslant 1$. Таким образом, несмотря на то, что узлов сетки счетное число, производная $d\Omega/dK$ принимает в них только шесть значений. Вторая производная уже не обладает этим свойством.

В каждом прямоугольнике $0 \leqslant K \leqslant \pi$, $\pi n \leqslant \Omega \leqslant \pi(n+1)$ лежит только одна бесконечно дифференцируемая ветвь дисперсионной кривой, монотонно возрастающая при четном n и монотонно убывающая при нечетном n. Производная $d\Omega/dK$ может обращаться в нуль только при $K = 0; \pi$.

Если $\alpha = M/N$ — рациональное число, что в точках $[2\pi n, 2\pi N j]$ ветви соединяются. При этом дисперсионные кривые $2N\pi$-периодичные по Ω и симметричны относительно прямых $\Omega = \pi N j$. Если, кроме того, M и N нечетны, то ветви соединяются

в точках $[(1+2j)\pi, (1+2i)N\pi]$. Во всех случаях соединяющиеся ветви получаются сдвигом вдоль осей координат ветви, выходящей из начала координат. При этом точка, лежащая в начале координат, переходит в точку слияния ветвей. Все пересекающиеся ветви имеют одинаковый, отличный от нуля угол наклона в точке пересечения, тангенс которого указан в последней строке формулы (4). Если пересечение отсутствует, то при $K = \pi m$ угол наклона ветви равен нулю. Это означает, что в случае длинных волн (когда K мало) энергия переносится не только волнами с частотами, близкими к нулю, но и волнами, имеющими частоты, близкие к частотам точек пересечения ветвей. На рисунке приведен пример слияния ветвей дисперсионной кривой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рытов С. М.* Акустические свойства мелкослоистой среды // Акуст. журн. 1956. Т. 2. № 1. С. 71—83.
2. *Бриллюэн Л., Пароди М.* Распространение волн в периодических структурах. М.: Изд-во иностр. лит. 1959. 457 с.
3. *Бреховских Л.* Волны в слоистых средах. М.: Наука. 1973. 343 с.
4. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка. 1981. 283 с.

Производственное геологическое объединение Гидроспецгеология

Поступило в редакцию 8.XII.1988

ОТРАЖЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ ОТ ПРОНИЦАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ НОРМАЛЬНОГО ПОТОКА ГАЗА

Федорченко А. Т.

В данной работе анализируется процесс отражения плоской звуковой волны от проницаемой поверхности, через которую протекает стационарный однородный поток газа. Эта поверхность с заданной нормальной акустической проводимостью может, например, соответствовать предложенным в работе [1] вариантам задания нелинейных граничных соотношений на проницаемых участках границы Γ_f некоторой пространственной области G, внутри которой исследуются волновые процессы с применением методов численного интегрирования полных уравнений газовой динамики. Линеаризация этих соотношений позволяет оценить относительную величину нормальной акустической проводимости β рассматриваемого элемента Γ_f. Подобные способы задания граничных соотношений на Γ_f с широким набором акустических свойств (в том числе со значительным эффектом звукопоглощения) были успешно использованы в целом ряде вычислительных задач (см., например, [2, 3]).

Рассмотрим проницаемую плоскость $S(y=0)$, через которую протекает стационарный дозвуковой поток газа со скоростью $\mathbf{U}=\{U_x, U_y, U_z\}$, $|\mathbf{M}|<1$, $\mathbf{M}=\mathbf{U}/c$, c — адиабатическая скорость звука в неподвижном газе. В полупространстве $y>0$ (исследуемая область G) на поверхность S падает плоская гармоническая звуковая волна, параметры в которой обозначим индексом 1:

$$p_1=P\exp(i\mathbf{k}_1\mathbf{r}-i\omega t),\quad \mathbf{k}_1=\frac{\omega\xi_1}{c(1+\mathbf{M}\xi_1)},$$
$$\mathbf{v}_1=\xi_1 p_1/(\rho_0 c),\ \xi_1=\mathbf{k}_1/|\mathbf{k}_1|,\ \mathbf{r}\in G. \tag{1}$$

Здесь p_1, $\mathbf{v}_1$ — звуковые давление (с амплитудой $P>0$) и скорость, $\mathbf{k}_1$ — волновой вектор, ρ_0 — невозмущенная плотность, ω — частота в используемой неподвижной системе координат, связанной с S. Параметры отраженной волны (с индексом 2) запишутся в виде

$$p_2=RP\exp(i\mathbf{k}_2\mathbf{r}-i\omega t),\quad \mathbf{k}_2=\frac{\omega\xi_1}{c(1+\mathbf{M}\xi_2)},$$
$$\mathbf{v}_2=\xi_2 p_2/(\rho_0 c),\ \xi_2=\mathbf{k}_2/|\mathbf{k}_2|, \tag{2}$$

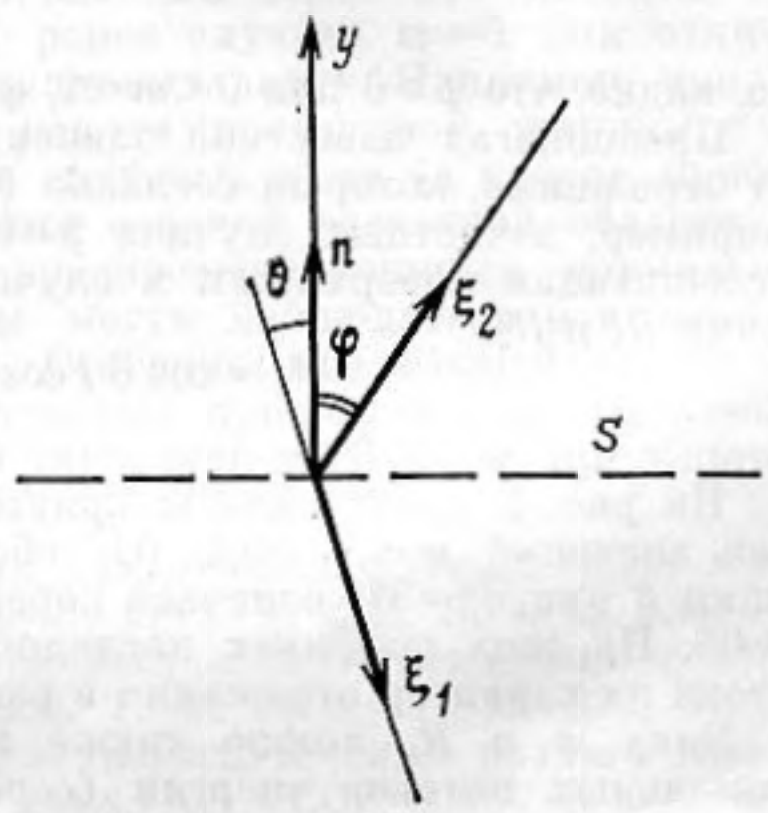


Рис. 1

где R — коэффициент отражения. Векторы $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, $\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ — нормаль к S, направленная вдоль оси y) должны лежать в одной плоскости, и проекции $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ на S (соответственно $k_{\tau 1}$ $k_{\tau 2}$) должны быть равны:

$$\frac{\xi_{\tau 1}}{1+\mathbf{M}\xi_1}=\frac{\xi_{\tau 2}}{1+\mathbf{M}\xi_2}. \tag{3}$$

При задании $\mathbf{M}$, ξ_1 условие (3) позволяет определить направление ξ_2.

Пусть поверхность S характеризуется заданной относительной величиной (в общем случае комплексной) нормальной акустической проводимости β: $\beta=\rho_0 c v_{ns}/p_s$, где v_{ns} — суммарная (для падающей и отраженной волн) нормальная компонента звуковой скорости, p_s — суммарное давление на поверхности S.