в точках $[(1+2j)\pi, (1+2i)N\pi]$. Во всех случаях соединяющиеся ветви получаются сдвигом вдоль осей координат ветви, выходящей из начала координат. При этом точка, лежащая в начале координат, переходит в точку слияния ветвей. Все пересекающиеся ветви имеют одинаковый, отличный от нуля угол наклона в точке пересечения, тангенс которого указан в последней строке формулы (4). Если пересечение отсутствует, то при $K = \pi m$ угол наклона ветви равен нулю. Это означает, что в случае длинных волн (когда K мало) энергия переносится не только волнами с частотами, близкими к нулю, но и волнами, имеющими частоты, близкие к частотам точек пересечения ветвей. На рисунке приведен пример слияния ветвей дисперсионной кривой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рытов С. М.* Акустические свойства мелкослоистой среды // Акуст. журн. 1956. Т. 2. № 1. С. 71—83.
2. *Бриллюэн Л., Пароди М.* Распространение волн в периодических структурах. М.: Изд-во иностр. лит. 1959. 457 с.
3. *Бреховских Л.* Волны в слоистых средах. М.: Наука. 1973. 343 с.
4. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка. 1981. 283 с.

Производственное геологическое объединение Гидроспецгеология

Поступило в редакцию 8.XII.1988

ОТРАЖЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ ОТ ПРОНИЦАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ НОРМАЛЬНОГО ПОТОКА ГАЗА

Федорченко А. Т.

В данной работе анализируется процесс отражения плоской звуковой волны от проницаемой поверхности, через которую протекает стационарный однородный поток газа. Эта поверхность с заданной нормальной акустической проводимостью может, например, соответствовать предложенным в работе [1] вариантам задания нелинейных граничных соотношений на проницаемых участках границы Γ_f некоторой пространственной области G, внутри которой исследуются волновые процессы с применением методов численного интегрирования полных уравнений газовой динамики. Линеаризация этих соотношений позволяет оценить относительную величину нормальной акустической проводимости β рассматриваемого элемента Γ_f. Подобные способы задания граничных соотношений на Γ_f с широким набором акустических свойств (в том числе со значительным эффектом звукопоглощения) были успешно использованы в целом ряде вычислительных задач (см., например, [2, 3]).

Рассмотрим проницаемую плоскость $S(y=0)$, через которую протекает стационарный дозвуковой поток газа со скоростью $\mathbf{U}=\{U_x, U_y, U_z\}$, $|\mathbf{M}|<1$, $\mathbf{M}=\mathbf{U}/c$, c — адиабатическая скорость звука в неподвижном газе. В полупространстве $y>0$ (исследуемая область G) на поверхность S падает плоская гармоническая звуковая волна, параметры в которой обозначим индексом 1:

$$p_1=P\exp(i\mathbf{k}_1\mathbf{r}-i\omega t),\quad \mathbf{k}_1=\frac{\omega\xi_1}{c(1+\mathbf{M}\xi_1)},$$
$$\mathbf{v}_1=\xi_1 p_1/(\rho_0 c),\ \xi_1=\mathbf{k}_1/|\mathbf{k}_1|,\ \mathbf{r}\in G. \tag{1}$$

Здесь p_1, $\mathbf{v}_1$ — звуковые давление (с амплитудой $P>0$) и скорость, $\mathbf{k}_1$ — волновой вектор, ρ_0 — невозмущенная плотность, ω — частота в используемой неподвижной системе координат, связанной с S. Параметры отраженной волны (с индексом 2) запишутся в виде

$$p_2=RP\exp(i\mathbf{k}_2\mathbf{r}-i\omega t),\quad \mathbf{k}_2=\frac{\omega\xi_1}{c(1+\mathbf{M}\xi_2)},$$
$$\mathbf{v}_2=\xi_2 p_2/(\rho_0 c),\ \xi_2=\mathbf{k}_2/|\mathbf{k}_2|, \tag{2}$$

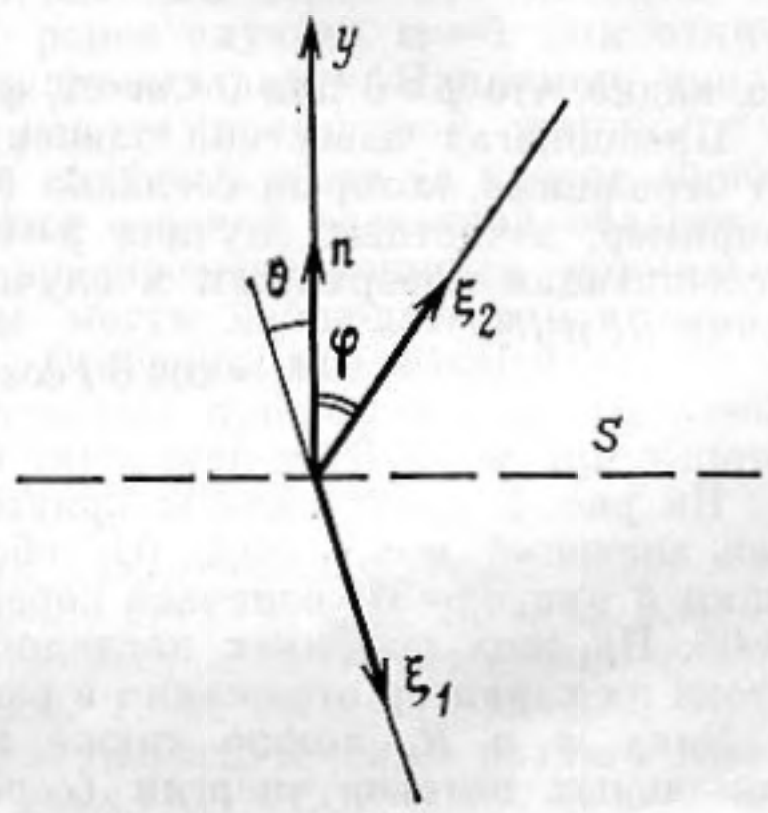

Рис. 1

где R — коэффициент отражения. Векторы $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, $\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ — нормаль к S, направленная вдоль оси y) должны лежать в одной плоскости, и проекции $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ на S (соответственно $k_{\tau 1}$ $k_{\tau 2}$) должны быть равны:

$$\frac{\xi_{\tau 1}}{1+\mathbf{M}\xi_1}=\frac{\xi_{\tau 2}}{1+\mathbf{M}\xi_2}. \tag{3}$$

При задании $\mathbf{M}$, ξ_1 условие (3) позволяет определить направление ξ_2.

Пусть поверхность S характеризуется заданной относительной величиной (в общем случае комплексной) нормальной акустической проводимости β: $\beta=\rho_0 c v_{ns}/p_s$, где v_{ns} — суммарная (для падающей и отраженной волн) нормальная компонента звуковой скорости, p_s — суммарное давление на поверхности S.

С помощью (1), (2) выразим суммарное давление на поверхности S (далее множитель $\exp(-i\omega t)$ опускаем): $p_s=P[\exp(i\mathbf{k}_1\mathbf{r}_s)+R\exp(i\mathbf{k}_2\mathbf{r}_s)]$, $\mathbf{r}_s\in S$ и суммарную нормальную скорость $v_{ns}=\mathbf{v}_1\mathbf{n}+\mathbf{v}_2\mathbf{n}=(p_1\xi_1\mathbf{n}+p_2\xi_2\mathbf{n})(\rho_0 c)^{-1}$. Тогда для величины β, не зависящей от r_s, t, запишем соотношение

$$\beta=\frac{\xi_1\mathbf{n}+R\xi_2\mathbf{n}}{1+R},$$

из которого можно получить общую формулу для коэффициента отражения:

$$R=-\frac{\xi_1\mathbf{n}-\beta}{\xi_2\mathbf{n}-\beta}. \tag{4}$$

Далее исследуем более подробно случай, когда вектор $\mathbf{M}$ нормален плоскости S (т. е. $M_x=M_z=0$, $M_y=m$) — этих условий нетрудно добиться путем перехода к новой инерциальной системе координат, движущейся поступательно со скоростью $\mathbf{U}_c=\{U_x, 0, U_z\}$ вдоль плоскости S. Тогда процесс отражения удобно рассматривать в плоскости $Q(x, y)$, проходящей через ξ_1, ξ_2, $\mathbf{n}$. В этом случае, вводя углы падения и отражения (соответственно θ и φ на рис. 1), имеем

$$\xi_1\mathbf{n}=-\cos\theta\leqslant 0,\quad \xi_2\mathbf{n}=\cos\varphi\geqslant 0 \tag{5}$$

и из условия (3) получим уравнение для определения φ:

$$\frac{\sin\theta}{1-m\cos\theta}=\frac{\sin\varphi}{1+m\cos\varphi}, \tag{6}$$

$$0\leqslant\theta\leqslant 90^\circ,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 90^\circ,\ -1<m<1.$$

Нетрудно убедиться, что в случае $0\leqslant m<1$ решения (6) будут существовать только при $(1-m\cos\theta)^{-1}\sin\theta\leqslant 1$ или при $\theta\leqslant\theta^*(m)$. Уравнение для определения критического угла падения θ^* записывается в форме

$$\frac{\sin\theta^*}{1-m\cos\theta^*}=1\quad\text{или}\quad \theta^*=\arcsin\left(\frac{1-m^2}{1+m^2}\right). \tag{7}$$

В случае $-1<m<0$ решения уравнения (6) существуют для всех $0\leqslant\theta<90^\circ$, однако для каждого фиксированного m: $\varphi\to\varphi_{\max}=\varphi^*(m)$ при $\theta\to 90^\circ$, причем $\varphi^*(m)$ определяется формулой, аналогичной (7):

$$\varphi^*=\arcsin\left(\frac{1-m^2}{1+m^2}\right).$$

Полученная зависимость $\varphi(\theta, m)$ представлена в виде изолиний φ на рис. 2. Решения $0\leqslant\varphi\leqslant 90^\circ$ существуют в области $0\leqslant\theta\leqslant 90^\circ$, $-1<m<1$ везде, кроме зоны, расположенной выше кривой $\theta^*(m)$, $0<m<1$ (штрихпунктир на рис. 2), которая одновременно является изолинией $\varphi=90^\circ$. Следует также отметить, что для малых углов падения, выраженных в радианах ($\cos\theta\approx\cos\varphi\approx 1$) из (6) имеем

$$\frac{\sin\theta}{\sin\varphi}\approx\frac{\theta}{\varphi}\approx\frac{1-m}{1+m},$$

т. е. видно, что $\varphi>\theta$ при $0<m<1$, $\varphi<\theta$ при $-1<m<0$.

Предполагая известной зависимость $\varphi(\theta, m)$, нетрудно определить коэффициент отражения, который согласно (4), (5), выразится в виде $R=(\cos\theta+\beta)/(\cos\varphi-\beta)$. Например, в частных случаях $\beta=0$ и $\beta=-1$ (абсолютно отражающая и абсолютно поглощающая поверхности в случае $\theta=0$, $m=0$), получим соответствующие выражения R_1 и R_2:

$$R_1=\cos\theta/\cos\varphi,\ R_2=(\cos\theta-1)/(\cos\varphi+1),$$

которые при $m=0$, $\theta=\varphi$ переходят в известные формулы [4].

На рис. 3 представлены кривые R_1 (сплошные линии) и R_2 (штриховые) для трех значений $m=0$; $-0{,}5$; $0{,}5$, обозначенных номерами *1, 2, 3*. Обрыв штриховой линии *3* при $\theta^*\approx 37^\circ$ означает переход к режиму отсутствия отраженной волны при $\theta\geqslant\theta^*$. На этих графиках наглядно проявляется влияние однородного нормального потока на характер отражения в рассмотренных частных случаях.

Зная φ и R, можно также получить выражения для плотности энергии и нормальных потоков энергии (осредненных по периоду) в падающей и отраженной волнах соответственно E_1, E_2, W_{n1}, W_{n2}. Действительно, используя общие выражения для E, $\mathbf{W}$ наиболее универсального 1-го типа (согласно классификации [5]), получим для рассматриваемой задачи

$$E_1=P^2\eta(1-m\cos\theta),\ E_2=R^2P^2\eta(1+m\cos\varphi),$$
$$W_{n1}=P^2\eta c(1-m\cos\theta)(m-\cos\theta),$$
$$W_{n2}=R^2P^2\eta c(1+m\cos\varphi)(m+\cos\varphi),\ \eta=(2\rho_0c^2)^{-1}.$$

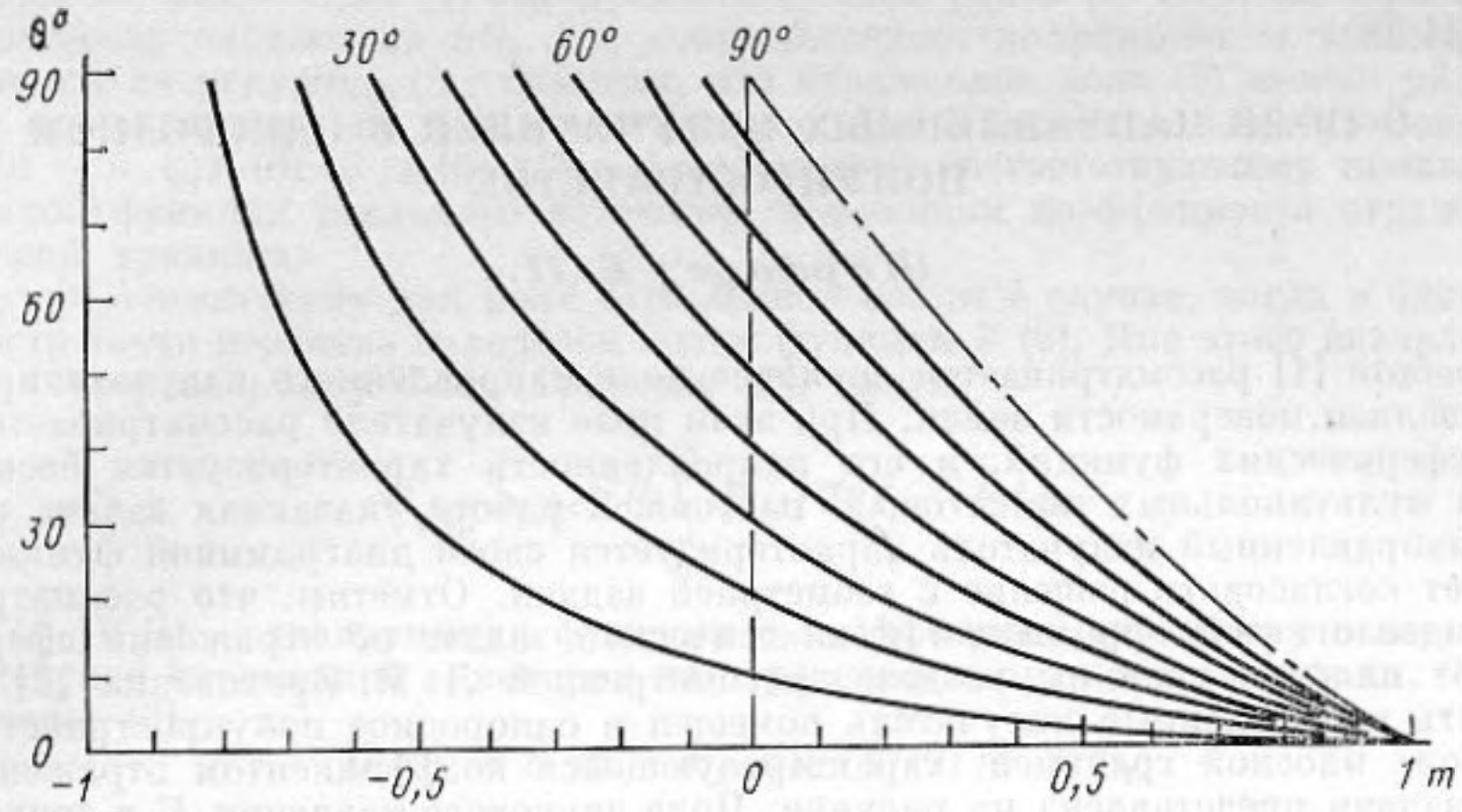

Рис. 2

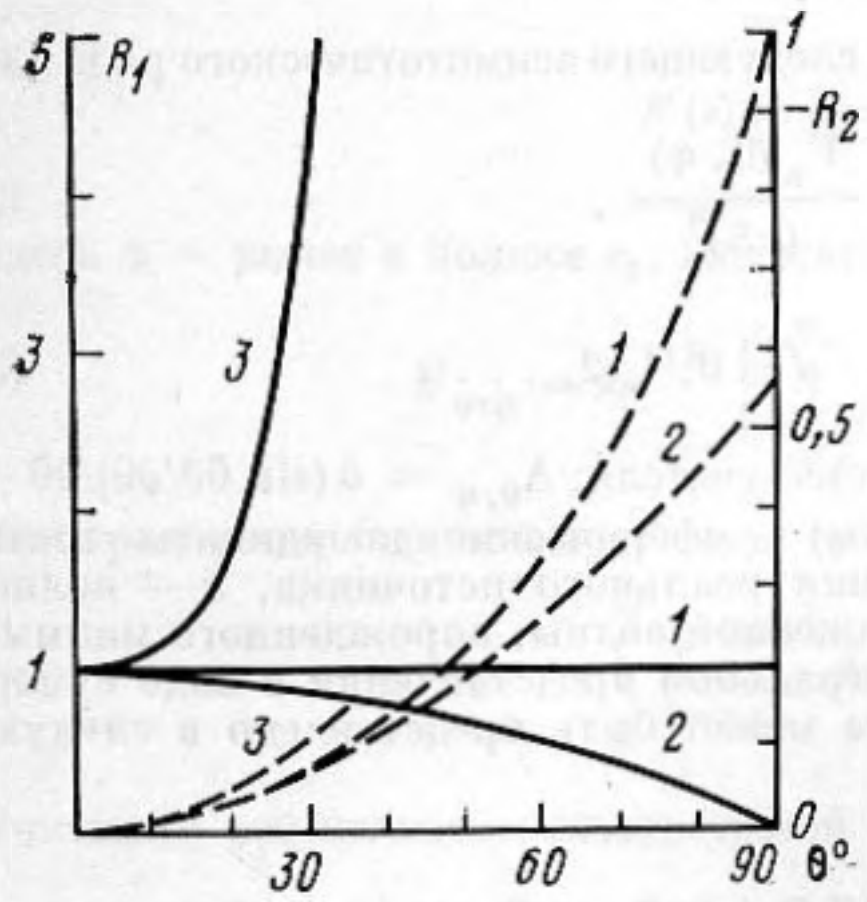

Рис. 3

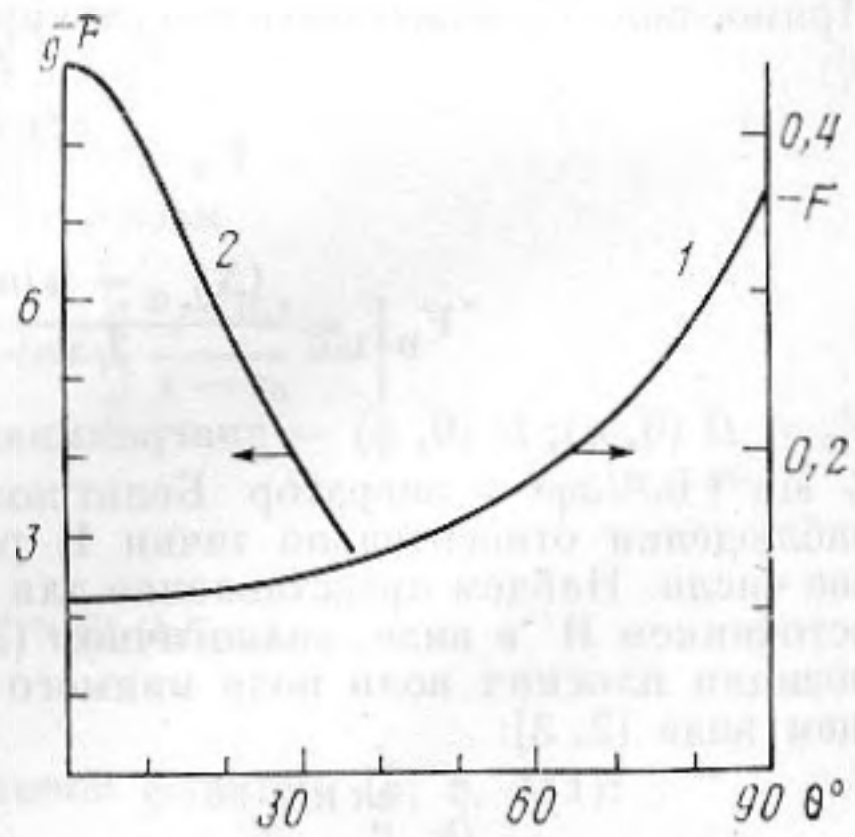

Рис. 4

Отсюда нетрудно выразить энергетический коэффициент отражения $R_E = W_{n2}/W_{n1} = R^2 F(\theta, m)$,

$$F(\theta, m) = \frac{(1+m\cos\varphi)(m+\cos\varphi)}{(1-m\cos\theta)(m-\cos\theta)}.$$

На рис. 4 дана зависимость $-F$ от θ для $m=-0{,}5$; $0{,}5$ (кривые *1*, *2*); $F=-1$ для $m=0$ при любых θ.

Таким образом можно констатировать, что процесс отражения плоских звуковых волн от проницаемой поверхности с протекающим через нее потоком газа имеет существенные отличия от рассмотренных ранее случаев $m=0$. Эти отличия следует учитывать при постановке и решении волновых задач. Например, при моделировании акустических явлений в плоском канале постоянной ширины с потоком газа различие углов θ и φ при отражении звуковых волн (в первом приближении локально-плоских) от входного и выходного сечений расчетной области может являться причиной переходов по номерам распространяющихся нормальных волн плоского волновода. Аналогичные эффекты могут наблюдаться и в каналах более сложной пространственной конфигурации. Особенно тщательный анализ подобных явлений необходим при исследовании волновых процессов в трансзвуковых потоках.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Федорченко А. Т.* Модели проницаемых границ для нестационарных задач вычислительной газовой динамики // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260. № 4. С. 826–830.
2. *Федорченко А. Т.* Нелинейные модели звукопоглощающих граничных сечений расчетного участка канала // Акуст. журн. 1984. Т. 30. № 6. С. 827–833.
3. *Федорченко А. Т.* Развитие неустойчивости дозвукового течения вязкого газа во внезапно расширяющемся плоском канале // Докл. АН СССР. 1987. Т. 296. № 6. С. 1315–1319.
4. *Исакович М. А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973.
5. *Candel S. M.* Acoustic conservation principles and an application to plane and modal propagation in nozzles and-diffusers // J. Sound and Vibr. 1975. V. 41. № 2. P. 207–232.

Московский физико-технический институт

Поступило в редакцию 26.V.1988