АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXV 1989 Вып. 6

УДК 534.2

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА ОБОЛОЧКОЙ С ПРОДОЛЬНЫМИ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ ©

Евсеев В. Н.

Получено решение задачи об излучении звука круговой цилиндрической оболочкой, подкрепленной расположенными вдоль образующей равноотстоящими ребрами жесткости. Приводятся результаты численных расчетов и анализ полученного решения. Показано, что на резонансных частотах излучение звука обусловлено в основном низкопорядковыми в окружном направлении формами колебаний ($n=0$; 1; 2), в то время как вибрация определяется высокопорядковыми формами колебаний оболочки.

Известно решение задачи об излучении звука бесконечной пластиной и цилиндрической оболочкой, подкрепленных периодической системой [1, 2] или двойной периодической системой [3, 4] поперечных ребер жесткости. В указанных задачах возможность получения решения в замкнутом виде обусловлена бесконечной периодической последовательностью ребер жесткости, в результате чего каждое из них находится в одинаковых условиях. По существу решение этой задачи в некотором смысле эквивалентно задаче о поведении конструкции с одиночным ребром жесткости.

Существуют конструкции, в которых периодичность обеспечивается конечным числом подкрепляющих элементов, например круговая цилиндрическая оболочка, подкрепленная равноотстоящими друг от друга продольными ребрами (стрингерами).

При определении амплитуд вибрации таких конструкций или излучаемого ими акустического давления также возможны упрощения, вытекающие из геометрии задачи.

Рассмотрим бесконечную цилиндрическую оболочку радиуса a, толщины h, подкрепленную N равноотстоящими ребрами жесткости, расположенными вдоль образующей цилиндра, с импедансами по отношению к силе z_F и моменту z_m.

Пусть E, μ, ρ — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала оболочки. Оболочка помещена в безграничную жидкость с плотностью ρ_0 и скоростью звука в ней c_0. Внутри оболочки вакуум. Определим акустическое давление, излучаемое такой конструкцией при возбуждении ее гармонической по времени нагрузкой $F(z, \varphi)\exp(i\omega t)$, нормальной к поверхности оболочки. Множитель $\exp(i\omega t)$ в дальнейшем будем опускать.

Для упрощения задачи, чтобы не учитывать взаимодействие ребер жесткости с окружающей оболочку жидкостью, будем считать, что они полностью расположены внутри оболочки.

Примем цилиндрическую систему координат (z, φ, r). Ось z совпадает с осью оболочки, ось r — нормальна поверхности оболочки, φ — угол в окружном направлении, причем $\varphi=0$ соответствует направлению на одно из ребер жесткости.

Совместные колебания оболочки и жидкости описываются системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\sum_{j=1}^{3} L_{ij}u_j+(k^2u_i+f_i)\chi_i=0, \qquad i=1,2,3, \tag{1}$$

$$\Delta p+k_0^2p=0,$$

где $\chi_1=\chi_2=-\chi_3=1$; u_1, u_2, u_3 — перемещения оболочки в направлении осей z, φ, r соответственно: $L_{i,j}$ — линейные дифференциальные операторы; $p(r, \varphi, z)$ — излучаемое оболочкой акустическое давление; f_i — внешняя нагрузка, воздействующая на оболочку в направлении координатных осей; $k_0=\omega/c_0$; $k=\omega/c$; $c=(E/\rho(1-\mu^2))^{1/2}$.

Для определенности дифференциальные операторы в уравнениях колебаний оболочки примем в форме [5]:

$$L_{11}=\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1-\mu}{2a^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2};\quad L_{12}=L_{21}=\frac{1+\mu}{2a}\frac{\partial^2}{\partial z\partial\varphi};$$
$$L_{12}=L_{31}=\frac{\mu}{a}\frac{\partial}{\partial z};\quad L_{22}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2};\quad L_{23}=L_{32}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial\varphi};\tag{2}$$
$$L_{33}=\frac{1}{a^2}+\varepsilon a^2\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)^2;\quad \varepsilon=h^2/12a^2.$$

Для повышения жесткости оболочки она иногда подкрепляется круговыми шпангоутами. Если частота колебаний не очень большая, так что длина волны колебаний превосходит расстояние между шпангоутами, то подкрепляющий набор можно учесть введением конструктивной ортотропии, т. е. считать шпангоуты «размазанными». В этом случае дифференциальные операторы будут несколько отличаться от приведенных (см., например, [6]), однако конкретный вид операторов не влияет на ход дальнейших рассуждений.

Внешняя нагрузка, воздействующая на оболочку в направлении координатных осей, определяется формулами

$$f_1=f_2=0;\quad f_3=\frac{1-\mu^2}{Eh}\left\{F(z,\varphi)-p(r=a,\varphi,z)+\sum_{k=0}^{N-1}r_k(z)\delta[a(\varphi-2k\pi/N)]+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=0}^{N-1}m_k(z)\delta'[a(\varphi-2k\pi/N)]\right\},\tag{3}$$

где $F(z, \varphi)$ — заданная внешняя нагрузка, нормальная к поверхности оболочки; p — акустическое давление со стороны жидкости, воздействующее на колеблющуюся оболочку; $r_k(z)$, $m_k(z)$ — перерезывающая сила и момент, воздействующие на оболочку со стороны k-го ребра жесткости; δ и δ' — дельта-функция Дирака и ее производная.

Величины $r_k(z)$ и $m_k(z)$ можно определить через импедансы ребер жесткости и амплитуды колебаний оболочки

$$r_k(z)=-i\omega u_3(z,\varphi=2k\pi/N)z_F;\quad m_k=-i\omega\frac{\partial u_3(z,\varphi=2k\pi/N)}{a\partial\varphi}z_m.$$

Кинематическое условие совместности колебаний оболочки и жидкости заключается в равенстве нормальных скоростей на границе между ними $\partial p|\partial r|_{r=a}=\rho_0\omega^2u_3$.

Представим решение уравнений колебаний оболочки в виде

$$u_i(z,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}U_{in}e^{in\varphi}e^{i\alpha z}d\alpha.\tag{4}$$

Тогда с учетом кинематического условия совместности

$$p(r,\varphi,z)=\frac{\rho_0\omega^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}U_{3n}\frac{H_n^{(2)}(\gamma r)}{\gamma H_n^{(2)\prime}(\gamma a)}e^{in\varphi}e^{i\alpha z}d\alpha,\tag{5}$$

где $\gamma=(k_0^2-\alpha^2)^{1/2}$, $H_n^{(2)}(x)$, $H_n^{(2)\prime}(x)$ — функция Ханкеля второго рода n-го порядка и ее производная по аргументу соответственно.

В таком же виде представим остальные величины, входящие в уравнение (1).

В частности

$$\sum_{k=0}^{N-1} r_k \delta[a(\varphi-2k\pi/N)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n(\alpha)\, e^{in\varphi} e^{i\alpha z}\, d\alpha; \tag{6}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} m_k \delta'[a(\varphi-2k\pi/N] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n(\alpha)\, e^{in\varphi} e^{i\alpha z}\, d\alpha.$$

Тогда

$$R_n(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{2\pi}\sum_{k=0}^{N-1} r_k(z)\,\delta[a(\varphi-2k\pi/N)]\, e^{-i\alpha z} e^{-in\varphi}\, dz\, d\varphi.$$

Выражая в последней формуле r_k через u_3 и импеданс ребра z_F, после ряда преобразований получим

$$R_n(\alpha) = \frac{i\omega z_F}{2\pi a}\sum_{k=-\infty}^{\infty} U_{3k}(\alpha)\,\frac{1-e^{i2\pi(k-n)}}{1-e^{i\frac{2\pi}{N}(k-n)}}.$$

Дробь, стоящая под знаком суммы, равна нулю при $k-n\neq tN$ (t — целое число) и равна N при $k-n=tN$. Следовательно, она выбирает из бесконечной суммы только те элементы, для которых выполняется условие $k=n+tN$. С учетом этого

$$R_n(\alpha) = \frac{i\omega z_F N}{2\pi a}\sum_{t=-\infty}^{\infty} U_{3n+tN}(\alpha).$$

Аналогично

$$M_n(\alpha) = \frac{i\omega z_m N}{2\pi a^3}\, n \sum_{t=-\infty}^{\infty} (n+tN)\, U_{3n+tN}(\alpha).$$

Теперь подстановка выражений (4)—(6) в (1) позволяет получить систему алгебраических уравнений относительно $U_{in}(\alpha)$, решение которой дает для $U_{3n}(\alpha)$ новую бесконечную систему уравнений:

$$U_{3n}(\alpha) = \frac{1-\mu^2}{Eh}\,\frac{\tau_n(\alpha)}{\Gamma_n(\alpha)}\Bigg[F_n(\alpha) - \frac{i\omega z_F N}{2\pi a}\sum_{t=-\infty}^{\infty} U_{3n+tN}(\alpha) - \\ - \frac{i\omega z_m N}{2\pi a^3}\, n \sum_{t=-\infty}^{\infty} (n+tN)\, U_{3n+tN}(\alpha)\Bigg], \tag{7}$$

где

$$F_n(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} F(z,\varphi)\, e^{-in\varphi} e^{-i\alpha z}\, dz\, d\varphi,$$

$$\tau_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \Gamma_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

a_{ij} — коэффициенты, выражающие результат воздействия операторов L_{ij} системы уравнений (1) на смещение оболочки u_i, записанные в форме (4). Для операторов L_{ij} вида (2) коэффициенты a_{ij} определяются формулами

$$a_{11} = k^2 - \frac{1-\mu}{2a^2}\, n^2 - \alpha^2; \qquad a_{12} = a_{21} = -\frac{1+\mu}{2}\,\alpha n;$$

$$a_{13}=a_{31}=i\alpha\frac{\mu}{a};\qquad a_{22}=k^2-\frac{n^2}{a^2}-\frac{1-\mu}{2}\alpha^2;\qquad a_{23}=a_{32}=in/a^2;$$

$$a_{33}=\frac{1}{a^2}+\varepsilon a^2\left(\alpha^2+\frac{n^2}{a^2}\right)^2-k^2+\frac{1-\mu^2}{Eh}\frac{\rho_0\omega^2}{\gamma}\frac{H_n^{(2)}(\gamma a)}{H_n^{(2)\prime}(\gamma a)};$$

$k=\omega/c$; $c=(E/\rho(1-\mu^2))^{1/2}$ — скорость продольных волн в материале оболочки.

Бесконечная система алгебраических уравнений (7) допускает решение в замкнутом виде. Для этого положим в ней $n=n+tN$ и просуммируем левые и правые части по t в бесконечных пределах. Затем умножим левую и правую части выражения (7) на n, также положим $n=n+tN$ и просуммируем по t. Тогда получим систему уравнений относительно неизвестных сумм $S_{1n}=\sum\limits_{t=-\infty}^{\infty}U_{3n+tN}(\alpha)$ и $S_{2n}=\sum\limits_{t=-\infty}^{\infty}(n+tN)U_{3n+tN}(\alpha)$:

$$S_{1n}\left(1+\frac{\bar z_F}{a^2}\sum_{t=-\infty}^{\infty}\frac{\tau_{n+tN}}{\Gamma_{n+tN}}\right)+S_{2n}\frac{\bar z_m}{a^2}\sum_{t=-\infty}^{\infty}\frac{(n+tN)\tau_{n+tN}}{\Gamma_{n+tN}}=\sum_{t=-\infty}^{\infty}\frac{\bar F_{n+tN}\tau_{n+tN}}{\Gamma_{n+tN}},$$

$$S_{1n}\frac{\bar z_F}{a^2}\sum_{t=-\infty}^{\infty}\frac{(n+tN)\tau_{n+tN}}{\Gamma_{n+tN}}+S_{2n}\left(1+\frac{\bar z_m}{a^2}\sum_{t=-\infty}^{\infty}\frac{(n+tN)^2\tau_{n+tN}}{\Gamma_{n+tN}}\right)=$$

$$=\sum_{t=-\infty}^{\infty}\frac{\bar F_{n+tN}(n+tN)\tau_{n+tN}}{\Gamma_{n+tN}},\qquad(8)$$

где $\bar z_F=i\omega a(1-\mu^2)Nz_F/(2\pi hE)$; $\bar z_m=i\omega(1-\mu^2)z_m/(2\pi haE)$; $\bar F_n=F_n(1-\mu^2)/(Eh)$.

После определения S_{in} из системы уравнений (8), подстановки найденных значений S_{in} в (7), а затем (7) в (5) получим решение поставленной задачи.

Если рассматривать дальнее поле ($k_0r\gg1$), то при вычислении интегралов, входящих в формулу (5), можно воспользоваться асимптотическим представлением функции Ханкеля и методом стационарной фазы. Тогда выражение для акустического давления примет вид

$$p(R,\varphi,\vartheta)=\frac{\rho_0\omega^2e^{-ik_0R}}{\pi k_0R\cos\vartheta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{U_{3n}(-k_0\sin\vartheta)}{H_n^{(2)\prime}(k_0a\cos\vartheta)}e^{in\varphi}e^{i\frac{n\pi}{2}},\qquad(9)$$

где $R=r/\cos\vartheta$; ϑ — угол в диаметральной плоскости между осью r и радиусом-вектором R, проведенным из начала координат в точку наблюдения.

Величина $U_{3n}(-k_0\sin\vartheta)$, входящая в формулу (9), состоит, как видно из выражения (7), из трех слагаемых. Первое слагаемое соответствует безреберной цилиндрической оболочке. Второе и третье слагаемые характеризуют влияние ребер жесткости, причем второй член обусловлен силовым взаимодействием ребер жесткости с оболочкой, а третий член — взаимодействием через моменты, возникающие на линии контакта оболочки с ребрами жесткости.

Из (7) следует также, что наличие продольных ребер жесткости приводит к тому, что при возбуждении моды n в спектре вибрации появляются моды $n+kN$, спектр становится более насыщенным различными формами колебаний. Однако вследствие того, что излучающая способность различных в окружном направлении форм колебаний оболочки не одинаковая, они будут давать различный вклад в излучаемое оболочкой акустическое давление.

Рассмотрим, например, оболочку, имеющую малый волновой размер

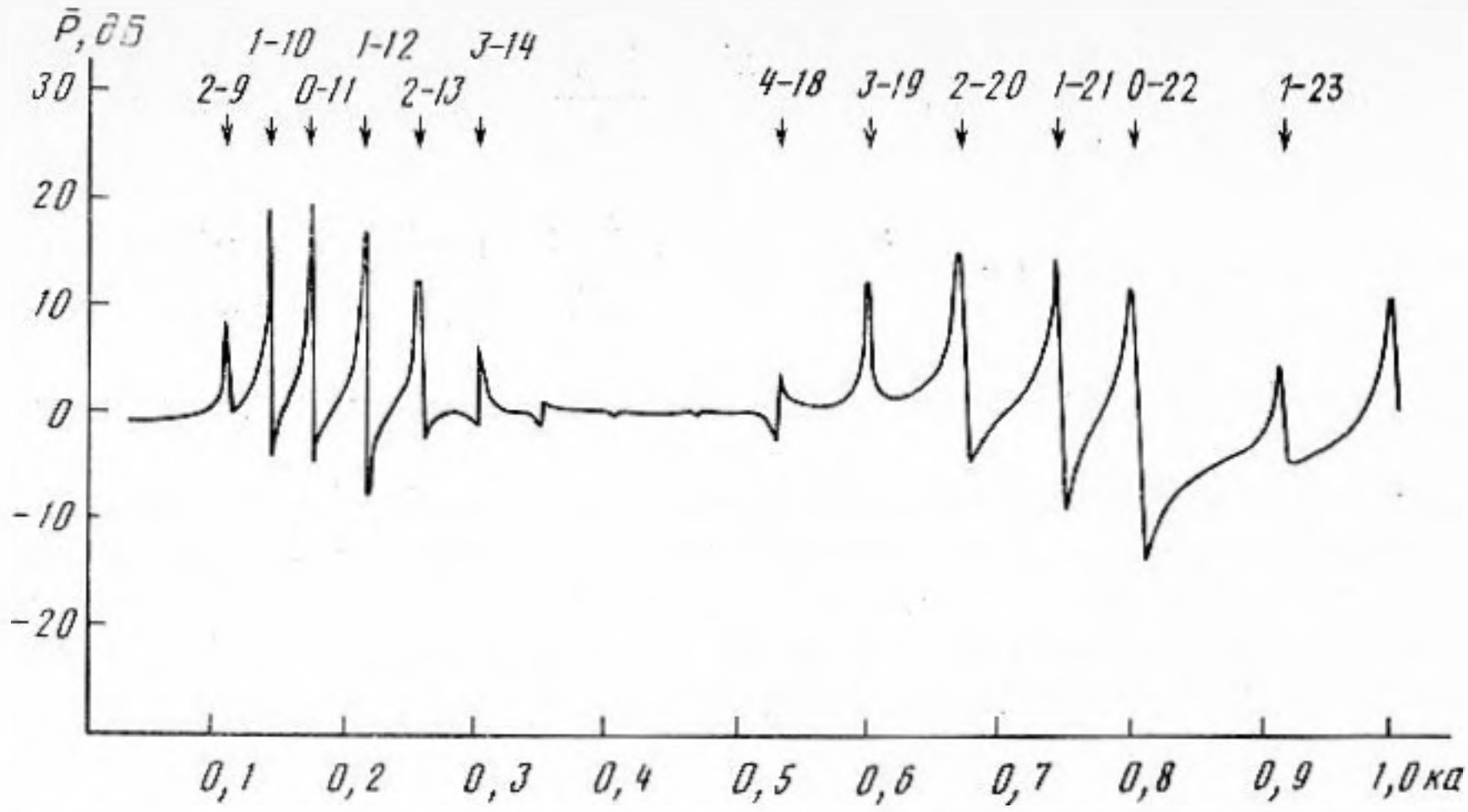

Рис. 1. Акустическое давление, излучаемое оболочкой с продольцыми ребрами (сила приложена к ребру)

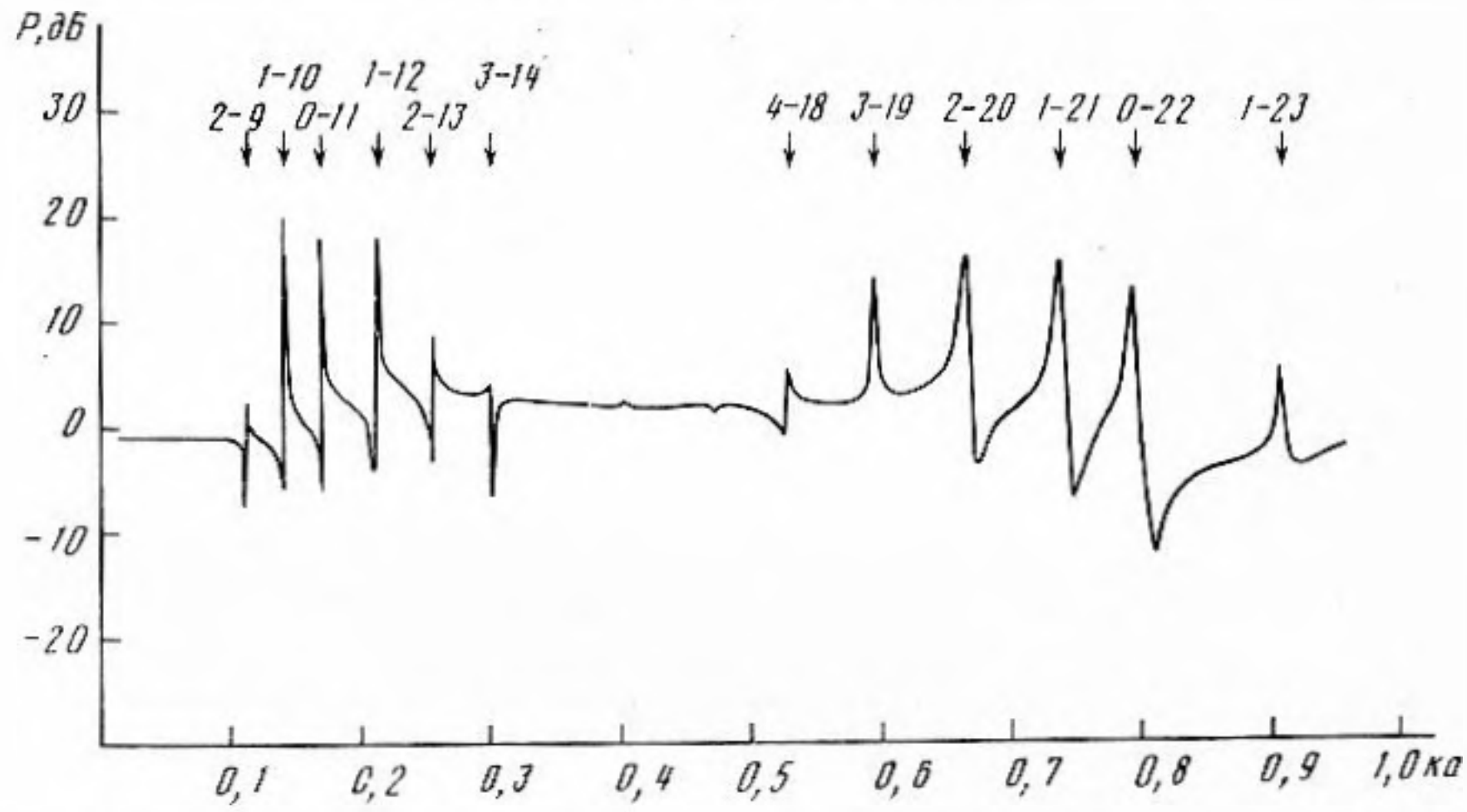

Рис. 2. Акустическое давление, излучаемое оболочкой с продольными ребрами (сила приложена между ребрами)

($k_0a \ll 1$). Применяя асимптотическое представление функции Ханкеля для малого аргумента, из формулы (9) получим следующее выражение для акустического давления, излученного n-й формой колебаний: $p_n \sim U_{3n}(k_0a\cos\vartheta)^{n+1}$, т. е. с увеличением номера n акустическое давление уменьшается по степенному закону. Столь резкое уменьшение на низких частотах излучательной способности оболочки с увеличением номера n формы колебаний в окружном направлении приводит к тому, что даже на резонансных частотах высокопорядковых форм колебаний излучение определяется значительно меньшими по уровню нерезонансными низкопорядковыми формами колебаний оболочки.

В безреберной оболочке различные формы колебаний не связаны между собой. Наличие продольных ребер жесткости приводит, как отмечалось выше, к взаимосвязи форм колебаний, появлению вместе с модой n мод $n+kN$. В результате этого на резонансной частоте моды $n+kN$ излучать акустическую энергию будет мода n, появляющаяся одновременно с модой $n+kN$ и имеющая большую излучающую способность.

Таким образом, равноотстоящие продольные ребра жесткости приводят к перекачке энергии от слабоизлучающих высокопорядковых форм колебаний с большим числом узлов и пучностей по окружности к хорошо излучающим формам с малым числом узлов и пучностей ($n=0$; 1; 2).

На рис. 1 и 2 представлены результаты расчета давления, излученного оболочкой с 11 равноотстоящими продольными ребрами жесткости, в зависимости от безразмерной величины $ka=\omega a/(E/\rho(1-\mu^2))^{1/2}$.

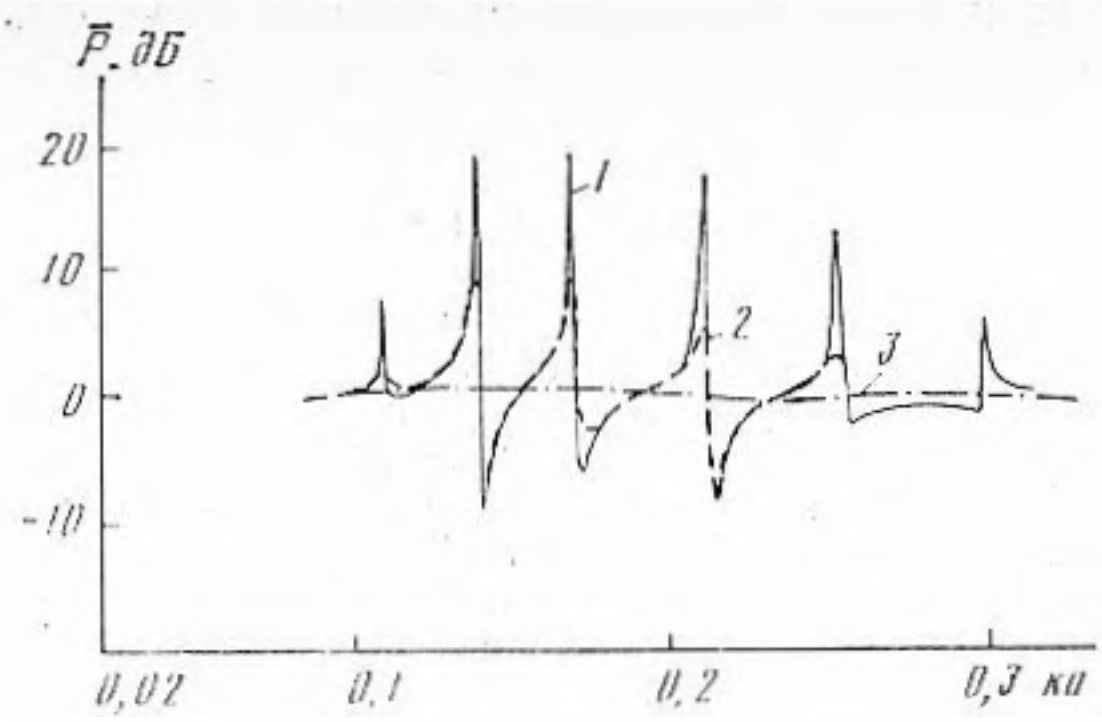

Рис. 3. Влияние потерь на излучаемое давление (сила приложена к ребру; *1* – η=0,004; *2* – η=0,02; *3* – η=0,2)

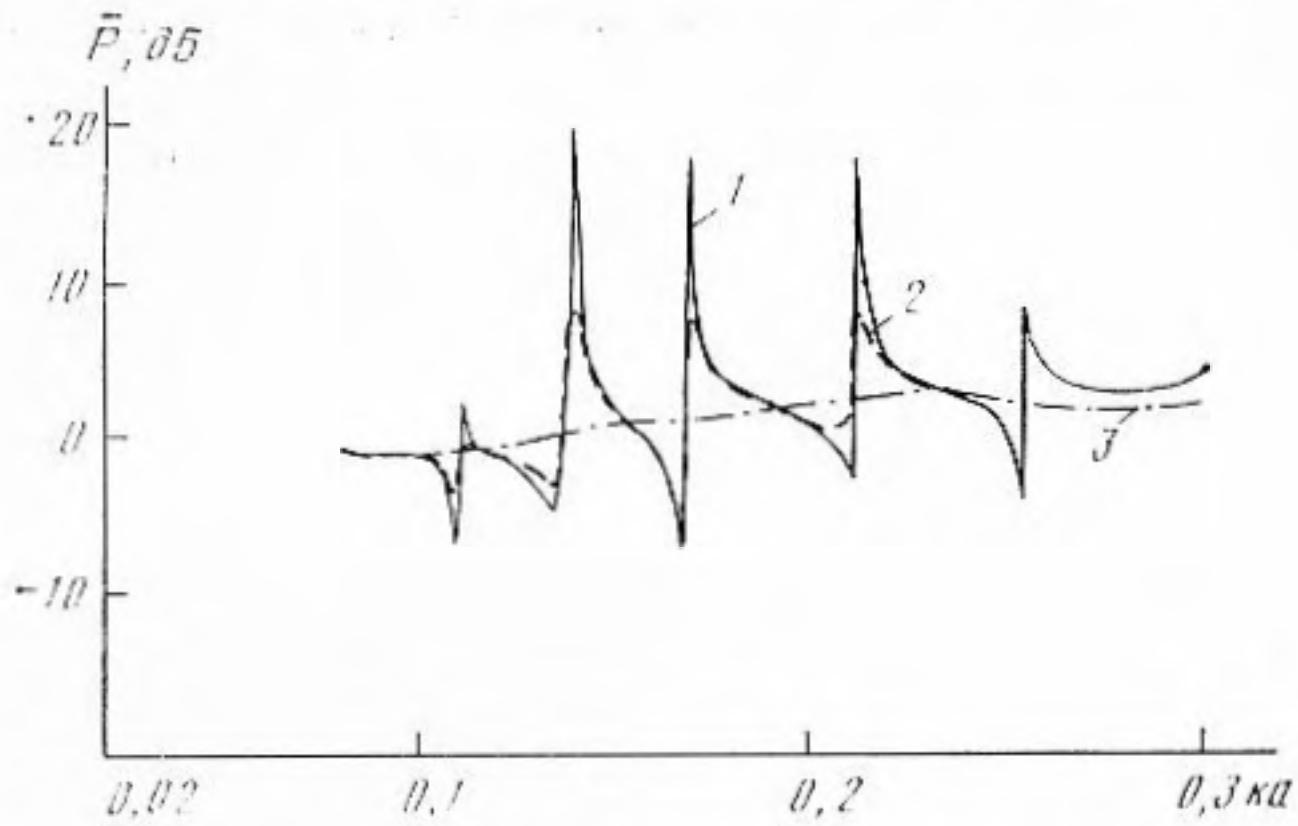

Рис. 4. Влияние потерь на излучаемое давление (сила приложена между ребрами; *1* – η=0,004; *2* – η=0,02; *3* – η=0,2)

Давление нормировано величиной $p_0=k_0F/4\pi R$, равной давлению на оси диполя, имеющего объемный акустический момент $B=F/\rho_0\omega$. При расчете импеданс ребер жесткости определялся по формулам [7]

$$z_F=i\omega\rho S_p\left(1-\frac{E_pI_pk_0^4\sin^4\vartheta}{\omega^2\rho S_p}\right);$$

$$z_m=i\omega\rho I_p/\gamma\,(1-c_k^2\sin\vartheta/c_0^2),$$

где c_k – скорость крутильных колебаний в ребре, γ – коэффициент, учитывающий форму его поперечного сечения.

Коэффициент внутренних потерь учитывался введением комплексного модуля Юнга $E=E_0(1+i\eta)$.

Параметры оболочки и ребер жесткости: $a/h=125$; $I_p/a^4=15{,}4\cdot10^{-8}$; $S_p/a^2=6{,}4\cdot10^{-4}$; $\eta=0{,}004$ (I_p, S_p – момент инерции и площадь поперечного сечения ребер жесткости; η – коэффициент внутренних потерь). Оболочка возбуждается точечной силой, приложенной к одному из ребер жесткости (рис. 1), и к оболочке между двумя ребрами (рис. 2). Давление определено по нормали к оболочке под точкой приложения силы. На рис. 1, 2 над резонансными пиками указана двойная цифра. Цифра перед дефисом означает номер наиболее интенсивной излучающей моды, а после дефиса – номер моды, на которой имеет место резонанс. Видно, что наиболее сильно акустическое давление возрастает, когда резонансная мода подвозбуждает 0,1 и 2 формы колебаний оболочки.

Формы выше $n=2$ практически не приводят к увеличению излучения.

На рис. 3 и 4 представлены результаты расчета акустического давления, излучаемого той же оболочкой, при различных значениях коэффи-

циентов внутренних потерь. Величины максимумов излучения существенно зависят от коэффициента потерь материала оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Евсеев В. Н.* Излучение звука бесконечной пластиной с периодическими неоднородностями // Акуст. журн. 1973. Т. 19. № 3. С. 345–351.
2. *Бернблит М. В.* Излучение звука тонкой упругой цилиндрической оболочкой с ребрами жесткости // Акуст. журн. 1974. Т. 20. № 5. С. 680–689.
3. *Mace R. R.* Sound Radiation from a Plate Renforced by two sets of parallel stiffeners // J. Sound and Vibration. 1980. V. 71. № 3. P. 345–441.
4. *Courtney B.* Burrougs Acoustic radiation from fluid-loaded infinite circular cylinders with doubly periodic ring supports // J. Acoust. Soc. Amer. 1984. V. 75. № 3. P. 715–721.
5. *Власов В. З.* Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М., Л.: ГИТТЛ, 1949.
6. *Авербух А. З., Вейцман Р. И., Генкин М. Д.* Колебания элементов конструкций в жидкости. М.: Наука, 1987.
7. *Ляпунов В. Т., Никифоров А. С.* Виброизоляция в судовых конструкциях. Л.: Судостроение, 1975.

Поступила в редакцию
21.XII.1988