АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXV 1989 Вып. 6

УДК 538.56

ФЛУКТУАЦИИ МОД, ВОЗБУЖДАЕМЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ИСТОЧНИКОМ, В СТОХАСТИЧЕСКОМ АКУСТИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ ©

Артельный В. В., Рагевский М. А.

Исследуются амплитудно-фазовые флуктуации нормальных мод, возбуждаемых распределенным источником в рефракционном акустическом волноводе. Анализируются случаи многократного рассеяния акустической волны на крупномасштабных объемных неоднородностях и на плавно-нерегулярной границе.

Модовое описание акустических полей в стохастических рефракционных волноводах обладает рядом несомненных преимуществ перед тем или иным приближением геометрической акустики, из которых особо следует отметить возможность описания поля на каустиках. Вместе с тем модовый подход существенно сложнее лучевых методов описания статистических характеристик поля и практически не позволяет в строгой формулировке получить конкретные результаты для многомодовых волноводов даже с привлечением современных вычислительных средств. В связи с этим в ряде работ [1—3], где анализировались уравнения для моментов амплитуд нормальных мод, было предложено комбинированное модово-лучевое описание акустического поля в стохастических многомодовых волноводах. Суть этого подхода заключается в вычислении коэффициентов уравнения для моментов амплитуд мод (и в итоге самих корреляторов амплитуд мод) как неких функционалов от спектра флуктуаций вдоль модовых лучей, т. е. лучевых траекторий, имеющих те же углы скольжения, это и волны Бриллюэна, соответствующие анализируемым модам. При этом вклад точек заворота в эти функционалы оказывается пренебрежимо малым, что и позволяет использовать при вычислении коэффициентов уравнений для моментов квазиклассическое приближение.

Найденные таким образом корреляторы амплитуд мод позволяют путем суммирования по точным собственным функциям мод находить статистические характеристики акустического поля в любой точке волновода, в том числе и на каустиках. Аналогичный подход позволяет рассмотреть и амплитудно-фазовые флуктуации нормальных мод. В случае мод, возбуждаемых точечным источником, соответствующие результаты были получены для волновода с крупномасштабными флуктуациями скорости звука [4]. В данной работе будут рассмотрены амплитудно-фазовые флуктуации мод, возбуждаемых распределенным источником акустического поля (линейной антенной). При этом будут проанализированы эффекты рассеяния на случайных крупномасштабных флуктуациях показателя преломления и на плавно-нерегулярной границе.

Рассмотрим сначала флуктуации мод в волноводе с крупномасштабными флуктуациями скорости звука. Будем считать, что показатель преломления $n(z)$ имеет максимум при $z=0$ и $n(z)\to 0$ при $z\to\pm\infty$. Флуктуации квадрата показателя преломления обозначим через $V(x, y, z)$. В дальнейшем предполагается, что они статистически однородны по x, y и имеют среднее значение, равное нулю. Будем считать, что акустическое поле в волноводе возбуждается монохроматическим линейным источником давления, ориентированным по оси z. При этом поле давления $P(x, y, z)$ удовлетворяет стохастическому уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}+k^2[n^2(z)+V(x,y,z)]P=f(z)\delta(x)\delta(y), \qquad (1)$$

где функция $f(z)$ описывает распределение источников давления, $k=\omega/c$ — волновое число. В малоугловом (по горизонтали) приближении поле давления квазиплоской волны, распространяющейся вдоль x, естественно представить в виде

$$P=\sum_p \int d\varkappa b_{p\varkappa}\varphi_p(z)\exp\left(ik_p x+i\varkappa y-\frac{i\varkappa^2}{2k_p}x\right), \tag{2}$$

где k_p и $\varphi_p(z)$ — волновые числа и ортонормированные собственные функции невозмущенной краевой задачи, т. е. $V\equiv 0$. При этом для комплексных амплитуд $b_{p\varkappa}$ в [5] было получено стохастическое уравнение

$$\frac{\partial b_{p\varkappa}}{\partial x}=\frac{ik^2}{4\pi k_p}\sum_{p'}\int dy\,dz\,d\varkappa' V(x,y,z)\varphi_p\varphi_{p'}\times$$
$$\times\exp\left\{i\left[(\varkappa'-\varkappa)y+(k_{p'}-k_p)x+\left(\frac{\varkappa^2}{2k_p}-\frac{\varkappa'^2}{2k_{p'}}\right)x\right]\right\}. \tag{3}$$

В дальнейшем будем рассматривать волновод, в котором локализовано много мод, и для собственных функций $\varphi_p(z)$ будем использовать формулы ВКБ-приближения [6]

$$\varphi_p(z)=(a_p/L_p)^{1/2}(n^2(z)-a_p^2)^{-1/4}\cos(kJ(z,a_p)-\pi/4),$$
$$J(z,a_p)=\int_z^{z_p^+}(n^2(z)-a_p^2)^{1/2}dz, \tag{4}$$

где $a_p=k_p/k$, L_p — длина лучевого цикла, соответствующего моде p. При этом значения a_p определяются из условия

$$k\int_{z_p^+}^{z_p^-}(n^2(z)-a_p^2)^{1/2}dz=\pi(p+1/2), \tag{5}$$

$z_p^{\pm}$ — координаты верхней и нижней точек заворота.

Предварительно обсудим коэффициенты возбуждения мод в регулярном волноводе. Ограничимся при этом случаем достаточно короткой антенны, у которой длина L мала по сравнению с характерным масштабом изменения $n(z)$. Наиболее типичным является распределение источников давления по апертуре в виде $f(z)=A\exp[ik(z-z_0)]$, где z_0 — координата центра антенны. Учитывая лишь те моды, для которых антенна находится между точками заворота, для коэффициентов возбуждения мод b_p нетрудно получить формулу

$$b_p=\frac{AL}{2}\left(\frac{a_p}{L_p}\right)^{1/2}(n^2(z_0)-a_p^2)^{-1/4}\left\{\frac{\sin[(\bar{k}+\sigma_p)L/2]}{(\bar{k}+\sigma_p)L/2}\exp[ikJ(z_0,a_p)-i\pi/4]+\right.$$
$$\left.+\frac{\sin[(\bar{k}-\sigma_p)L/2}{(\bar{k}-\sigma_p)L/2}\exp[-ikJ(z_0,a_p)+i\pi/4]\right\}, \tag{6}$$

$$\sigma_p\equiv k(n^2(z_0)-a_p^2)^{1/2}.$$

Это выражение можно представить в виде

$$b_p=B_p^+\exp\{i[kJ(z_0,a_p)-\pi/4]\}+B_p^-\exp\{i[-kJ(z_0,a_p)+\pi/4]\}, \tag{7}$$

где $B_p^{\pm}$ не зависят от $\varkappa$ в силу аксиальной симметрии и вдали от точек заворота являются плавными функциями номера моды (в сравнении с быстро меняющимися экспонентами). Рассмотренное распределение $f(z)$ соответствует формированию угловой диаграммы направленности антенны с равномерным амплитудно-фазовым распределением. В волноводе могут быть оптимальными более сложные распределения источников по апер-

туре; тем не менее в случае широкого класса практически интересных ситуаций коэффициенты возбуждения b_p могут быть представлены в виде (7), где функции $B_p^{\pm}$, вообще говоря, комплексны и плавно зависят от номера моды p (по сравнению с функциями $\exp(\pm ikJ(z_0, a_p))$.

В стохастическом волноводе решение, согласно основному предположению метода плавных возмущений [7], ищем в виде

$$b_{p\varkappa}(x)=F_p^{+}\exp\{i[kJ(z_0, a_p)+X_{p\varkappa}^{+}(x)-\pi/4]\}+ \\ +F_p^{-}\exp\{i[-kJ(z_0, a_p)+X_{p\varkappa}^{-}(x)-\pi/4]\}, \tag{8}$$

$$F_p^{\pm}=\left(\frac{a_p}{L_p}\right)^{1/2}\int\limits_{-L/2}^{L/2}\frac{f(z)}{(n^2(z)-a_p^2)^{1/4}}\exp[\pm ikJ(z, a_p)\mp ikJ(z_0, a_p)]dz,$$

где $X_{p\varkappa}^{\pm}(0)=0$. В силу линейности стохастической начальной задачи для $b_{p\varkappa}(x)$ ее решение можно представить в виде суперпозиции решений, соответствующих начальным условиям при $B_p^{+}=0$ и $B_p^{-}=0$. Рассмотрим к примеру решение в случае $B_p^{-}=0$. При этом для $X_{p\varkappa}^{+}(x)$ имеем уравнение

$$\frac{dX_{p\varkappa}^{+}}{dx}=\frac{k^2}{4\pi k_p F_p^{+}}\sum_{p'}\int dy\,dz\,d\varkappa' V(x, y, z)F_{p'}^{+}\varphi_p\varphi_{p'}\times \\ \times\exp\left\{i\left[(\varkappa-\varkappa')y+(k_{p'}-k_p)x+\left(\frac{\varkappa^2}{2k_p}-\frac{\varkappa'^2}{2k_{p'}}\right)x+\right.\right. \\ \left.\left.+kJ(z_0, a_{p'})-kJ(z_0, a_p)+X_{p'\varkappa'}^{+}-X_{p\varkappa}^{+}\right]\right\}. \tag{9}$$

В дальнейшем ограничимся тем же случаем ненасыщенных флуктуаций, что и в работе [7], т. е. предположим

$$|X_{p'\varkappa'}-X_{p\varkappa}|\ll 1. \tag{10}$$

Соответствующие условия будут обсуждаться ниже. Интегрируя по $\varkappa'$, получим

$$\frac{dX_{p\varkappa}^{+}}{dx}=\frac{k^2}{2\sqrt{2\pi}xF_{p'}^{+}}\sum_{p'}\sqrt{k_{p'}}\int dy\,dz V(x, y, z)F_{p'}^{+}\varphi_p\varphi_{p'}\times \\ \times\exp\left\{i\left[(k_{p'}-k_p)x+\frac{k_{p'}}{2x}y^2+\frac{\varkappa^2}{2k_p}x-\varkappa y+\right.\right. \\ \left.\left.+kJ(z_0, a_{p'})-kJ(z_0, a_p)-\frac{\pi}{4}\right]\right\}. \tag{11}$$

После подстановки в это выражение собственных функций $\varphi_p(z)$ согласно (4), переходя к интегрированию по p', имеем выражение, которое можно вычислить методом стационарной фазы по переменным p', y и z. В результате получим

$$X_{p\varkappa}^{+}=\frac{k^2}{2k_p}\int\limits_0^x V(x', y_p(x'), z_p^{+}(x'))dx', \tag{12}$$

причем точки стационарной фазы соответствуют лучевой траектории, выходящей из центра антенны z_0 вверх с углом скольжения $\operatorname{arctg}(\sigma_p/k_p)$ в плоскости $y=y_p(x)\equiv\varkappa x/k_p$. При этом вертикальная координата $z_p^{+}(x)$ связана с углом скольжения $\theta_p^{+}(x)$ известным соотношением $n(z_p^{+}(x))\cdot\cos\theta_p^{+}(x)=a_p$. Таким образом, флуктуации моды определяются сравнительно узкой областью волновода вблизи данной лучевой траектории.

Чтобы учесть эффекты дифракции, необходимо более аккуратное вычисление суммы по p' в выражении (11). Это можно проделать, используя хорошо известный переход от модового описания поля к лучевому [8], основанный на конструктивной интерференции мод вдоль лучевой траектории. Производя суммирование по p' по формуле Пуассона, вычисляя

возникающий при этом дополнительный интеграл методом стационарной фазы и затем разлагая в полученном таким образом выражении показатель экспоненты в ряде Тейлора по z, y вблизи z_p^+, y_p до квадратичных членов включительно, получим

$$X_{p\varkappa}^+ = \frac{k^2}{2\sqrt{2\pi k_p L_p}} \int_0^x dx' \left[x' \frac{\partial z_p^+(x')}{\partial p} \operatorname{tg} \theta_p^+(x') \right]^{-1/2} \times$$
$$\times \iint_{-\infty}^{\infty} dy\, dz V(x', y, z) \exp\left\{ i \frac{k_p}{2x} (y - y_p(x'))^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{i\pi (z - z_p^+(x'))^2}{L_p \operatorname{tg} \theta_p^+(x') \partial z_p^+(x')/\partial p} - i \frac{\pi}{4} \left(1 - \operatorname{sign} \theta_p^+(x') \frac{\partial z_p^+(x')}{\partial p} \right) \right\}. \tag{13}$$

Выражение для $X_{p\varkappa}^-$ имеет вид, аналогичный (13), где вместо z_p^+ и θ_p^+ стоят z_p^- и θ_p^-, соответствующие аналогичной лучевой траектории, выходящей из центра антенны в плоскости $y = y_p(x)$ по углам $\operatorname{arctg}(\sigma_p/k_p)$ вниз.

Сформулируем теперь условия применимости полученного выражения. Первое условие связано с использованием модово-лучевой аналогии при переходе от (11) к (13). При суммировании в (11) по p' с помощью формулы Пуассона и вычислении возникающего при этом интеграла методом стационарной фазы необходимо, чтобы число $\Delta p_{\text{инт}}$ конструктивно интерферирующих вдоль лучевой траектории мод было меньше числа мод $\Delta p_{\text{ант}}$, эффективно возбуждаемых антенной. Согласно (6), для $\Delta p_{\text{ант}}$ можно получить оценку $\Delta p_{\text{ант}} \approx (L_p/L) \operatorname{tg} \theta_p(z_0)$. С другой стороны, для числа эффективно интерферирующих мод на расстоянии x имеем [8] оценку $\Delta p_{\text{инт}} \approx \approx L_p (x dL_p/dp)^{-1/2}$. В результате получаем условие

$$L \ll \sqrt{x dL_p/dp} \operatorname{tg} \theta_p(z_0). \tag{14}$$

Это неравенство накладывает определенные ограничения на вид профиля показателя преломления.

Второе условие связано с неравенством (10), что, как известно, требует ненасыщенности флуктуаций [7]. Как уже отмечалось в [4], это условие приводит к тем же соотношениям между дисперсией фазовых набегов мод и их дифракционным параметром, что и для квазиплоских волн, распространяющихся вдоль лучевых траекторий.

Рассмотрим теперь флуктуации нормальных мод в многомодовом волноводе со случайно-нерегулярной акустически мягкой границей. Вертикальные случайные отклонения границы $z - z_г = \zeta(x, y)$ от среднего уровня $z_г$ будем считать крупномасштабными (по сравнению с длиной акустической волны) и статистически однородными по x и y. Дисперсия смещений $\langle \zeta^2 \rangle$ предполагается малой, чтобы параметр Рэлея для волн Бриллюэна, отвечающих рассматриваемым модам, был меньше единицы

$$k \sqrt{\langle \zeta^2 \rangle} \sin \theta_p \ll 1. \tag{15}$$

Для поля давления будем по-прежнему использовать разложение (2).

В числе мод, возбуждаемых антенной, те моды, у которых верхняя точка заворота z_p^+ находится ниже границы $z = z_г$, практически не испытывают влияния нерегулярной границы, так как для них неровности находятся в «зоне тени». Такие моды в дальнейшем не обсуждаем, так как их флуктуации пренебрежимо малы. Для тех мод, которые имеют вблизи поверхности осциллирующий характер, в области $z_p^- < z \leqslant z_0$ можно использовать выражение

$$\varphi_p(z) = (a_p/L_p)^{1/2} (n^2(z) - a_p^2)^{-1/4} \cos[kJ(z, a_p) - \pi/2], \tag{16}$$

где фаза $J(z, a_p)$ отсчитывается от $z = z_г$. Таким образом, отличие от (4) состоит лишь в другом фазовом сдвиге ($\pi/2$ вместо $\pi/4$). Аналогично и в условиях квантования (5) необходимо заменить $\pi(p + 1/2)$ на $\pi(p + 3/4)$.

Будем считать, что справедливы все приведенные выше рассуждения о коэффициентах возбуждения мод в регулярном волноводе ($\zeta(x, y)=0$). Формулы (6), (7) остаются справедливыми с заменой в экспонентах фазовых сдвигов $\pm\pi/4$ на $\pm\pi/2$. При $\zeta(x, y)\neq 0$ для поля давления квазиплоской волны, распространяющейся по x, по-прежнему используем разложение (2), где вместо $\pm\pi/4$ стоит $\pm\pi/2$. Для амплитуды $b_{p\varkappa}(x)$ в [9] получено уравнение, которое можно записать в виде

$$\frac{db_{p\varkappa}}{dx}=\frac{i}{4\pi k_p}\frac{d\varphi_p(z_\text{г})}{dz}\sum_{p'}\frac{d\varphi_{p'}(z_\text{г})}{dz}\int d\varkappa'\,dy\zeta(x,y)\,b_{p'\varkappa'}\times$$
$$\times\exp\left\{i(\varkappa'-\varkappa)y+i(k_{p'}-k_p)x+i\left(\frac{\varkappa^2}{2k_p}-\frac{\varkappa'^2}{2k_{p'}}\right)x\right\}. \tag{17}$$

Представим $b_{p\varkappa}$ в виде (8) с заменой $\pm\pi/4$ на $\pm\pi/2$. Рассмотрим частное решение стохастического уравнения (17), соответствующее начальным условиям $B_p^-=0$. Для $X_{p\varkappa}^+(x)$ с учетом (8), (16) получим

$$\frac{dX_{p\varkappa}^+}{dx}=\frac{k^2}{\pi k_p F_p^+}\sum_{p'}\left(\frac{a_p a_{p'}}{L_p L_{p'}}\right)^{1/2}((1-a_p^2)(1-a_{p'}^2))^{1/4}F_{p'}^+\times$$
$$\times\int dx'\,dy\zeta(x,y)\exp\left\{i\left[(k_{p'}-k_p)x+(\varkappa'-\varkappa)y+\left(\frac{\varkappa^2}{2k_p}-\frac{\varkappa'^2}{2k_{p'}}\right)x+\right.\right.$$
$$\left.\left.+kJ(z_0,a_{p'})-kJ(z_0,a_p)+X_{p'\varkappa'}^+-X_{p\varkappa}^+\right]\right\}. \tag{18}$$

Ограничимся, как и в случае объемных неоднородностей, исследованием ненасыщенных флуктуаций акустического поля, т. е. будем считать, что выполняется условие (10). Проводя после этого в (18) интегрирование по $\varkappa'$, получим

$$\frac{dX_{p\varkappa}^+}{dx}=\frac{k^2}{k_p F_p^+}\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\sum_{p'}\left(\frac{a_p a_{p'}}{L_p L_{p'}}\right)((1-a_p^2)(1-a_{p'}^2))^{1/4}F_{p'}^+\times$$
$$\times\int dy\zeta(x,y)\exp\left\{i\left[kJ(z_0,a_{p'})-kJ(z_0,a_p)+(k_{p'}-k_p)x-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\varkappa y+\frac{k_{p'}}{2x}y^2+\frac{\varkappa^2}{2k_p}x-\pi/4\right]\right\}. \tag{19}$$

Если проинтегрировать (19) по x и перейти от суммирования по p' к интегрированию, $X_{p\varkappa}^+$ будет выражаться в виде трехкратного интеграла по x, y, p'.

Вычисление этого интеграла методом стационарной фазы приводит к выражению

$$X_{p\varkappa}^+(x)=2k\sum_{j=0}^{N}|\sin\theta_p(z_\text{г})|\,\zeta(x_{pj}^+,y_{pj}^+). \tag{20}$$

Здесь x_{pj}^+ и y_{pj}^+ — координаты точек отражения от границы $z=z_\text{г}$ луча, выпущенного из центра антенны в плоскости $y=\varkappa x/k_p$ вверх с углом скольжения $\theta_p=\operatorname{arctg}(\sigma_p/k_p)$ (напомним, что σ_p и k_p — вертикальное при $z=z_0$ и горизонтальное волновые числа моды p).

Таким образом, вклад во флуктуации моды дают сравнительно узкие области границы вблизи N точек отражения модового луча от нерегулярной границы. Чтобы учесть эффекты дифракции, необходимо в правой части (19), проинтегрированной по x, произвести суммирование по p' с использованием формулы Пуассона, вычислить возникающий при этом интеграл методом стационарной фазы и разложить в результирующем выражении показатель экспоненты в ряд Тэйлора по x, y вблизи x_{pj}^+,

y_{pj}^+ до квадратичных членов. В итоге получим

$$X_{p\varkappa}^+=k\sum_{j=0}^{N}\left(\frac{2k_p(1-a_p^2)}{\pi x_{pj}^+L_p\,\partial x_{pj}^+/\partial p}\right)^{1/2}\int\zeta(x',y)\,dx'\,dy\,\exp\left\{i\left[\frac{k_p(y-y_{pj}^+)^2}{2x_{pj}^+}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\pi(x'-x_{pj}^+)^2}{L_p\,\partial x_{pj}^+/\partial p}-\frac{\pi}{4}\left(1-\operatorname{sign}\frac{\partial x_{pj}^+}{\partial p}\right)\right]\right\}. \tag{21}$$

Точно такое же выражение можно получить для величины $X_{p\varkappa}^-(x)$ в случае начальных условий $B_p^+=0$. При этом в (21) вместо величин x_{pj}^+ должны стоять величины x_{pj}^-, т. е. координаты точек отражения луча, выпущенного в плоскости $y=x\varkappa/k_p$ из центра антенны под тем же углом $\theta_p=\operatorname{arctg}(\sigma_p/k_p)$, но уже вниз. После определения величин $X_{p\varkappa}^\pm$ флуктуации комплексной амплитуды моды при произвольных начальных условиях находятся по формуле (8). Для интерпретации (11) удобно ввести понятие френелевских радиусов

$$\rho_{xj}^\pm=\sqrt{L_p|\partial x_{pj}^\pm/\partial p|},\ \rho_{yj}^\pm=\sqrt{2\pi x_{pj}^\pm/k_p}, \tag{22}$$

которые аналогично [4] определяют размеры области вблизи данной точки отражения, где неровности поверхности эффективно влияют на флуктуации моды p. В том случае, когда $\rho_{xj}^\pm$, $\rho_{yj}^\pm$ и масштабы корреляции неровностей L_x, L_y удовлетворяют условию

$$\rho_{xj}^\pm\ll L_x,\quad \rho_{yj}^\pm\ll L_y, \tag{23}$$

интегралы в формуле (21) можно взять методом стационарной фазы. При этом получается выражение (20), т. е. геометроакустический фазовый набег вдоль модового луча. Для применимости полученных выражений необходимо, чтобы число мод, эффективно возбуждаемых антенной, превышало число конструктивно интерферирующих мод, т. е. выполнялось (14). Кроме того, поскольку рассматривались ненасыщенные флуктуации, дифракционные параметры $\Lambda_x=\rho_x^2/(2\pi L_x^2)$, $\Lambda_y=\rho_y^2/(2\pi L_y^2)$ и среднеквадратичное значение фазовых флуктуаций Φ должны удовлетворять условиям

$$\begin{aligned}\Lambda_{x,y}\Phi\ll 1 \text{ при } \Lambda_{x,y}<1,\\ \Phi\ll 1 \text{ при } \Lambda_{x,y}>1.\end{aligned} \tag{24}$$

Рассмотрим теперь вторые моменты комплексных амплитуд, предполагая, что неоднородности являются гауссовыми. Определим локальный спектр флуктуаций показателя преломления, плавно зависящий от z:

$$F(k_x,k_y,k_z,z)=$$
$$=(2\pi)^{-3}\int B(x',y',z',z)\exp[-i(k_xx'+k_yy'+k_zz')]\,dx'\,dy'\,dz', \tag{25}$$

где $B(x',y',z',z)$ — функция корреляции. В тех случаях, когда угол наклона к горизонтали лепестка антенны больше его эффективной ширины, имеем (в зависимости от ориентации лепестка) либо $F_p^+\gg F_p^-$, либо, наоборот, $F_p^-\gg F_p^+$. При этом в силу гауссовости флуктуаций

$$\langle b_{p\varkappa}^\pm(b_{p'\varkappa'}^\pm)^*\rangle=F_p^\pm(F_{p'}^\pm)^*\exp[ikJ(z_0,a_p)-ikJ(z_0,a_{p'})-$$
$$-\langle(X_{p\varkappa}^\pm-(X_{p'\varkappa'}^\pm)^*)^2\rangle], \tag{26}$$

$$\langle b_{p\varkappa}^\pm b_{p'\varkappa'}^\pm\rangle=F_p^\pm F_{p'}^\pm\exp\left[ikJ(z_0,a_p)+ikJ(z_0,a_{p'})-\right.$$
$$\left.-i\frac{\pi}{2}-\langle(X_{p\varkappa}^\pm+X_{p'\varkappa'}^\pm)^2\rangle\right]. \tag{27}$$

Таким образом, ответ выражается через корреляторы $\langle X_{p\varkappa}X_{p'\varkappa'}\rangle$ и

$\langle X_{p\varkappa} X^*_{p'\varkappa'}\rangle$, для которых можно получить выражения [1]

$$\langle X_{p\varkappa}{}^{\pm} X^{\pm}_{p'\varkappa'}\rangle = \frac{\pi k^2}{2a_p a_{p'}} \int_0^x dx \int F\left(-\frac{\varkappa+\varkappa'}{2k_p} k_y - \frac{\operatorname{tg}\theta_p{}^{\pm}+\operatorname{tg}\theta_{p'}{}^{\pm}}{2} k_z, k_y, k_z, z\right)\times$$
$$\times\exp\left[-i\frac{x}{k_p}k_y{}^2 - i\frac{k_z{}^2}{2\pi}L_p\left(\frac{\partial z_p{}^{\pm}}{\partial p}\operatorname{tg}\theta_p{}^{\pm}\right)+ik_y(y_p{}^{\pm}-y_{p'}{}^{\pm})+\right.$$
$$\left.+ik_z(z_p{}^{\pm}-z_{p'}{}^{\pm})\,dk_y\,dk_z,\right. \tag{28}$$

$$\langle X_{p\varkappa}{}^{\pm}(X_{p'\varkappa'})^{*}\rangle = \frac{\pi k^2}{2a_p a_{p'}} \int_0^x dx \int F\left(-\frac{\varkappa+\varkappa'}{2k_p} k_y - \frac{\operatorname{tg}\theta_p{}^{\pm}+\operatorname{tg}\theta_{p'}{}^{\pm}}{2} k_z, k_y, k_z, z\right)\times$$
$$\times\exp[ik_z(z_p{}^{\pm}-z_{p'}{}^{\pm})+ik_y(y_p-y_{p'})]\,dk_y\,dk_z, \tag{29}$$

где пренебрегалось отличием величин

$$L_p\frac{\partial z_p{}^{\pm}}{\partial p}\operatorname{tg}\theta_p{}^{\pm}$$

для мод p и p', а также изменением их на масштабе корреляции неоднородностей. В случае рассеяния на нерегулярной границе имеем соответственно

$$\langle X_{p\varkappa}{}^{\pm} X^{\pm}_{p'\varkappa'}\rangle = 4k^2\sqrt{(1-a_p{}^2)(1-a_{p'}{}^2)}\sum_{j=0}^{N}\int F(k_x, k_y)\exp\left[-i\frac{k_y{}^2}{k_p}x_{pj}{}^{\pm}-\right.$$
$$\left.-i\frac{k_x{}^2}{2\pi}L_p\frac{\partial x_{pj}{}^{\pm}}{\partial p}+ik_x(x_{pj}{}^{\pm}-x_{p'y}{}^{\pm})+ik_y(y_{pj}{}^{\pm}-y_{p'j}{}^{\pm})\right]dk_x\,dk_y, \tag{30}$$

$$\langle X_{p\varkappa}{}^{\pm}(X^{\pm}_{p'\varkappa'})^{*}\rangle = 4k^2\sqrt{(1-a_p{}^2)(1-a_{p'}{}^2)}\sum_{j=0}^{N}\int F(k_x, k_y)\times$$
$$\times\exp[ik_x(x_{pj}{}^{\pm}-x_{p'j}{}^{\pm})+ik_y(y_{pj}{}^{\pm}-y_{p'j}{}^{\pm})]\,dk_x\,dy_y, \tag{31}$$

где предполагается, что горизонтальное разнесение лучевых траекторий мод p и p' (на расстоянии x) мало по сравнению с длиной лучевого цикла и пренебрегается отличием для этих мод величин $L_p\partial x_{pj}{}^{\pm}/\partial p$. Выделяя стандартным образом [7] в приведенных выражениях реальные и мнимые части, нетрудно получить в явном виде функции корреляции фаз и амплитуд мод. Таким образом, на основании (26)–(31) можно анализировать дисперсию и функции корреляции амплитудно-фазовых флуктуаций. Не приводя конкретных расчетов, которые являются предметом отдельной работы, отметим, что характер флуктуаций мод, возбуждаемых линейной антенной и точечным источником, существенно различен. В случае точечного источника [4] вследствие интерференции волн Бриллюэна, идущих вверх и вниз от источника, уже в области ненасыщенных флуктуаций возникают сильные флуктуации отдельных мод. Этот эффект отсутствует для мод, возбуждаемых антенной, что приводит к качественно другому поведению их амплитудно-фазовых флуктуаций и межмодовых корреляций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Артельный В. В., Горская Н. С., Раевский М. А.* Статистические характеристики нормальных волн в случайно-неоднородных океанических волноводах: Препринт № 148. Горький.: ИПФ АН СССР, 1986.
2. *Артельный В. В., Кукушкин В. Д., Раевский М. А.* Об энергетических и корреляционных характеристиках низкочастотных акустических волн в подводных звуковых каналах // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 5. С. 591–597.
3. *Артельный В. В., Раевский М. А.* Об эффективном упрощении уравнений для мо-

[1] Отметим, что аналогичные выражения, приведенные в [4], содержат ряд неточностей.

ментов амплитуд нормальных мод в случайно-неоднородных волноводах // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30. № 7. С. 866–874.
4. *Вировлянский А. Л., Костерин А. Г.* Метод плавных возмущений для описания полей в многомодовых волноводах // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 4. С. 599–605.
5. *Артельный В. В., Раевский М. А.* О статистических характеристиках нормальных мод в волноводе с объемными неоднородностями // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27. № 9. С. 1142–1148.
6. *Бреховских Л. М., Лысанов Ю. П.* Теоретические основы акустики океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1982.
7. *Munk W. H., Zachariazen F.* A propagation through a fluctuating stratified ocean // J. Acoust. Soc. Amer. 1976. V. 59. № 4. P. 818–838.
8. *Алувэлья Д. С., Келлер Д. Б.* Точные и асимптотические представления звукового поля // Распространение волн и подводная акустика. М.: Мир, 1980.
9. *Зайцев В. Ю., Раевский М. А.* О трансформации пространственно-временного спектра волнового поля в волноводе со случайной границей // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. № 1. С. 65–75.

Институт прикладной физики
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
3.X.1988