TOM XXXV

1989

Вып. 6

УДК 534.321

ИЗУЧЕНИЕ ЗВУКА ЖЕСТКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОЙ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ [©]

Васовский В. Г., Гомилко А. М., Мелешко В. В.

Методом частичных областей получено аналитическое решение задачи об излучении звука стенками синфазно колеблющейся открытой цилиндрической оболочки конечной длины. Основываясь на парных интегральных представлениях для потенциала скорости, задача сведена к сингулярному интегральному уравнению первого рода на конечном промежутке, допускающему эффективное численное решение. В широком диапазоне изменения волновых чисел и геометрических параметров оболочки проведен анализ резонансных явлений, связанных с ее впутренним объемом, характеристик мощности излучения звука и его направленности.

Исследование звукового поля, создаваемого конечным отрезком жесткой цилиндрической оболочки, является одной из наиболее интересных задач акустики, имеющей многочисленные приложения. Среди этих исследований можно выделить как классические мемуары Гельмгольца [1] и Рэлея [2] по теории органных труб, так и современный анализ водозаполненных пьезокерамических излучателей [3, 4]. В электродинамике родственная по постановке задача рассмотрена в статье [5]. Конечные размеры излучателя и наличие на нем острых кромок обусловливают значительные трудности в построении аналитического решения соответствующей граничной задачи. В недавно опубликованной статье [6] граничная задача излучения звука конечной открытой трубой сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. В данной работе, основанной на [7], предлагается иной аналитический подход к решению такой граничной задачи, учитывающий специфику условий на ребре. Проведен анализ энергетической эффективности излучения звука в широком дианазоне изменения частот и геометрических параметров оболочки.

Рассмотрим конечную жесткую цилиндрическую оболочку, определяемую соотношениями r=a, $0 \le \chi \le 2\pi$, $|z| \le h$ в цилиндрической системе координат (рис. 1), расположенную в акустическом пространстве, характеризуемом плотностью ρ и скоростью звука c. Толщиной стенок оболочки по сравнению с длиной звуковой волны пренебрегаем и считаем, что оболочка совершает гармонические осесимметричные осциллирующие колебания, при которых наружная и внутренняя стенки колеблются синфазно, имея нормальную компоненту скорости $v_0 f(z) \exp(-i\omega t)$. Задание на поверхности излучателя значения нормальной колебательной скорости, не зависящей от реакции среды, идеализирует реальные источники звука. Однако для выяснения основных особенностей звукового поля решение такой модельной задачи имеет определяющее значение.

Акустический потенциал $\varphi(r,z)$ (здесь и далее множитель $\exp(-i\omega t)$ опускается) осесимметричного звукового поля удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца в цилиндрических координатах

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k^2 \varphi = 0, \quad k = \omega/c. \tag{1}$$

и граничным условиям

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial r}\Big|_{r=a+0} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}\Big|_{r=a-0} = v_0 f(z), \quad |z| \leq h. \tag{2}$$

а также условию конечности акустической энергии в окрестностях кромок

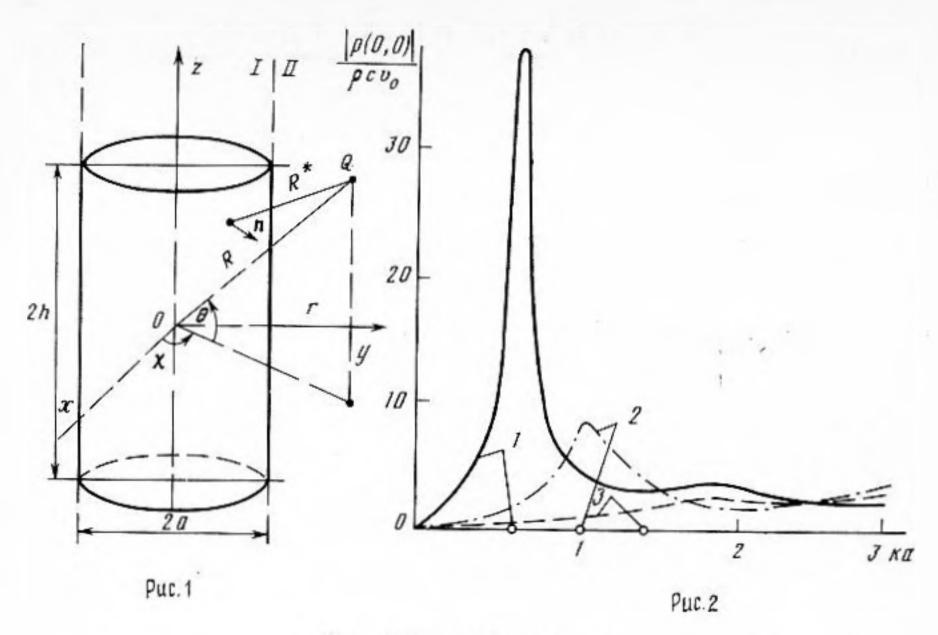


Рис. 1. Геометрия задачи

Рис. 2. Давление в центре оболочки: 1-h/a=0.5, 2-h/a=1, 3-h/a=2 Кружками на оси абсцисс обозначены значения первого продольного резопанса внутреннего объема оболочки с учетом поправки Рэлея для тех же значений h/a

r=a, |z|=h и условию излучения на бесконечности. Амплитудные значения давления и вектора колебательной скорости выражаются через потенциал φ соотношениями $p=-i\omega\rho\varphi$ и $\mathbf{v}=-\nabla\varphi$.

Решение поставленной граничной задачи строим по методу частичных областей [8], разделяя цилиндрической поверхностью r=a акустическое пространство на две подобласти I и II (рис. 1). В каждой из них представляем потенциал звукового поля в виде интегралов Фурье

$$\varphi_{1}(r,z) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha) J_{0}(qz) e^{i\alpha z} d\alpha, \quad r \leq a, \quad |z| < \infty,$$

$$\varphi_{2}(r,z) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\alpha) H_{0}^{(1)}(qr) e^{i\alpha z} d\alpha, \quad r \geq a, \quad |z| < \infty,$$

$$q = \begin{cases}
\sqrt[4]{k^{2} - \alpha^{2}}, & |\alpha| \leq k, \\
i\sqrt[4]{k^{2} - \alpha^{2}}, & |\alpha| > k,
\end{cases}$$
(3)

где $A(\alpha)$, $B(\alpha)$ — неизвестные комплекснозначные функции, а J_{α} и $H_{\nu}^{(1)}$ означает соответственно функции Бесселя и Ханкеля первого рода порядка ν . Представление (3) позволяет удовлетворить уравнению (1) в каждой из частичных областей и условию излучения. Для определения функций $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ необходимо использовать условия непрерывности звукового поля по давлению $\phi_1 = \phi_2$ и нормальной составляющей скорости $\partial \phi_1/\partial r = \partial \phi_2/\partial r$ на границе частичных областей r=a, |z|>h, а также граничное условие (2). Так как внутренняя и внешняя стенки оболочки по условию колеблются синфазно, то равенство нормальных составляющих скоростей имеет место на всей поверхности r=a. Это обстоятельство в силу свойств интеграла Фурье дает связь между функциями $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$:

$$A(\alpha) = B(\alpha) H_1^{(1)}(qa) / J_1(qa). \tag{4}$$

Условие непрерывности давления с учетом (4) и тождества $J_1(qa)H_0^{(1)}(qa)-J_0(qa)H_1^{(1)}(qa)=2i/(\pi qa)$, а также граничное условие (2).

приводят к парному интегральному уравнению относительно функции $B(\alpha)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(\alpha) \frac{e^{i\alpha z}}{qaJ_1(qa)} d\alpha = 0, \quad |z| > h,$$
(5)

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(\alpha) q H_1^{(1)}(qa) e^{i\alpha z} d\alpha = v_0 f(z), \quad |z| \leq h.$$
 (6)

Выразим $B(\alpha)$ через новую неизвестную функцию $\psi(z)$ по формуле

$$B(\alpha) = \frac{qaJ_1(qa)}{4\alpha} \int_{-h}^{h} \psi(\zeta) e^{-i\alpha\zeta} d\zeta \tag{7}$$

с условием

$$\int_{-h}^{h} \psi(\zeta) d\zeta = 0. \tag{8}$$

Замена (7) позволяет тождественно удовлетворить уравнению (5). Используя представление (3), можно показать, что

$$\frac{\partial \varphi_1(a,z)}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_2(a,z)}{\partial z} = \psi(z), \tag{9}$$

т. е. функция $\psi(z)$ определяет скачок касательной составляющей скорости частиц среды на внешней л внутренней стенках излучателя. Интегрируя по z в пределах от -h до h соотношение (9), находим, что интегральное условие (8) выражает условие непрерывности давления на кромке r=a, |z|=h. Подстановка (7) в (6) и учет асимптотики

$$\frac{q^2 a J_1(qa) H_1^{(1)}(qa)}{4\alpha} = i \frac{\operatorname{sign} \alpha}{4\pi} + O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) (\alpha \to \pm \infty)$$

после перемены порядков интегрирования позволяет получить для неизвестной функции ψ(ζ) интегральное уравнение

$$\int_{-h}^{h} \frac{\psi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{-h}^{h} \psi(\zeta) K(\zeta, z) d\zeta = 2\pi v_0 f(z), \qquad (10)$$

где регулярное ядро $K(\zeta, z)$ имеет вид

$$K(\zeta,z) = \frac{\pi i}{2} \int_{0}^{\infty} \left\{ \frac{q^{2} a J_{1}(qa) H_{1}^{(1)}(qa)}{\alpha} - \frac{i}{\pi} \right\} \sin \alpha (z - \zeta) d\alpha$$

и в дальнейшем вычисляется численным интегрированием с заданной точностью. Уравнение (10) относится к полным сингулярным уравнениям типа Коши на конечном отрезке. Согласно общей теории таких уравнений, для удовлетворения условия конечности энергии в окрестности кромок r=a, |z|=h решение интегрального уравнения (10) следует искать в виде

$$\psi(\zeta) = \gamma(\zeta) / \sqrt{h^2 - \zeta^2}, \tag{11}$$

где функция $\gamma(\xi)$ удовлетворяет условию Гельдера на отрезке $|\xi| \leq h$. В этом классе функций уравнение (10) имеет индекс $\varkappa = 1$ (см. [9]), при этом условие (8) позволяет выделить единственное решение уравнения (10). При численном решении уравнения (10) применялся метод дискретных особенностей [10]. Соответствующая система алгебраических уравнений, аппроксимирующая интегральное уравнение (10), является недоопределенной и для ее замыкания следует использовать условие (8).

Далее, для простоты, ограничимся случаем, когда f(z) — четная функция. В этом случае функция $\psi(\zeta)$ будет нечетной, что дает возможность вдвое уменьшить порядок системы линейных алгебраических уравнений, а условие (8) заменить более простым условием $\psi(0)=0$. При количестве расчетных точек N=2M+1 система линейных алгебраических уравнений для численного решения интегрального уравнения (10) по неравномерной сетке имеет вид

$$\frac{\pi}{N} \sum_{j=1}^{M} \gamma(\zeta_{j}) \frac{2\zeta_{j}}{\zeta_{j}^{2} - z_{l}^{2}} + \frac{\pi}{N} \sum_{j=1}^{M} \gamma(\zeta_{j}) \{K(\zeta_{j}, z_{l}) - K(-\zeta_{j}, z_{l})\} = 2\pi v_{0} f(z_{l}),$$

$$l = 1, 2, \dots, M,$$
(12)

где $\zeta_j = h \cos\{\pi(2j-1)/(2N)\}$ и $z_l = h \cos(l\pi/N)$ — корни полиномов Чебышева степени N первого и второго рода на отрезке $\lfloor -h, h \rfloor$. После решения системы (12) — нахождения величин $\gamma(\zeta_j)$, удобно представить функцию $\gamma(\zeta)$ интерполяционным многочленом по полиномам Чебышева первого рода

$$\gamma(\xi) = v_0 h \sum_{m=1}^{M} C_m T_{2m-1} \left(\frac{\zeta}{h} \right); \quad C_m = \frac{4}{v_0 h N} \sum_{j=1}^{M} \gamma(\xi_j) T_{2m-1} \left(\frac{\zeta_j}{h} \right). \quad (13)$$

Имея выражение (13), можно получить формулы для функции $\psi(\xi)$ и, следовательно, для $B(\alpha)$, через которую выражаются физические характеристики звукового поля. Так, выражение для нормальной составляющей скорости на поверхности цилиндра r=a, $|z|<\infty$, которое при $|z|\leqslant h$ следует использовать для проверки точности выполнения граничных условий задачи, имеет вид

$$\frac{v_{r}(a,z)}{v_{0}} = \frac{\pi i h}{2a} \sum_{m=1}^{M} (-1)^{m} C_{m} \times \left\{ \frac{q^{2} a^{2}}{\alpha} J_{1}(qa) H_{1}^{(1)}(qa) - \frac{ia}{\pi} \right\} J_{2m-1}(\alpha h) \cos \alpha z \, d\alpha - \left\{ \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{M} (-1)^{m} C_{m} \frac{h \cos[(2m-1)\arcsin(|z|/h)]}{2}, \quad |z| \leq h, \right.$$

$$\left\{ \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{M} C_{m} \frac{h}{\sqrt{z^{2} - h^{2}}} \left(\frac{h}{|z| + \sqrt{z^{2} - h^{2}}} \right)^{2m-1}, \quad |z| > h. \right.$$

Анализ данного выражения показывает, что при подходе к кромке со стороны акустической среды распределение колебательной скорости имеет особенность порядка $(z^2-h^2)^{-\frac{1}{2}}$. Это согласуется с требованием конечности акустической энергии в окрестности кромок оболочки.

Порядок M системы алгебраических уравнений (12) зависит от безразмерного волнового числа ka, отношения h/a и требуемой точности в удовлетворении граничных условий задачи. Анализ численных результатов при f(z)=1 в диапазоне $0,1 \le ka \le 5$ и $0,1 \le h/a \le 5$ показывает, что в системе (12) достаточно взять 5-10 уравнений для того, чтобы относительная погрешность в удовлетворении граничного условия (2) не превышала 1% по всей длине оболочки, включая кромки. Таким образом, предложенный метод решения задачи обеспечивает надежное определение характеристик ближнего акустического поля при сравнительно небольшом объеме вычислений.

Определение характеристик дальнего поля можно осуществить на основании формулы Кирхгофа. С учетом геометрии излучателя, осесимметричности задачи и равенства нормальной колебательной скорости на внутренней и внешней поверхности оболочки эта формула дает представление

для потенциала $\tilde{\varphi}(R, \theta)$ в сферических координатах (R, θ) (рис. 1)

$$\tilde{\varphi}(R,\theta) = \frac{a}{2\pi} \int_{-h}^{h} \int_{0}^{2\pi} \left[\varphi_{2}(a,z) - \varphi_{1}(a,z) \right] \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{ihR^{\bullet}}}{R^{\bullet}} \right) d\chi dz,$$

где $R^* = \sqrt{(a\cos\chi - R\cos\theta)^2 + (a\sin\chi)^2 + (z-R\sin\theta)^2}$. Вдали от поверхности излучателя имеем $R^* \approx R - (a\cos\chi\cos\theta + z\sin\theta)$. Тогда для значения потенциала в дальнем поле, т. е. при $R \to \infty$, получаем

$$\tilde{\varphi}(R,\theta) \approx -\frac{ka\cos\theta J_1(ka\cos\theta)}{2} \frac{e^{ikR}}{R} \int_{-h}^{h} \left\{ \varphi_2(a,z) - \varphi_1(a,z) \right\} e^{ikz\sin\theta} dz.$$

Учитывая интегральные представления (3), соотношения (4), (7) и применяя теорему о вычетах, приводим выражение для потенциала в дальнем поле к виду

$$\tilde{\varphi}_{\pi}(R,\theta) = -ka \operatorname{ctg} \theta J_{1}(ka \cos \theta) \frac{e^{ikR}}{2kR} \int_{-h}^{h} \psi(\xi) e^{ik\xi \sin \theta} d\xi. \tag{14}$$

Окончательно расчетная формула для давления в дальнем поле имеет вид

$$P_{\mu}(R,\theta) = \rho c v_0 \frac{\pi i k^2 h a}{2} \cos \theta J_1(k a \cos \theta) \frac{e^{i k R}}{k R} \sum_{m=1}^{M} (-1)^{m+1} C_m \frac{J_{2m-1}(k h \sin \theta)}{\sin \theta}$$
(15)

и показывает сложный характер излучения оболочки. Отметим, что при $h \to 0$ угловое распределение поля полностью характеризуется величиной $\cos \theta J_1(ka\cos\theta)$. Важно подчеркнуть, что $P_\pi(R,\pi/2)=0$ в этом порядке приближения по R независимо от частоты и геометрических размеров излучателя. Это свойство дальнего поля вдоль оси z можно качественно объяснить тем обстоятельством [8], что каждый участок стенки оболочки колеблется как одно целое, в результате чего на внешней и внутренней поверхностях излучателя создается звуковое давление противоположных знаков.

Важной характеристикой звукового поля излучателя является средняя за период мощность W, передаваемая излучателем акустической среде. Ее можно вычислить, рассматривая либо работу стенок оболочки, затрачиваемую против внешнего и внутреннего давления, либо вычисляя поток мощности в дальнем поле через замкнутую сферическую поверхность радиуса $R \rightarrow \infty$. Оба подхода в силу закона сохранения энергии должны приводить к одинаковому результату, что может служить дополнительным критерием оценки точности решения. В первом случае имеем $W = W_1 + W_2$,

$$W_s = (-1)^s \pi a \rho \omega v_0 \int_{-b}^{b} f(z) \operatorname{Im}[\varphi_s(a, z)] dz, \quad s = 1, 2,$$

где W_1 и W_2 — мощности излучения соответственно внутренней и внешней стенок излучателя. Используя соотношения (3), (4) и (13), получим следующую расчетную формулу для мощности излучателя:

$$W = \pi \rho c v_0^2 k h a \sum_{m+1}^{M} (-1)^{m+1} \operatorname{Im}(C_m) \int_{-h}^{h} f(z) \frac{\cos[(2m-1)\arcsin(z/h)]}{2m-1} dz.$$
(16)

В случае равномерного распределения скорости значения интегралов под знаком суммы в представлении (16) при $m \ge 2$ равны нулю. Следовательно, мощность излучения в этом случае полностью определяется коэффициентом C_1 : $W = \pi^2 \rho c v_0^2 k h^2 a \operatorname{Im}(C_1)$.

Через характеристики дальнего поля мощность излучения определяется

$$W=2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} I(R,\theta) R^2 \cos \theta d\theta,$$

$$I(R,\theta)=\frac{1}{2} \operatorname{Re}(\bar{p} V_R)_{\pi}.$$

Черта означает комплексное сопряжение. Используя формулу (15) и соотношение $V_{R,\pi} = -\partial \varphi_{\pi}/\partial R$. Получаем

$$W = \rho c v_0^2 \frac{\pi^3 k^2 h^2 a^2}{9} \int_0^{\pi/2} \operatorname{ct} g^2 \theta J_1^2 (ka \cos \theta) \times \left| \sum_{m=1}^{M} (-1)^m C_m J_{2m-1}(kh \sin \theta) \right|^2 \cos \theta \, d\theta.$$

Расчеты показывают, что в рассмотренном диапазоне изменения ka и h/a оба подхода дают числовые значения, отличающиеся лишь в шестом знаке.

Перейдем к анализу конкретных результатов, полученных для равномерного распределения колебательной скорости (f(z)=1). На представленных на рис. 2 зависимостях модуля давления в центре оболочки с отношением $h/a \ge 1$ обращает внимание характерное резонансное поведение вблизи некоторых значений ka. Эти значения соответствуют частотам продольного резонанса внутреннего объема трубы с открытыми концами. Учитывая поправку Рэлея [11] на открытые концы — увеличение эффективной длины трубы на величину 1,22a, первый продольный резонанс определяется соотношением $(ka)_{\rm прод}^{(1)} = \pi a/(2h+1,22a)$. На рис. 2 эти значения ka отмечены на оси абсцисс. Видно, что поправка Рэлея при $h/a \ge 1$ обеспечивает несколько заниженное, но вместе с тем надежное (погрешностыменее 5%) определение резонансных частот внутреннего объема среды. Для более длинных труб первый продольный резонанс является весьма высокодобротным — влияние внешней акустической среды на резонансной частоте незначительно.

На рис. 3 приведена частотная зависимость нормированных к длине 2h безразмерных (отнесенных к $\rho c v_0^2 a$) значений мощности излучения внутренней и внешней стенок излучателя при h/a=1 и пульсирующего цилиндра бесконечной длины. Видно, что на частоте $ka \le 0.6$ ниже первого продольного резонанса, излучение в среду полностью определяется только внутренней стенкой оболочки. В частотном диапазоне 0,6 ≤ ka ≤ 1,05 излучаемая энергия внутренней поверхности оболочки преобразуется в киэнергию колебаний присоединенной массы жидкости на нетическую внешней стенке (отрицательные значения величины W). На частоте первого продольного резонанса мощность излучения внутренней поверхности резко возрастает, а поток акустической энергии через внешнюю стенку излучателя равен пулю. С ростом ka величина потока акустической мощности на единицу длины через внутреннюю стенку излучателя уменьшается, а через внешнюю увеличивается и стремится к значению удельной мощности излучения пульсирующего цилиндра бесконечной длины.

Наряду с продольными резонансами внутренний объем трубы с открытыми концами обладает и последовательностью частот чисто радиального резонанса $(ka)_{\rm pag}^{(n)} = \mu_n$, $J_1(\mu_n) = 0$. На этих частотах поле внутри трубы не зависит от координаты z и определяется решением плоской осесимметричной задачи. Обращаясь к выражению (15), видим, что на этих частотах (первая из которых $(ka)_{\rm pag}^{(1)} = 3,832$) при $\theta = 0$ давление в дальнем поле равно нулю независимо от высоты излучателя. Следовательно, в плоскости z = 0 при $h/a \to \infty$ на частоте радиального резонанса внутреннего объема жидкости не получаем картину, характерную для плоской внешней задачи о равномерно пульсирующем излучении бесконечного цилиндра.

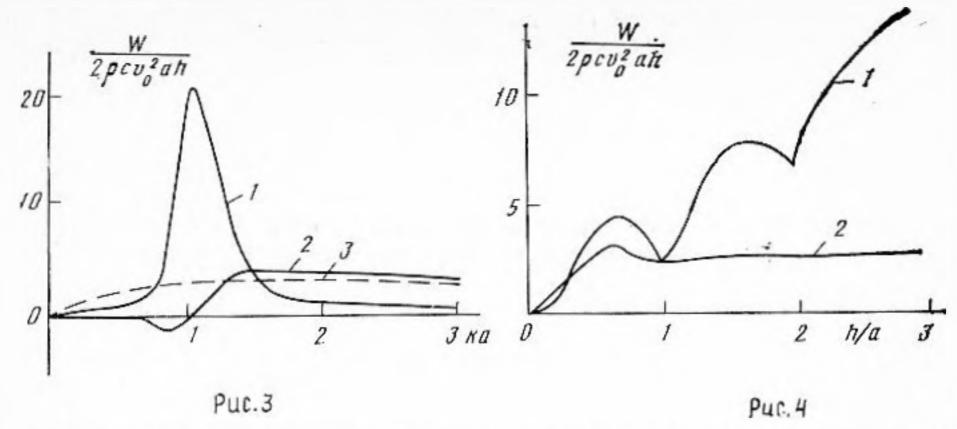


Рис. 3. Зависимость удельной мощности излучения от частоты при h/a=1: 1- внутренней поверхности оболочки, 2- внешней поверхности оболочки, 3- равномерно пульсирующего цилиндра бесконечной длины

Рис. 4. Зависимость удельной мощности излучения от высоты оболочки при k=3,832: I- внутренней поверхности оболочки, 2- внешней поверхности оболочки

Невозможность такого предельного перехода объясняется не столько влиянием колебания концов оболочки на звуковое поле в срединной плоскости, сколько наличием у нее «открытых» торцов, через которые происходит обмен энергией между внутренним объемом жидкости и внешней средой. В силу закона сохранения энергии поток через сечение $z=\pm h,\ 0\leqslant r\leqslant a$ равен потоку энергии через внутреннюю стенку излучателя. Поэтому, чтобы оценить степень влияния внутреннего объема жидкости на формирование внешнего акустического поля, рассмотрим взаимодействие степок излучателя по полю.

На рис. 4 показана удельная мощность излучения внутренней поверхности и внешней поверхности излучателя на частоте первого радиального резонанса внутреннего объема жидкости в зависимости от значения отношения h/a. Видно, что при увеличении отношения h/a мощность излучения внутренней поверхности оболочки возрастает, в то время как удельная мощность излучения внешней поверхности стремится к удельной мощности излучения пульсирующего цилиндра бесконечной длины и волнового радиуса ka=3,832. Такое неограниченное увеличение мощности, передаваемое внутренней стенкой оболочки акустической среде и уносимой через открытые торцы, имеет место только на радиальных резонансных частотах внутреннего объема.

ЛИТЕРАТУРА

- Helmholtz H. Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden // J. reine angew. Mathem. 1860. Bd 57. H. 1. S. 1-72.
- Strutt J. W. (Lord Rayleigh). On the theory of resonance // Phil. Trans. Roy. Soc. L. 1871. V. 161. P. 77-118.
- 3. Hunt J. T., Knittel M. R., Barach D. Finite element approach to acoustic radiation from elastic structures // J. Acoust. Soc. Amer. 1974. V. 55. № 2. P. 269-280.
- Rogers P. H. Mathematical model for a free-flooded piezoelectric cylinder transducer // J. Acoust. Soc. Amer. 1986. V. 80. № 1. P. 13-18.
- Капица П. Л., Фок В. А., Вайнштейн Л. А. Симметричные электрические колебания идеально проводящего полого цилиндра конечной длины // ЖТФ. 1959. Т. 29. № 10. С. 1188-1205.
- 6. Шендеров Е. Л. Излучение звука при осесимметричных колебаниях конечной открытой трубы // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 1. С. 138—147.
- 7. Гомилко А. М. Излучение звука конечной цилиндрической оболочкой. Теоретическая и прикладная гидродинамика. 1988. Ч. 2. С. 27-30 Деп. в Укр. НИИНТИ 19.08.88, № 2048-88.
- 8. Гринченко В. Т., Вовк И. Т. Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках. Киев: Наук. думка, 1986. 239 с.
- 9. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
- 10. Белоцерковский С. М., Лифанов Й. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985. 253 с.
- 11. Рэлей Д. Теория звука. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1955. 475 с.