АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 36 1990 Вып. 2

УДК 534.26

© 1990 г.

С. Н. Бешенков

ПРИМЕНЕНИЕ МКЭ К РАСЧЕТУ ПРОХОЖДЕНИЯ ЗВУКА ЧЕРЕЗ ОГРАНИЧЕННЫЕ ПЛАСТИНЫ

Получено конечно-элементное решение задачи о прохождении звука через ограниченную пластину, закрепленную в бесконечном абсолютно жестком экране. Приведены результаты расчета звукоизоляции квадратной и круглой пластин.

Задача о прохождении звука через ограниченную в одном или двух направлениях пластину, закрепленную в бесконечном абсолютно жестком экране, рассматривалась в работах [1–5] на основе энергетического метода путем волнового анализа взаимодействия спектров вибрационного поля пластины и звуковых полей по обе ее стороны, а также с помощью разложения прогиба и звукового давления на поверхности пластины в ряд по собственным формам ее колебаний в вакууме. Так как практически область применимости этих методов ограничена пластинами правильной геометрической формы с простейшими краевыми условиями, то представляет интерес анализ прохождения звука через ограниченные пластины с помощью метода конечных элементов, свободного от указанных ограничений. Применительно к задаче передачи звука ограниченной пластиной внутрь замкнутой акустической полости МКЭ использовался в работе [6]. Решение при этом искалось в виде ряда по собственным векторам дискретизованной системы пластина — акустическая среда.

Пусть на ограниченную пластину, закрепленную в бесконечном абсолютно жестком экране, из полупространства $z<0$ падает плоская звуковая волна единичной амплитуды

$$p_0=\exp[ik_0(x\cos\varphi\sin\theta+y\sin\varphi\sin\theta+z\cos\theta)], \tag{1}$$

где k_0 — волновое число в среде с плотностью ρ_0 и скоростью распространения звука c_0. Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ здесь и далее опущен. Звуковое давление в полупространстве $z>0$ создается при колебаниях пластины и определяется через интеграл Гюйгенса

$$p_2(x,y,z)=-\frac{\omega^2\rho_0}{2\pi}\iint\limits_s w(x_1,y_1)\frac{\exp(ik_0R)}{R}ds, \tag{2}$$

где w — прогиб пластины; $R=[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+z^2]^{1/2}$ — расстояние от элемента ds до точки наблюдения, s — площадь пластины. Звуковое давление в полупространстве $z<0$ представим в виде суммы давлений в падающей, отраженной от абсолютно жесткой поверхности и излученной пластиной волнах. Тогда для акустической нагрузки на пластину получим выражение

$$(p_1-p_2)\,|_{z=0}=q+p;\qquad p=\frac{\omega^2\rho_0}{\pi}\iint\limits_s w\frac{\exp(ik_0r)}{r}ds; \tag{3}$$

$$q=2\exp[ik_0(x\cos\varphi\sin\theta+y\sin\varphi\sin\theta)];\ r^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2.$$

Функционал полной энергии пластины имеет вид [7]

$$J=\iint\limits_s\left\{\frac{1}{2}[K]^{\mathrm{T}}[D][K]-\frac{\omega^2\rho h}{2}w^2-(q+p)w\right\}ds,$$

$$[D]=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix},\quad [K]=\left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right]^{\mathrm{T}}, \tag{4}$$

где E, ν, ρ — упругие константы и плотность материала пластины толщиной h. Индекс т означает транспонирование. Разобьем пластину на треугольные элементы, связанные между собой в узлах. Поле перемещений на каждом из конечных элементов аппроксимируем выражением

$$w^e=[N(x,\ y)]^e[q]^e, \tag{5}$$

в котором $[N(x,\ y)]^e$ — матрица-строка базисных функций элемента, выражения для которых приведены в [7], $[q]^e$ — вектор узловых перемещений, компонентами которого являются значения прогиба и его производных по координатам в узлах элемента. Представляя интеграл (4) в виде суммы интегралов по отдельным элементам, из условия экстремума функции многих переменных приходим к стандартному матричному уравнению, определяющему амплитудные значения узловых перемещений при гармонических колебаниях пластины

$$([C]-\omega^2[M])[q]=[Q]+[P]. \tag{6}$$

Здесь $[C]$, $[M]$, $[Q]$, $[P]$ — глобальные матрицы жесткости и массы пластины, а также векторы акустической нагрузки, представляющие сумму аналогичных матриц и векторов отдельных элементов [6, 7]:

$$[C]^e=\iint\limits_{s^e}[B]^{\mathrm{T}}[D][B]\,ds,\ [M]^e=\rho h\iint\limits_{s^e}[N]^{e\mathrm{T}}[N]^e ds,$$
$$[Q]^e=\iint\limits_{s^e}[N]^{e\mathrm{T}}q\,ds,\ [P]^e=\iint\limits_{s^e}[N]^{e\mathrm{T}}p\,ds, \tag{7}$$
$$[B]=\left[-\frac{\partial^2[N]^e}{\partial x^2},\ -\frac{\partial^2[N]^e}{\partial y^2},\ 2\frac{\partial^2[N]^e}{\partial x\,\partial y}\right]^{\mathrm{T}}.$$

С целью сокращения объема последующих вычислений и получения равной степени аппроксимации всех слагаемых функционала (4) в формулы для $[M]^e$, $[Q]^e$, $[P]^e$ будем подставлять укороченную по сравнению с (5) последовательность функций формы

$$[\overline{N}]^e=[L_1,\ 0,\ 0,\ L_2,\ 0,\ 0,\ L_3,\ 0,\ 0], \tag{8}$$

т. е. использовать линейное, а не кубическое представление прогиба на элементах. Здесь L_1, L_2, L_3 — треугольные координаты, представляющие собой расстояния от рассматриваемой точки до сторон треугольника, отнесенные к высотам, опущенным на эти стороны из противолежащих вершин.

Представляя на каждом из элементов неизвестное давление $p(x,\ y)$ линейной функцией с помощью известной формулы [7] интегрирования произведений L-координат, для второго из векторов акустической нагрузки получаем выражение

$$[p]^e=\frac{s^e}{12}[2p_1+p_2+p_3,\ 0,\ 0,\ p_1+2p_2+p_3,\ 0,\ 0,\ p_1+p_2+2p_3,\ 0,\ 0]^{\mathrm{T}}. \tag{9}$$

Здесь p_1, p_2, p_3 — узловые значения функции $p(x,\ y)$, вычисляемые по формуле (3), которая с учетом выражения (5) принимает вид

$$p_j=\frac{\omega^2\rho_0}{\pi}\sum_{e=1}^{E}\left(\iint\limits_{s^e}[N]^e\,\frac{\exp(ik_0r_j)}{r_j}\,ds\right)[q]^e, \tag{10}$$
$$r_j=[(x-x_j)^2+(y-y_j)^2]^{1/2},$$

где x_j, y_j — координаты узла, в котором вычисляется давление. Суммирование осуществляется по элементам. При интегрировании по элементам, содержащим рассматриваемый узел, соответствующий интеграл целесообразно преобразовать к виду

$$\iint\limits_{s^e} L \frac{\exp(ik_0 r_j)}{r_j} ds = \iint\limits_{s^e} (L-1) \frac{\exp(ik_0 r_j)}{r_j} + \iint\limits_{s^e} \frac{\exp(ik_0 r_j)}{r_j} ds \quad (11)$$

и далее вычислить первое слагаемое по квадратурным формулам Гаусса, а второе — аналитически, путем перехода к полярной системе координат [8].

Формулы (9) и (10) позволяют представить входящий в уравнение (6) вектор $[P]$ в виде произведения некоторой квадратной матрицы на вектор узловых перемещений $[q]$ пластины. В результате разрешающая система (6) примет стандартный вид $[K][q]=[Q]$, однако, во-первых, элементы матрицы $[K]$ будут комплексными, во-вторых, система потеряет ленточную структуру, что приведет к значительному росту объема вычислений. Учитывая это и рассматривая акустическую среду малой плотности (воздух), будем решать систему (6) методом итераций, принимая на первом шаге вектор $[P]=[0]$ и пересчитывая его на последующих шагах по формулам (10) и (9) до получения значений интересующих нас величин с требуемой точностью. Мощность звука, прошедшего через пластину, найдем после этого по формуле

$$N_2(\varphi, \theta) = \frac{1}{2} \iint\limits_{s} \mathrm{Re}(p_2 v^*)\,|_{z=0}\, ds, \quad (12)$$

которая с учетом соотношения $p_2=-p/2$ принимает вид

$$N_2(\varphi, \theta) = -\frac{\omega}{4} \sum_{e=1}^{4} ([W'']^{e\mathrm{T}}[p']^e - [W']^{e\mathrm{T}}[p'']^e). \quad (13)$$

В формулах (12) и (13) одним и двумя штрихами отмечены векторы действительных и мнимых составляющих прогибов пластины и давлений $p(x, y)$ в узлах элементов, звездочкой — величина, комплексно сопряженная с колебательной скоростью пластины.

При воздействии на пластину диффузного звукового поля [5]

$$N_2 = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} N_2(\varphi, \theta) \cos\theta \sin\theta\, d\theta. \quad (14)$$

Коэффициент звукопроницаемости пластины и связанная с ним величина звукоизоляции определяются по формулам

$$\tau = N_2/N_0, \; R = -10 \lg \tau, \quad (15)$$

где $N_0=s/2\rho_0 c_0$ — мощность в падающих на пластину волнах единичной амплитуды. В диффузном поле $N_0=\pi s/2\rho_0 c_0$.

Таким образом, предлагаемый вычислительный алгоритм состоит в следующем.

Полагая вектор $[P]=0$, из системы (6) определяем узловые перемещения пластины при действии на нее падающей волны и волны, отраженной от абсолютно жесткой поверхности.

По найденным перемещениям с помощью выражений (9), (10) вычисляем вектор $[P]$, учитывающий давление в излучаемых пластиной звуковых волнах.

Вновь обращаемся к системе (6) и уточняем узловые перемещения пластины.

Вычислив с требуемой точностью прогибы пластины и звуковые давления в узлах, по формулам (13)—(15) определяем величину ее звукоизоляции.

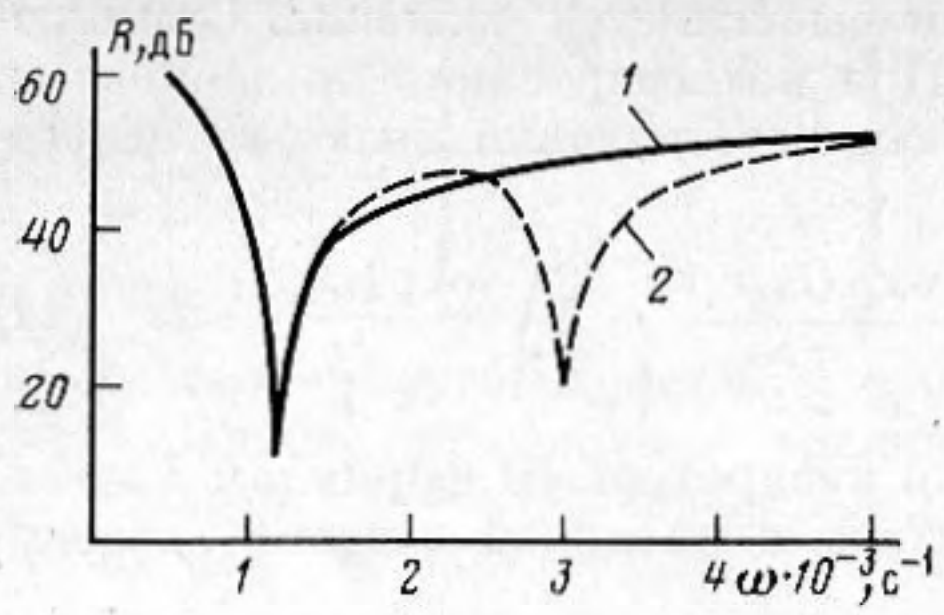

Рис. 1

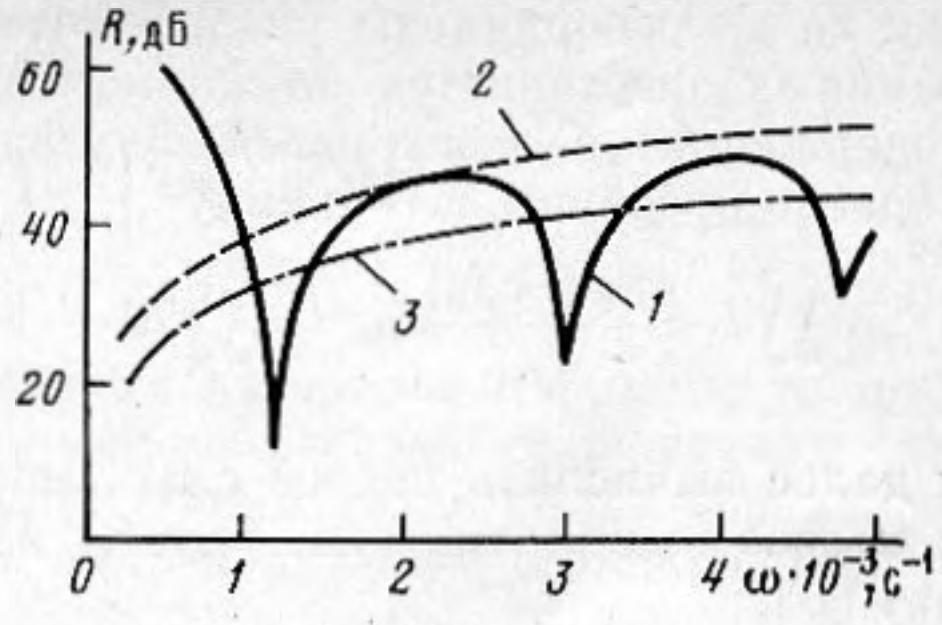

Рис. 2

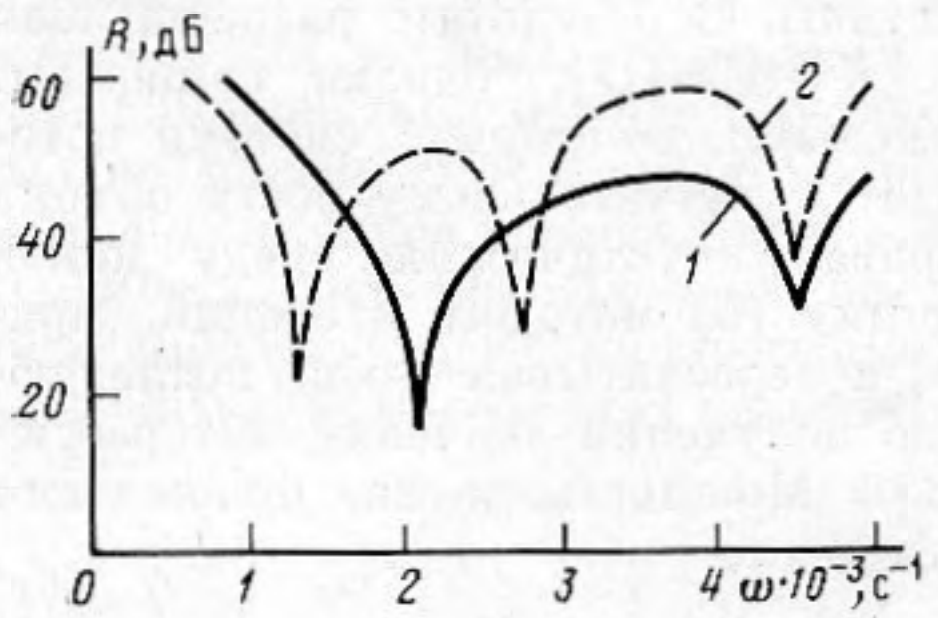

Рис. 3

Рис. 1. Частотные зависимости звукоизоляции свободно опертой квадратной пластины: *1* – $\varphi=0°$, $\theta=0°$, *2* – $\varphi=0°$, $\theta=60°$

Рис. 2. Частотные зависимости звукоизоляции пластин: *1* – опертой квадратной при $\varphi=45°$, $\theta=30°$, *2* – бесконечной при $\theta=0°$, *3* – бесконечной при $\theta=60°$

Рис. 3. Частотные зависимости защемленных по контуру пластин в диффузном звуковом поле: *1* – квадратной, *2* – круглой

На рис. 1 и 2 приведены частотные зависимости звукоизоляции свободно опертой по контуру стальной квадратной пластины толщиной $h=10^{-2}$ м и длиной стороны $l=0{,}5$ м при различных значениях углов падения волны φ и θ. При расчетах пластина разбивалась на 32 элемента. Анализ результатов показывает, что минимумы звукоизоляции соответствуют первым трем резонансам пластины на частотах $\omega_{mn}=\pi^2(m^2+n^2)/l^2\sqrt{D/\rho h}$. Уменьшение числа минимумов при углах падения $\theta=0°$ и (или) $\varphi=0°$ связано с тем, что при нагружении, симметричном относительно одной или двух осей симметрии пластины, формы колебаний с четным числом полуволн по этим осям не возбуждаются. Вне резонансных частот звукоизоляция пластины при изменении углов падения меняется незначительно и остается близкой к звукоизоляции бесконечной пластины при нормальном падении волны. Исключение составляет область частот, лежащих ниже основной частоты пластины, где ее звукоизоляция существенно выше, чем у бесконечной. Отмеченные особенности сохраняются при изменении формы пластины и условий ее закрепления, что можно видеть из представленных на рис. 3 частотных зависимостей звукоизоляции защемленных по контуру квадратной ($h=10^{-2}$ м, $l=0{,}5$ м) и круглой ($a=0{,}6$ м, $h=0{,}03$ м) стальных пластин в диффузном звуковом поле. Что касается сходимости использованного итерационного процесса, то вне резонансных частот результаты расчета акустической мощности на первом и втором шагах отличаются в третьем знаке после запятой. Вблизи резонансных частот число итераций, необходимых для достижения заданной точности, возрастает. Например, на частоте $\omega=1200$ с$^{-1}$, близкой к основной частоте свободно опертой квадратной пластины, значения акустической мощности на первых четырех итерациях относятся как 0,515 : 0,83 : : 0,96 : 1. Непосредственно на резонансных частотах расчет возможен лишь при учете потерь энергии в материале пластины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крокер, Баттачария, Прайс.* Расчет прохождения звука и вибраций через перегородки и соединительные стержни при помощи статистического энергетического метода // Конструирование и технология машиностроения/Пер. с англ. М.: Мир. 1971. Т. 93В. № 3. С. 11–18.

2. *Седов М. С.* Аналитическая частотная характеристика звукоизоляции однослойных ограждений. Борьба с шумом и вибрацией. Ч. I. Волгоград: Нижне-Волжский центр научно-техн. информации, 1972. С. 62–64.
3. *Лямшев Л. М.* Отражение звука тонкими пластинками и оболочками в жидкости. М.: Изд-во АН СССР. 1955. 73 с.
4. *Шендеров Е. Л.* Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 349 с.
5. *Гурович Ю. А.* О звукоизоляции прямоугольной пластины на низких частотах // Акуст. журн. 1978. Т. 24. № 4. С. 508–515.
6. *Ramakrishnan J. V., Koval L. R.* A finite element model for sound transmission through laminated composite plates // J. Sound and Vibr. 1987. V. 112. № 3. P. 433–446.
7. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
8. *Бенерджи П., Баттерфильд Р.* Метод граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.

Запорожский государственный
университет

Поступила в редакцию
07.02.89

S. N. Beshenkov

FINITE ELEMENTS METHOD APPLICATION TO THE CALCULATION OF A SOUND PASSING THROUGH A LIMITED PLATE

Finite element solution of the problem of a sound passing through a limited plate fixed in an absolutely hard screen was obtained.