

УДК 534.213

© 1990 г.

*В. А. Буров, А. В. Глазков, И. П. Прудникова, Е. Я. Тагунов***ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЙЯНИЯ НА КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫХ АКУСТИЧЕСКИХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ**

Предложен алгоритм решения скалярной обратной задачи рассеяния, связанной с определением формы границы объекта, имеющего однородную внутреннюю структуру с известными параметрами заполняющей среды. Алгоритм, основанный на методах дифракционной вычислительной томографии, позволяет вести реконструкцию рассеивающих объектов по ограниченному набору данных о рассеянном поле. Алгоритм апробирован в физическом эксперименте при восстановлении двумерной рефракционной неоднородности с характерным размером в несколько длин волн.

Обратные задачи рассеяния состоят в определении формы или внутренней структуры объекта по рассеянному полю, измеренному вне его. К настоящему времени разработан ряд аналитических и численных методов их решения. Интерес, проявляемый к этим задачам, объясняется большой практической потребностью в эффективных процедурах определения вида включения в непрозрачной среде (для целей медицинской диагностики, дефектоскопии и т. п.).

Ниже рассматриваются скалярные обратные задачи рассеяния, связанные с определением формы границы объекта, имеющего однородную внутреннюю структуру с известными параметрами заполняющей среды. При их решении важную роль играет выбор способа описания границы. Она может быть, например, задана либо с помощью характеристической функции $\gamma(\mathbf{r})$, равной нулю вне объекта и единице — внутри его, либо с помощью уравнения поверхности в виде $r(\varphi, \theta)$ в сферических координатах для тел звездной формы или в виде, условно говоря, «верхней» и «нижней» (относительно некоторой секущей плоскости) поверхностей $w(x, y)$ и $v(x, y)$ в декартовых координатах. В последнем случае на форму вместо условия звездности накладываются дополнительные условия однозначности такого описания. Очевидно, что в случае использования характеристической функции размерность задачи искусственно завышается, поскольку двумерная поверхность характеризуется трехмерной функцией, что, в общем случае, требует трехмерного же множества данных для ее восстановления. Количество измеряемых данных можно существенно сократить, если использовать дополнительную информацию об объекте, например: известное априори место его расположения, сведения о гладкости границы. В качестве такой информации может быть использована бинарная структура характеристической функции объекта — ее равенство либо нулю, либо единице. Априорная информация позволяет также сузить класс возможных решений задачи, повышая тем самым устойчивость алгоритма.

Для решения обратной задачи рассеяния разработан ряд приближенных методов, который основан на тех или иных практически оправданных допущениях. Наиболее крупное упрощение — борновское приближение — выделяет класс обратных задач оценки формы слабых рассеивателей.

Рассмотрим рассеяние акустической волны на неоднородностях скорости звука. Если рассматриваемая неоднородность локализована в некоторой ограниченной области, где ее величина остается неизменной, она может быть описана некоторой кусочно-постоянной функцией. При соответствующей нормировке эта кусочно-постоянная функция будет идентична введенной ранее характеристической функции. В этом случае рас-

сеянное поле и характеристическая функция объекта связаны между собой преобразованием Фурье:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\mathbf{r} = u(\mathbf{k}), \quad (1)$$

где $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_s$, \mathbf{k}_0 и \mathbf{k}_s — волновые векторы падающего и рассеянного полей, $u(\mathbf{k})$ — нормированная амплитуда рассеянного поля [1].

В статье [2] показано, как, используя (1), для слабого двумерного рассеивателя с однородной внутренней структурой перейти к восстановлению контура объекта, имея одномерное множество данных о рассеянном поле. Контур объекта разбивается на две однозначно определяемые кривые $v(x)$ и $w(x)$; из преобразования Фурье при этом следует

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(k_x, k_y) \exp(ik_x x) \frac{dk_x}{2\pi} = (i/k_y) [\exp(-ik_y w(x)) - \exp(-ik_y v(x))]^{-1}.$$

Тогда, зная $u(k_x, k_y)$ для всех k_x при фиксированном k_y (в пределах круга радиуса $2k_0$ это достигается подбором направлений падающего и рассеянного полей), можно определить функции $w(x)$ и $v(x)$. Это метод, использующий борновское приближение, работает для значений частот, удовлетворяющих условию $\Delta k |w - v| \ll 1$. В нем используется априорная информация о месте расположения объекта для выбора начального приближения итерационного алгоритма.

В предлагаемом ниже методе априорная информация о бинарном характере функции $\gamma(\mathbf{r})$ используется в виде штрафного функционала, добавляемого к квадратичной невязке оценки. При этом количество измеряемых данных можно существенно сократить. Функция $\gamma(\mathbf{r})$, равная нулю или единице, с необходимостью должна удовлетворять соотношению

$$\gamma(\mathbf{r}) = \gamma^2(\mathbf{r}). \quad (2)$$

При его использовании в минимизируемом функционале отпадает необходимость в измерении рассеянного поля $u(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_s)$ во всех точках пространства волновых векторов падающего и рассеянного полей. Пусть $u(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_s)$ известно в некоторой подобласти P в \mathbf{k} -пространстве, тогда минимизируемый функционал имеет вид

$$F[\gamma(\mathbf{r})] = \int_P (u(\mathbf{k}) - \Phi(\mathbf{k})[\gamma(\mathbf{r})])^2 + \chi \int_R (\gamma(\mathbf{r}) - \gamma^2(\mathbf{r}))^2 d\mathbf{r}. \quad (3)$$

Здесь $\Phi(\mathbf{k})[\gamma(\mathbf{r})]$ означает преобразование Фурье характеристической функции, величина весового множителя χ используется для управления скоростью сходимости процесса. Минимум первого члена достигается при выполнении соотношения (1) в области P , а минимум второго — при выполнении соотношения (2), т. е. для всех функций, принимающих значения нуль и единица.

Рассмотрим далее двумерный объект. Дискретизация (3) на прямоугольной сетке $N \times N$ дает

$$F[\gamma] = \sum_{(k,l) \in P} (u_{kl} - \Phi_{kl}[\gamma_{ij}])^2 + \chi \sum_{i,j=1}^N (\gamma_{ij} - \gamma_{ij}^2)^2.$$

Здесь (i, j) — индексы узлов сетки в координатном пространстве, (k, l) — индексы узлов сетки в пространстве волновых векторов. Условие минимума функционала $F[\gamma]$ запишется в виде

$$\sum_{k,l=1}^N P_{kl} (u_{kl} - \Phi_{kl}[\gamma_{pm}]) \exp\left(-i \frac{2\pi}{N} pk\right) \times \\ \times \exp\left(-i \frac{2\pi}{N} ml\right) + \chi (\gamma_{pm} - \gamma_{pm}^2) (1 - 2\gamma_{pm}) = 0. \quad (4)$$

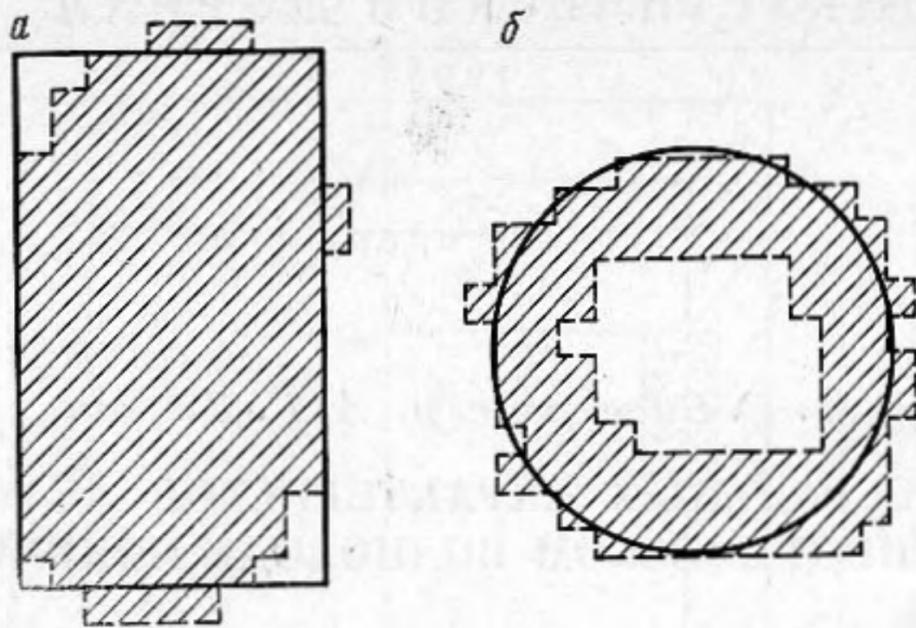
Здесь P_{kl} — характеристическая функция подмножества известных данных $\{P\}$, в точках которого проведены измерения u_{kl} . Отсюда для итерационной процедуры с линеаризацией уравнений на каждом шаге получается набор независимых линейных уравнений относительно $\Phi_{kl}[\gamma_{pm}]$, что существенно облегчает решение: $\Phi_{kl}[\gamma_{pm}] = (u_{kl} + \chi H_{kl}) / (P_{kl} + \chi)$, где $H_{kl} = \Phi_{kl}[\gamma_{ij}^2 - 2\gamma_{ij}^3]$ — фурье-образ нелинейного члена в (4), значение которого вычисляется по результатам предыдущей итерации.

Разработанный алгоритм может быть использован для реконструкции реальных физических объектов только в случае, когда физическая картина рассеяния акустических волн полностью адекватна рассмотренной двумерной модели. Такая ситуация имеет место, например, при распространении поверхностных волн и волн в плоских волноводах, когда созданы условия для одномодового распространения сигналов. В последнем случае особое внимание должно быть обращено на отсутствие каких-либо каналов перекачки энергии от одной моды к другой не только при распространении, но и при рассеянии волн.

Нами были проведены экспериментальные исследования обратных задач рассеяния акустических волн на неоднородностях скорости звука, создаваемых в жидком волноводе при возбуждении в нем первой моды. Акустическим трактом экспериментальной установки являлась наполненная водой кювета размером 100×120 см, дно которой было выложено пористой резиной для обеспечения выполнения на дне граничных условий, максимально приближенных к условиям на мягкой границе. Работа велась на частоте 125 кГц в импульсном режиме, что при длительности зондирующих импульсов около 100 мкс позволяло создать условия, близкие к условиям свободного пространства. Глубина водного слоя составляла 2–2,5 см. Рассеивающий объект располагался на границе между ближней и дальней зонами пьезокерамического излучателя, имеющего поперечный размер около 8 см. В месте расположения объекта падающая волна на ширине фронта 6 см имела неоднородность по амплитуде до 10%, по фазе до 12° , что позволяло ее считать приближенно плоской. Использование в качестве приемника преобразователя, идентичного излучающему, обеспечивало физическое разложение акустического поля по плоским волнам и, следовательно, не требовало дополнительной обработки экспериментальных данных о фазе и амплитуде рассеянной акустической волны при их использовании в разработанном алгоритме.

Численное моделирование по предложенному алгоритму, а также обработка данных акустического модельного эксперимента на прямоугольной сетке 32×32 показали, что для удовлетворительного восстановления характеристической функции достаточно очень небольшого подмножества $\{P\}$ известных данных о рассеянном поле: хороший результат достигается при количестве точек в $\{P\}$, лишь в 1,5 раза превышающем количество точек, описывающих границу (т. е. число пространственных ячеек, пересекаемых границей). Алгоритм сходится за 8–10 итераций, причем при использовании данных эксперимента, содержащих ошибки измерения, параметру χ приходится придавать гораздо большие значения, чем при численном моделировании исходных данных (1 против 10^{-6}). Это объясняется тем, что при внесении данных с ошибкой резко возрастает регулирующая роль априорной информации о виде функции $\gamma(\mathbf{r})$.

Результат восстановления на ЭВМ изображения исследованных в эксперименте объектов представлен на рисунке. Объекты представляли собой кюветы с акустически прозрачными стенками, внутрь которых заливался водно-спиртовой раствор соли. Плотность такой среды была равна плотности воды, а скорость звука c могла изменяться в зависимости от концентрации раствора. В машину было введено ограниченное число данных (около 70 отсчетов) об амплитуде и фазе рассеянного поля, занесенных на сетку 32×32 в \mathbf{k} -пространстве. Реконструкция объекта в реальном пространстве проводилась на эквидистантной сетке с шагом $\lambda/4$, покрывающей поле размером $8\lambda \times 8\lambda$. В качестве общей центральной точки был выбран геометрический центр экспериментальной установки, являвшийся одновременно началом полярной системы координат, в которой произво-



Результат реконструкции объектов по экспериментальным данным о рассеянном поле: $a - \Delta c = 45$ м/с, $b - \Delta c = 120$ м/с

дился отсчет углов падения и рассеяния акустических волн. Граница реальных объектов на рисунке обозначена сплошной линией. Штриховыми линиями покрыта область, где значения характеристической функции на заключительном шаге итерационного процесса оказались близкими к единице. Оба восстанавливаемых объекта обладали центральной симметрией и устанавливались так, чтобы оси симметрии приблизительно совпадали с центром установки.

Необходимо отметить, что предложенный алгоритм эффективен лишь при восстановлении слабых неоднородностей борновского типа. Условием применимости борновского приближения является выполнение соотношения $b \equiv (D/\lambda) |n-1| \ll 1$, где D — характерный размер объекта, $n = c_0/c(r)$.

На рисунке приведены результаты реконструкции объекта в виде прямоугольника (a) с размерами $4\lambda \times 2,5\lambda$ ($4,8 \times 3,0$ см). Скачок скорости $\Delta c = c - c_0$ составлял здесь 45 м/с, параметр b был равен приблизительно 0,1, что обеспечило удовлетворительное восстановление объекта по предложенному алгоритму. Для объекта, сечение которого представляло круг диаметра 3λ (3,6 см), скачок скорости составлял 120 м/с — (b). Значение b увеличилось здесь более чем вдвое, что привело к возникновению ярко выраженного «провала» в центре реконструированного изображения. Аналогичный эффект наблюдался в численном эксперименте [3] при реконструкции достаточно сильных неоднородностей по алгоритму, основанному на борновском приближении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Devaney A. J.* A filtered backpropagation algorithm for diffraction tomography // *Ultrasonic Imaging*. 1982. V. 4. P. 336–350.
2. *Kogan V. G., Lopes E. F.* On Born approximation for weak uniform scatterers // *Inverse Problems*. 1985. № 1. P. 331–338.
3. *Slaney M., Kak A. C.* Diffraction tomography /. *Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng., USA*. 1983. V. 413. P. 2–19.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра акустики

Поступила в редакцию
07.02.89

V. A. Burov, A. V. Glazkov, I. P. Prudnikova, E. Ya. Tagunov

THE PROBLEM OF THE INVERSE SCATTERING BY PIECEWISE CONSTANT ACOUSTIC INHOMOGENEITIES

The object boundary reconstruction algorithm is suggested for the case, when an object has a homogeneous internal structure with the known physical parameters. This algorithm based on the computerized diffraction tomography methods is able to reconstruct the object boundary form from the limited number of scattering field data. The algorithm has been used in the physical experiment for the reconstruction of the two-dimensional refractive inhomogeneity with the characteristic size in some wave lengths.