АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 36 1990 Вып. 2

УДК 534.26

© 1990 г.

Е. В. Голубева, В. Ю. Приходько, В. В. Тютекин

РАСЧЕТ СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК УПРУГИХ РАДИАЛЬНО-НЕОДНОРОДНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ

«Импедансным» методом решена задача о собственных формах и собственных значениях бесконечного радиально-слоистого упругого цилиндра. В работе особое внимание уделяется корректной постановке начальных условий вблизи особой точки $r=0$, а также проблеме обеспечения устойчивого численного счета. Приводятся волновые числа и собственные функции цилиндрического волновода с параболическими законами изменения материальных параметров.

Проблеме представления упругих колебаний твердого однородного цилиндра и толстостенной цилиндрической оболочки в виде нормальных волн посвящено много работ [1]. Интерес также вызывают задачи о собственных значениях и собственных функциях цилиндрических волноводов, материальные параметры которых изменяются. Их аналитического решения, насколько известно, не найдено.

В статье [2] был предложен импедансный метод, позволяющий численно найти характеристики радиально-неоднородных цилиндрических тел. Впоследствии этот метод применялся в работе [3] при решении задачи рассеяния плоской звуковой волны на подобных цилиндрических оболочках и цилиндрах. При этом при нахождении дифракционных характеристик сплошных цилиндров особое внимание уделялось проблемам, связанным с постановкой начальных условий на оси цилиндра. В обеих статьях [2, 3] рассмотрение ограничивалось случаем плоской задачи, т. е. предполагалось, что зависимость от осевой координаты отсутствует.

В настоящей работе исследуется трехмерная задача. Импедансный метод применяется для расчета спектральных характеристик: собственных функций и собственных значений бесконечного упругого сплошного цилиндра, коэффициенты Ляме λ и μ и плотность среды ρ которого являются заданными кусочно-непрерывными функциями радиальной координаты.

В цилиндрической системе координат r, θ, z рассмотрим гармонические по времени $e^{-i\omega t}$ (ω — частота) колебания волновода с вышеописанными материальными характеристиками. Пусть он занимает область D: $\{0\leqslant r\leqslant R,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ -\infty<z<\infty\}$ и напряжения на его поверхности, т. е. при $r=R$, отсутствуют

$$\mathbf{T}(R)=0 \tag{1}$$

(здесь $\mathbf{T}=(T_{rr},\ T_{r\theta},\ T_{rz})^T$ — вектор нормальных напряжений).

В качестве исходных уравнений возьмем линейные уравнения движения упругой среды при отсутствии объемных сил [4]:

$$\operatorname{div}\hat{T}+\rho\omega^2\mathbf{u}=0 \tag{2}$$

$$\hat{T}=\lambda\operatorname{div}\mathbf{u}\hat{E}+\mu\left[\operatorname{grad}\mathbf{u}+(\operatorname{grad}\mathbf{u})^T\right] \tag{3}$$

где $\mathbf{u}=(u_r,\ u_\theta,\ u_z)^T$ — вектор смещений; $\hat{T}$ — тензор напряжений; $\hat{E}$ — единичный тензор; grad и div — известные дифференциальные операторы, записанные в цилиндрической системе координат; символ $(\cdot)^T$ — означает операцию транспонирования квадратной матрицы. Зависимость от времени в уравнениях (2), (3) опущена.

Будем искать решения системы уравнений в частных производных (2), (3) в виде бегущих вдоль оси z гармонических волн e^{ikz} (k — искомое волновое число). Разложим неизвестные величины в ряды Фурье по углу θ: $u_r=\alpha u_{r_n}(r)\cos n\theta$, $u_\theta=\alpha u_{\theta_n}(r)\sin n\theta$, $\mathbf{u}_z=\alpha u_{z_n}(r)\cos n\theta$, $T_{rr}=\alpha T_{rr_n}(r)\cos n\theta$ и т. д., $\alpha=e^{ikz-i\omega t}$, $n=0, 1, 2, \ldots$ Оказывается, что после ряда преобразований все компоненты тензора напряжений $\hat{T}$ в (2), (3) однозначно выражаются через компоненты вектора $\mathbf{T}$ и для каждой n-й гармоники получается матричная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\mathbf{T}_n'=S_n\mathbf{T}_n+P_n\mathbf{u}_n, \tag{4}$$

$$\mathbf{u}_n'=\Lambda_n\mathbf{T}_n+Q_n\mathbf{u}_n. \tag{5}$$

Штрих означает дифференцирование по r, а S_n, P_n, Λ_n, Q_n — матрицы размером (3×3)

$$S_n=$$

$$=\begin{pmatrix} -\dfrac{2\mu}{(\lambda+2\mu)r} & -n/r & -ik \\ \dfrac{n\lambda}{(\lambda+2\mu)r} & -2/r & 0 \\ -\dfrac{ik\lambda}{\lambda+2\mu} & 0 & -1/r \end{pmatrix} Q_n=\begin{pmatrix} -\dfrac{\lambda}{(\lambda+2\mu)r} & -\dfrac{n\lambda}{(\lambda+2\mu)r} & -\dfrac{ik\lambda}{\lambda+2\mu} \\ n/r & 1/r & 0 \\ -ik & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_n=\begin{pmatrix} (\lambda+2\mu)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mu^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix}$$

$$P_n=\begin{pmatrix} \dfrac{E_{\text{пл}}}{r^2}-\rho\omega^2 & \dfrac{nE_{\text{пл}}}{r^2} & \dfrac{2ik\lambda\mu}{(\lambda+2\mu)r} \\ \dfrac{nE_{\text{пл}}}{r^2} & \dfrac{n^2E_{\text{пл}}}{r^2}+(-\rho\omega^2+k^2\mu) & \dfrac{ink\mu(3\lambda+2\mu)}{(\lambda+2\mu)r} \\ -\dfrac{2ik\lambda\mu}{(\lambda+2\mu)r} & -\dfrac{ink\mu(3\lambda+2\mu)}{(\lambda+2\mu)r} & \dfrac{\mu n^2}{r^2}+(k^2E_{\text{пл}}-\rho\omega^2) \end{pmatrix},$$

где $E_{\text{пл}}=4\mu(\lambda+\mu)/(\lambda+2\mu)$. Сомножитель α и зависимости от θ здесь и далее во всех уравнениях опущены.

Полученная система (4), (5) — система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка с особенностью в нуле.

Использование далее импедансного метода [2] позволяет свести задачу относительно $\mathbf{T}$ и $\mathbf{u}$ к удобной для численного решения задаче Коши для матриц связи между элементами этих векторов.

Введем, как и в работах [2, 3], матрицы Z_n, G_n и Y_n, задающие линейные связи между элементами векторов $\mathbf{T}_n$ и $\mathbf{u}_n$:

$$\begin{cases} \mathbf{T}_n=Z_n\mathbf{u}_n \\ \mathbf{u}_n=G_n\mathbf{T}_n \\ \mathbf{N}_n=Y_n\mathbf{M}_n, \end{cases} \tag{6}$$

где $\mathbf{N}_n=(u_r,\ T_{r\theta},\ T_{rz})^T$ и $\mathbf{M}_n=(T_{rr},\ u_\theta,\ u_z)^T$ — смешанные вектор-столбцы. Ясно, что элементы матриц Z_n, G_n и Y_n взаимосвязаны. Действительно,

$$Z_n=G_n^{-1}, \tag{7}$$

а Z_n и Y_n связаны так, что

$$\begin{gathered} z_{11}=y_{11}^{-1};\quad z_{12}=-y_{12}y_{11}^{-1};\quad z_{13}=-y_{13}y_{11}^{-1};\quad z_{21}=y_{21}y_{11}^{-1}; \\ z_{22}=y_{22}-y_{21}y_{12}y_{11}^{-1};\quad z_{23}=y_{23}-y_{21}y_{31}y_{11}^{-1};\quad z_{31}=y_{31}y_{11}^{-1}; \\ z_{32}=y_{32}-y_{31}y_{12}y_{11}^{-1};\quad z_{33}=y_{33}-y_{31}y_{13}y_{11}^{-1}. \end{gathered} \tag{8}$$

Из системы (4), (5) получаются следующие матричные дифференциальные уравнения для Z_n, G_n, Y_n:

$$Z_n'+Z_n\Lambda_nZ_n+Z_nQ_n-S_nZ_n-P_n=0, \tag{9}$$

$$G_n' = -G_n P_n G_n + Q_n G_n - G_n S_n + \Lambda_n, \tag{10}$$

$$Y_n' = Y_n \tilde{P}_n Y_n + Y_n \tilde{S}_n + \tilde{Q}_n Y_n + \tilde{\Lambda}_n, \tag{11}$$

где $\tilde{P}_n$, $\tilde{S}_n$, $\tilde{Q}_n$, $\tilde{\Lambda}_n$ – матрицы размером 3×3:

$$\tilde{P}_n = \begin{pmatrix} -\frac{E_{\text{пл}}}{r^2} + \rho\omega^2 & n/r & ik \\ -n/r & -\mu^{-1} & 0 \\ ik & 0 & -\mu^{-1} \end{pmatrix}; \quad \tilde{S}_n = \begin{pmatrix} \frac{2\mu}{r(\lambda+2\mu)} & -\frac{nE_{\text{пл}}}{r^2} & -\frac{2\mu\lambda ik}{r(\lambda+2\mu)} \\ 0 & -1/r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\Lambda}_n = \begin{pmatrix} (\lambda+2\mu)^{-1} & -\frac{n\lambda}{(\lambda+2\mu)r} & -\frac{ik\lambda}{\lambda+2\mu} \\ \frac{n\lambda}{(\lambda+2\mu)r} & \frac{E_{\text{пл}}n^2}{r^2} + k^2\mu - \rho\omega^2 & \frac{ink\mu(3\lambda+2\mu)}{r(\lambda+2\mu)} \\ -\frac{ik\lambda}{\lambda+2\mu} & -\frac{ink\mu(3\lambda+2\mu)}{r(\lambda+2\mu)} & k^2E_{\text{пл}} - \rho\omega^2 + \frac{\mu n^2}{r^2} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{Q}_n = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{(\lambda+2\mu)r} & 0 & 0 \\ nE_{\text{пл}}/r^2 & -2/r & 0 \\ -\frac{2ik\lambda\mu}{r(\lambda+2\mu)} & 0 & -1/r \end{pmatrix}$$

Видно, что матрицы связи – эрмитовы. Поэтому каждое из матричных уравнений (9)–(11) представимо в виде шести нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Для их решения необходимо задать начальные значения в точке $r=0$.

Начальные условия в центре получаются из анализа поведения конкретных физических величин в особой точке. С целью определения того, какие величины являются регулярными по r, исследуется асимптотика при $r \to 0$ аналитических выражений элементов $\mathbf{u}_n$ и $\mathbf{T}_n$, матриц Z_n, G_n, Y_n для случая сплошного цилиндра с постоянными материальными параметрами λ_0, μ_0, ρ_0, такими, что $\lambda_0=\lambda(0)$, $\mu_0=\mu(0)$, $\rho_0=\rho(0)$. Векторы обобщенных сил $\mathbf{T}_n$ и смещений $\mathbf{u}_n$ для этого случая хорошо известны [1]:

$$\begin{gathered} u_{rn} = iJ_n'(lr)A_n + inJ_n(tr)r^{-1}B_n - kJ_{n+1}(tr)C_n; \\ u_{\theta n} = -inJ_n(lr)r^{-1}A_n - iJ_n'(tr)B_n - kJ_{n+1}(tr)C_n; \\ u_{zn} = -kJ_n(lr)A_n - iJ_n(tr)tC_n; \end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered} T_{rrn} = 2i\mu_0\{(n^2/r^2 + k^2 - k_{t_0}^2/2)J_n(lr) - r^{-1}J_n'(lr)\}A_n + \\ +2i\mu_0\{nr^{-1}J_n'(tr) - nr^{-2}J_n(tr)\}B_n - 2\mu_0 k\{tJ_n(tr) - (n+1)r^{-1}J_{n+1}(tr)\}C_n; \\ T_{r\theta n} = -2\mu_0 i(nr^{-1}J_n'(lr) - nr^{-2}J_n(lr))A_n - 2\mu_0 i\{(n^2/r^2 - t^2/2)J_n(tr) - \\ -r^{-1}J_n'(tr)\}B_n + k\mu_0(-tJ_n(tr) + 2(n+1)r^{-1}J_{n+1}(tr))C_n; \\ T_{rzn} = -2\mu_0 kJ_n'(lr)A_n - kn\mu_0 r^{-1}J_n(tr)B_n - i\mu_0(tJ_n'(tr) + k^2J_{n+1}(tr))C_n. \end{gathered} \tag{13}$$

Здесь A_n, B_n, C_n – произвольные постоянные, $t=\sqrt{k_{t_0}^2-k^2}$, $l=\sqrt{k_{l_0}^2-k^2}$, а k_{t_0}, k_{l_0} – волновые векторы сдвиговой и продольной волн в материале однородного цилиндра. Ясно, что при разных значениях n компоненты $\mathbf{u}_n$ и $\mathbf{T}_n$ зависят от r по-разному:

$$\text{для } n=0 \quad (u_{rn}, u_{\theta n}, T_{rzn}) \sim r, \quad T_{r\theta n} \sim r^2, \quad (u_{zn}, T_{rrn}) \sim r^0, \tag{14}$$

$$\text{для } n=1 \quad (T_{rrn}, T_{r\theta n}, u_{zn}) \sim r, \quad (u_{rn}, u_{\theta n}, T_{rzn}) \sim r^0, \tag{15}$$

$$\text{для } n>1 \quad (u_{rn}, u_{\theta n}, T_{rzn}) \sim r, \quad u_{zn} \sim r^2, \quad (T_{rrn}, T_{r\theta n}) \sim r^0. \tag{16}$$

Так как $\mathbf{T}_n$ и $\mathbf{u}_n$ известны, то известны соответственно и z_n, G_n, Y_n однородного цилиндра.

Матрица z_n, например, имеет следующий вид:

$$z_{11n} = 2\mu_0 r^{-1}(-1 + k_{t_0}^2 rt(2\Delta)^{-1}J_n(tr)J_n(lr)J_n'(tr));$$

$$z_{12n} = z_{21n} = 2\mu_0 nr^{-1}(-1 + k_{t_0}^2 t(2\Delta)^{-1}J_n^2(tr)J_n(lr));$$

$$z_{13n}=-z_{31n}=-i\mu_0 k(1+t\varkappa\Delta^{-1}J_n'(tr));$$
$$z_{22n}=2\mu_0 r^{-1}(-1+k_{t_0}^2 rt(2\Delta)^{-1}J_n^2(tr)J_n'(lr))+k^2\mu_0 t\Delta^{-1}\varkappa J_n(tr); \qquad (17)$$
$$z_{23n}=-z_{32n}=-i\mu_0 nkt\varkappa J_n(tr)(\Delta r)^{-1};$$
$$z_{33n}=-\mu_0(\Delta t)^{-1}\{k_{t_0}^2 J_n'(tr)(J_n'(lr)J_n'(tr)-$$
$$-n^2r^{-2}J_n(lr)J_n(tr))+k^2n^2r^{-2}J_n(tr)\varkappa\};$$

где $\varkappa=J_n'(tr)J_n(lr)-J_n'(lr)J_n(tr)$, $\Delta=\{-k^2\varkappa J_n'(tr)-k_{t_0}^2J_n(tr)(J_n'(tr)\cdot\cdot J_n'(lr)-n^2r^{-2}J_n(tr)J_n(lr)\}t^{-1}$.

Исследуя асимптотики матриц импедансов, адмитансов и «смешанных» импедансов при $r\to 0$, а также, учитывая (14)–(16), получим, что при $n>1$ для численного расчета следует взять матрицы адмитансов G_n и уравнения для них. Это связано с тем, что асимптотики G_{n_0} для G_n при $r\to 0$ имеют вид:

$$G_{11}=G_{22}{}_n=\frac{r}{2\mu_0(n^2-1)}\frac{(\lambda_0+2\mu_0)n-\mu_0}{\lambda_0+\mu_0}+O(r^3);$$
$$G_{23}{}_n=-G_{32}{}_n=-\frac{r^2ik(\mu_0+\lambda_0 n)}{2\mu_0 n(n^2-1)(\lambda_0+\mu_0)}+O(r^4);$$
$$G_{12}{}_n=G_{21}{}_n=\frac{-r}{2\mu_0(n^2-1)}\frac{\lambda_0+2\mu_0-\mu_0 n}{\lambda_0+\mu_0}+O(r^3); \quad G_{33}{}_n=\frac{r}{\mu_0 n}+O(r^3); \qquad (18)$$
$$G_{13}=-G_{31}=\frac{r^2ik}{2\mu_0 n(n^2-1)}\frac{n\mu_0+\lambda_0}{\lambda_0+\mu_0}+O(r^4).$$

(Аналогичные асимптотики для G в центре для рассматриваемых номеров n были получены также с помощью метода Абрамова выделения допустимого граничного условия в особой точке [5, 6].) Из (18) видно, что матрицы G_n регулярны по r, а в коэффициентах уравнений для адмитансов (10) при таких асимптотиках матриц G_n особенности отсутствуют. Поэтому для $n>1$ в качестве основных можно взять уравнения (10) с начальными условиями $G|_{r=0}=0$.

Для получения такой регулярности начальных условий и уравнений в случае $n=0$ в качестве матрицы связи между элементами вектор-функций $\mathbf{T}_0$ и $\mathbf{u}_0$ следует взять «смешанный» импеданс Y_0. Главные члены асимптотики матриц Y_0 по r имеют вид

$$Y_0=\begin{pmatrix} r/(2(\lambda_0+2\mu_0)) & 0 & ikr\lambda_0/(2(\lambda_0+2\mu_0)) \\ 0 & -\mu_0 rt^2/2 & 0 \\ -ikr\lambda_0/(2(\lambda_0+2\mu_0)) & 0 & -r2^{-1}((\lambda_0+2\mu_0)l^2+k^2\lambda_0^2/(\lambda_0+2\mu_0)) \end{pmatrix}. \qquad (19)$$

Матрица Y_0 регулярна по r, и из (19) видно, что особенности в уравнениях для Y_n исчезают. Следовательно, для $n=0$ удобно использовать уравнения (11) с начальными условиями $Y_0|_{r=0}=0$.

Для $n=1$ найти «смешанную» матрицу с ограниченными начальными условиями в нуле, имеющую в центре ограниченные коэффициенты уравнений, не удается. Даже если находится регулярная по r смешанная матрица, то оказывается, что коэффициенты в уравнениях для нее неограниченно растут. Это связано со структурой фундаментальной системы решений (12) и (13) для $\mathbf{u}_n$ и $\mathbf{T}_n$. Поэтому для расчетов представляется удобным использование импедансных уравнений (9). В качестве начальных условий для них можно взять импедансы Z_1 на поверхности однородного цилиндра с постоянными параметрами среды λ_0, μ_0, ρ_0 конечного малого радиуса r_0 (17).

Таким образом, полученные начальные условия в центре позволяют для любых n поставить задачу Коши для матричного уравнения Риккати.

Из физических соображений ясно, что в ряде случаев элементы матриц связи Y_0, Z_1, G_n могут неограниченно возрастать в конечном числе точек. Эти точки, как правило, являются узлами собственных форм и определяются чисто кинематическими характеристиками колебаний, в частности соотношением частоты и радиуса цилиндра.

В том случае, если в цилиндре по радиусу не образуется узлов смещений и напряжений, то полученные задачи Коши можно решать прямым интегрированием, например методом Рунге-Кутта. Зная Y_0, Z_1, G_n, из (7), (8) легко получить значения Z_n для любого номера n.

В противном случае следует использовать специальные методы. Эрмитовость матриц связи позволяет применить метод фазовых функций [7], а именно использовать преобразование Кэли

$$\Phi_0=(Y_0+iE)^{-1}(iE-Y_0), \quad n=0,$$
$$\Phi_n=(E+iG_n)^{-1}(iG_n-E), \quad n>1,$$
$$\Phi_1=(Z_1+iE)^{-1}(iE-Z_1), \quad n=1.$$

Здесь E — единичная матрица. Это дает возможность перейти к унитарным и, следовательно, ограниченным матрицам Φ_n. Уравнения для Φ_n при любом n легко найти из (9)—(11). Получив Φ_n, можно из условия $Y_0=i(E-\Phi_0)(E+\Phi_0)^{-1}$ и уравнений (8) при $n=0$, условия $Z_n=i(E-\Phi_n)\cdot\cdot(E+\Phi_n)^{-1}$ при $n=1$, условия (7) при $n>1$ найти Z_n.

Учитывая, что поверхность цилиндра свободна от напряжений (1), и зная распределение $Z_n(r)$, из условия нетривиальной совместимости системы линейных алгебраических уравнений в точке $r=R$:$\det\|Z(R, \omega)\|=0$ можно найти собственные частоты цилиндра k_{mn}.

Собственные формы колебаний цилиндра определяются из уравнений (4)—(6). Из них для вектор-функций обобщенных смещений и напряжений $\mathbf{u}_n$ и $\mathbf{T}_n$ получается следующая система:

$$\mathbf{T}_n'-(S_n+P_nZ_n^{-1})\mathbf{T}_n=0, \tag{20}$$

$$\mathbf{u}_n'-(Q_n+\Lambda_nZ_n)\mathbf{u}_n=0. \tag{21}$$

Однако определение распределения по сечению волновода смещений и напряжений в нормальной волне из этих уравнений с начальными условиями (1) при заданных $Z_n(r)$ не всегда возможно.

Необходимо учитывать, что в уравнения (20), (21) входят тензоры импедансов. Поэтому трудности, связанные с решением задачи Коши для тензоров Y_0, Z_1, G_n, возникают и при нахождении вектор-функций смещений и напряжений. Для устранения неустойчивости используется преобразование собственных вектор-функций $\mathbf{T}_n$ и $\mathbf{u}_n$ по формулам

$$\mathbf{T}_n={}^1/_2(E-\Phi_n^*)\mathbf{M}_n, \tag{22}$$

$$\mathbf{u}_n=\frac{i}{2}(E+\Phi_n^*)\mathbf{M}_n, \tag{23}$$

$\mathbf{M}_n$ — трехкомпонентный вектор-столбец, Φ_n^* — матрица эрмитово-сопряженная Φ_n. Из (20), (21) для $\mathbf{M}_n$ ставится следующая задача Коши с начальными условиями на правом конце: $\mathbf{M}_n'={}^1/_2\{i\Lambda_n-Q_n+S_n+iP_n+(iP_n-i\Lambda_n-Q_n-S_n)\Phi_n^*\}\mathbf{M}_n$, $\mathbf{M}_n(R, k_{nm})=M_0$.

Вектор $\mathbf{M}_0$ определяется из однородной системы $(E-\Phi_n^*(R, k_{mn}))\mathbf{M}_0=0$, $\mathbf{M}_0$ отнормирован на единицу $|\mathbf{M}_0|=1$.

Зная $\mathbf{M}_n$, по формулам (22), (23) можно найти собственные формы цилиндра.

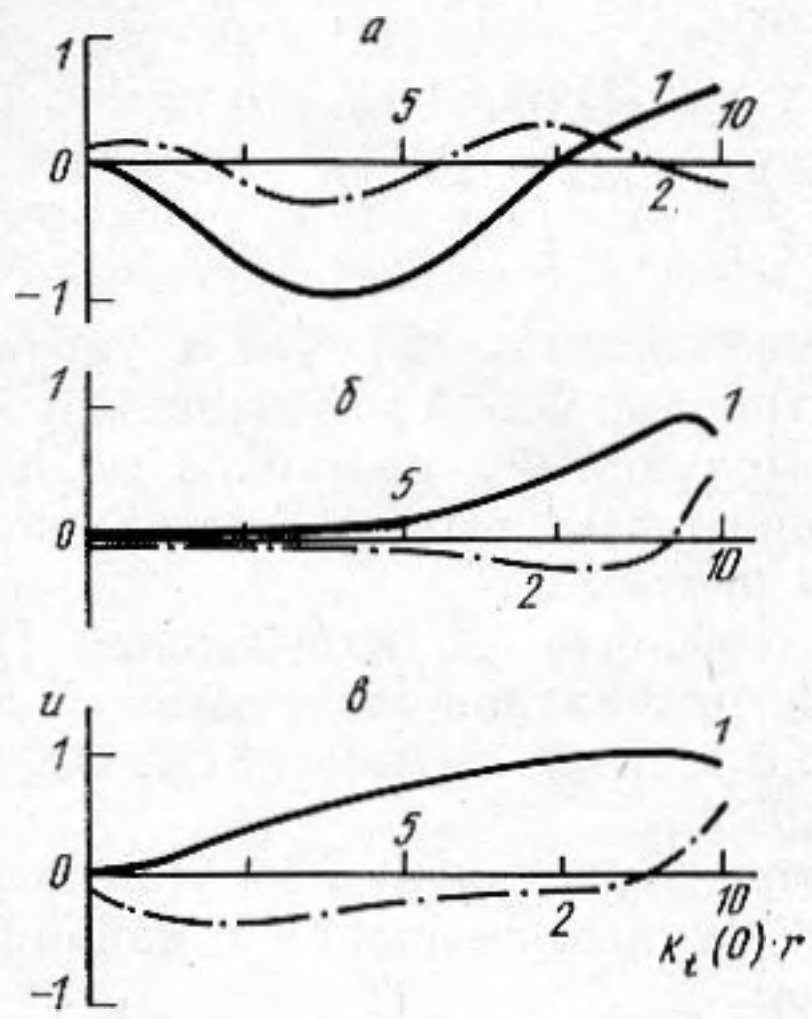
Описанным методом были численно получены волновые числа и собственные функции бесконечного цилиндрического волновода с параболическими законами изменения плотности материала ρ и модуля сдвига μ.

Параметры цилиндра таковы, что в центре при $r=0$ коэффициент

№	n	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$	$m=7$	$m=8$
I	0	0,096	0,414	0,524	0,717	0,742	0,969	1,261	1,366
	1	0,320	0,451	0,672	0,841	0,872	0,907		
II	0	0,388	0,462	0,730	0,735	0,844	0,912		
	1	0,390	0,505	0,616	0,777	0,906			

Пуассона $\nu(0)=0{,}3314$, $k_t(0)R=10$, $c_t(0)/c_l(0)=0{,}2518$, где $k_t(0)=\omega/c_t(0)$, c_t — скорость продольных волн.

Рассматривалось два типа цилиндров. В случае I плотность материала ρ возрастала при удалении от центра, как $(\rho(r)-\rho(0))/\rho(0)=(r/R)^2$, в случае II менялся модуль сдвига μ: $(\mu(r)-\mu(0))/\mu(0)=(r/R)^2$. Получена таблица собственных значений $\tilde{k}_{mn}=k_{mn}/k_t(0)$ для $n=0{,}1$ при изменении ρ или μ. Как и предполагалось, для $n=0$ и в первом и во втором случае были найдены $\tilde{k}_{mn}$ (I случай — $\tilde{k}_{40}$, $\tilde{k}_{70}$; II случай — $\tilde{k}_{30}$), для которых отлична от нуля только компонента вектора смещений u_θ, т. е. были найдены собственные значения, соответствующие чисто крутильным волнам. На рисунке для различных значений $\tilde{k}_{mn}$ приведены отнормированные на максимум компоненты u_r и u_z вектора смещений **u**.



Графики отнормированных на максимум компонент смещений ($1-u_r$, $2-u_z$): *а*, *б* — для случая I при $\tilde{k}_{10}$, $\tilde{k}_{80}$, *в* — для случая II при k_{60}

Рисунок, *а* соответствует случаю $\tilde{k}_{10}=0{,}096$. Поскольку значение $\tilde{k}_{10}$ мало, то рассматриваемая частота близка к критической. При этом $u_r>u_z$, следовательно, нормальная волна зарождается как объемная. Для высоких номеров m в случае I наблюдается концентрация максимумов компонент смещений u_r и u_z вблизи поверхности цилиндра, наблюдается волна рэлеевского типа. Это видно на рисунке, *б* соответствующем случаю $m=8$. На рисунке, *в* представлены графики изменения u_r и u_z для $\tilde{k}_{60}$ в случае II. Видно, что на данной частоте концентрации не происходит. Возмущения распространяются на всю толщину волновода. Волна не является поверхностной.

Надо отметить, что в отличие от классической задачи Штурма — Лиувилля [8] для рассмотренных в настоящей работе векторных краевых задач нет достаточно точных аналитических оценок числа нулей собственных функций. Собственные функции, соответствующие большему по модулю собственному значению, могут иметь меньшее число узловых точек, чем собственные функции с меньшим собственным значением. По-видимому, это связано с тем, что в теории упругости не выработано достаточно корректных правил нумерации собственных значений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zemanek J.* An experimental and thearetical investigation of elastic wave propagation in a cylinder // JASA. 1972. V. 51. № 1. Part. 2. P. 265–283.
2. *Тютекин В. В.* Импедансный метод расчета характеристик упругих неоднородных радиально-слоистых цилиндрических тел // Акуст. журн. 1983. Т. 29. № 4. С. 529–536.
3. *Безруков А. В., Приходько В. Ю., Тютекин В. В.* Рассечение звуковых волн упругими радиально-слоистыми цилиндрическими телами // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 6. С. 762–766.
4. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970.
5. *Абрамов А. А.* О переносе граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // ЖВМ и МФ. 1961. Т. 1. № 3. С. 542–545.
6. *Абрамов А. А., Балла К., Конюхова Н. Б.* Устойчивые начальные многообразия и сингулярные краевые задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Computational mathematics banach center publications. 1983. V. 13. PWN-Polish scientific publishers. Warsaw. P. 319–351.
7. *Лидский В. Б., Нейгауз М. Г.* К методу прогонки в случае самосопряженной системы второго порядка // ЖВМ и МФ. 1962. Т. 2. № 1. С. 161–164.
8. *Морс Ф., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. М.: Изд-во иностр. литер., 1960.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
30.03.89

E. V. Golubeva, V. Yu. Prikhodko, V. V. Tyutekin

SPECTRAL CHARACTERISTICS ESTIMATION OF ELASTIC RADIAL-INHOMOGENEOUS CYLINDRICAL WAVEGUIDES

The «impedance» method is used to solve the problem of eigenfunction and eigenvalue estimations for infinite radial-layered elastic cylinders. This work is mainly pointed to the correct formulation of initial conditions in the vicinity of the particular point $r=0$ and to the problem of the computational stability. The eigenvalues and eigenfunctions for cylindrical waveguide with parabolic dependence of material parameters are presented.