

УДК 519.642:535.4

© 1990 г.

И. Д. Дружинина, М. А. Сумбатян

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ КОРОТКОВОЛНОВОЙ ДИФРАКЦИИ

Изучается применение метода наискорейшего спуска к решению интегральных уравнений, возникающих в задачах дифракции на высоких и средних частотах. При этом численный подход сочетается с аналитическим решением, которое основано на приближении Кирхгофа. Используются асимптотические свойства метода наискорейшего спуска для его ускорения. Показана устойчивость метода на резонансах внутренней задачи.

Как известно, задача дифракции в акустической среде можно свести к интегральным уравнениям, получаемым из интегральной формулы Кирхгофа. Задача Дирихле описывается уравнением I рода

$$\int_S \psi(y) G(y_0, y) dS_y = F_1(y_0), \quad (1)$$

а задача Неймана — уравнением II рода

$$p(y_0) - 2 \int_S p(y) \frac{\partial G(y_0, y)}{\partial n_y} dS_y = F_2(y_0). \quad (2)$$

Здесь $\psi(y) = \partial p / \partial n_y$, p — давление дифрагированного поля на поверхности S , функции F_1 и F_2 выражаются через граничные функции. Для определенности будем считать поверхность замкнутой, достаточно гладкой, нормаль n_y направлена во внешность S . Уравнения (1) и (2) описывают дифракцию как в двумерном, так и в трехмерном случаях. При этом соответственно

$$G(y_0, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr), \quad G(y_0, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r},$$

$$r = |u - y_0| \quad (3)$$

Заметим, что уравнения вида (1), (2) можно выписать относительно давления полного поля. Это изменит лишь вид правых частей F_1 и F_2 . Уравнения (1), (2) исследованы достаточно подробно (см., например, [1–3]). Для решения этих уравнений применяются аналитические и численные методы. Точные аналитические решения известны лишь для областей канонической формы (круг, сфера, эллипс, отрезок и т. д.). Для областей сложной формы на высоких частотах ($ka \gg 1$, a — характерный размер поверхности S) эффективно применение асимптотических методов [4]. Однако эти методы становятся не эффективными в области средних частот. Основным недостатком численных методов является их оторванность от физической сути явления. Кроме того, известно, что численные методы теряют устойчивость при больших значениях ka [3]. В данной работе предлагается метод, использующий сочетание аналитического и численного подходов. Он направлен на получение эффективного решения в области больших и средних значений ka . В качестве исходного используется аналитическое решение, которое получается по теории Кирхгофа. Оно эффективно лишь при $ka \gg 1$, и для более низких значений ka требует уточнения. С этой целью применяется итерационный процесс, каждый шаг которого улучшает выбранное аналитическое решение.

Запишем рассматриваемый класс уравнений (1), (2) в операторном виде

$$Bx=y \quad (4)$$

и будем считать линейный оператор B действующим в некотором комплексном гильбертовом пространстве H . В качестве такого пространства может быть взято пространство $L_2(S)$. Считаем также оператор B самосопряженным и неотрицательным. Этого всегда можно добиться, представив его в виде A^*A , где A — оператор исходного интегрального уравнения. При этом $y=A^*f$, где f — свободный член в исходном интегральном уравнении.

Пусть спектр оператора B лежит в интервале $[m, M]$, $0 \leq m < M$. В случае уравнения первого рода всегда $m=0$, что следует из вполне непрерывности интегрального оператора [5]. В [5–7] доказано, что если уравнение (4) имеет решение, то итерационный метод наискорейшего спуска (м.н.с.)

$$x_{n+1}=x_n - \frac{\|Lx_n\|^2}{(Lx_n, BLx_n)} Lx_n, \quad Lx_n=Bx_n-y \quad (5)$$

сходится к решению x^* в норме пространства H монотонно, т. е. $\|x_{n+1}-x^*\| \leq \|x_n-x^*\|$. При этом если $m > 0$, то

$$\|x_n-x^*\| \leq \frac{\|Lx_0\|}{m} \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^n; \quad (6)$$

если $m=0$, то

$$F(x_n) = (B(x_n-x^*), x_n-x^*) = 0 \left(\frac{1}{n} \right). \quad (7)$$

Легко показать, что этот результат справедлив, если вместо м.н.с. использовать метод минимальных ошибок (м.м.о.) [6]

$$x_{n+1}=x_n - \frac{\|Lx_n\|^2}{\|A^*Lx_n\|^2} A^*Lx_n, \quad (A^*A=B) \quad (8)$$

или метод минимальных невязок (м.м.н.) [7]

$$x_{n+1}=x_n - \frac{(BLx_n, Lx_n)}{\|BLx_n\|^2} Lx_n, \quad (9)$$

а также родственные им [7].

Заметим, что для сходимости м.н.с. достаточно лишь существования решения x^* . Этот факт будет существенно использован ниже в случае, когда решение не единственно.

Численная реализация требует замены интегрального оператора конечномерным. В частности, решая уравнения (1), (2) методом коллокации, приходим к линейной алгебраической системе $N \times N$. Сходимость в (5) со свойствами (6), (7) по-прежнему имеет место [5, 7, 8]. При этом для оператора B , кроме особых случаев, отмеченных ниже, всегда $m > 0$, следовательно, всегда выполняется первая оценка скорости сходимости. В то же время в случае уравнения (1) при большом числе узлов N конечномерный оператор близок к исходному вполне непрерывному, поэтому $m/M \ll 1$. Следовательно, матрица системы является плохо обусловленной. Более того, легко видеть, что скорость сходимости здесь очень медленная. В случае уравнения (2) конкретные расчеты при $ka \gg 1$ показывают, что и здесь обусловленность матрицы очень плохая. В этом смысле уравнение II рода не сильно отличается от уравнения I рода.

В связи с этим возникает проблема ускорения м.н.с. (5). Известны различные способы ускорения итерационных процессов [8]. В данной работе используется метод ускорения, который опирается на некоторые асимптотические (при больших n) закономерности м.н.с. В [9] показано, что при $n \rightarrow \infty$ для итерационного процесса (5) имеют место следующие

равенства:

$$\frac{F(x_n)}{F(x_{n-1})} = \frac{\|Ax_n - f\|^2}{\|Ax_{n-1} - f\|^2} = c^2, \quad (10)$$

$$x_n - x^* = c^2(x_{n-2} - x^*), \quad \left(c^2 = \frac{M-m}{M+m} \right). \quad (11)$$

Из (11) следует, что после того как м.н.с. вышел на свою асимптотику, очередной шаг итерации осуществляется в виде

$$\tilde{x} = \frac{x_n - c^2 x_{n-2}}{1 - c^2}, \quad (12)$$

причем c^2 может быть вычислено по формуле (10). Использование такого подхода в конкретных численных примерах показывает быстрое ускорение итерационного процесса для любых, в том числе и плохо обусловленных, матричных уравнений ($m/M \ll 1$, $c^2 \sim 1$). Более детально, имеет место следующая закономерность. После достаточно большого количества шагов (5) м.н.с. выходит на свою наихудшую оценку, когда равенство (10) становится практически точным. При этом невязка $F(x_n)$ на каждом шаге убывает в c^2 раз, т. е. при $c^2 \sim 1$ уменьшается очень медленно. В такой ситуации применение одного шага (11) ликвидирует это «зацикливание», и далее алгоритм (5) приводит к быстрому уменьшению невязки на 1–2 порядка. Эта закономерность хорошо прослеживается в таблице, соответствующей первому из рассмотренных ниже примеров.

Известно, что уравнение I рода (1) не является корректным по Тихонову [10, 12], поскольку обратный оператор не является непрерывным. В этой связи заметим [11], что итерационный процесс (5) определяет некоторое семейство регуляризирующих операторов R_n для уравнения (1).

В самом деле, каждый шаг итерационного процесса определяет некоторый нелинейный оператор $x_n = R_n y$, причем для вычисления R_n требуется конечное число применений непрерывного оператора B . Следовательно, R_n является непрерывным для любого числа n . Это свойство R_n вместе со свойством сходимости м.н.с. (5) доказывает то, что R_n — регуляризатор.

Известно, что для замкнутой поверхности S существуют значения параметра $k = k_j$ ($j = 1, 2, \dots$), при которых операторы, соответствующие уравнениям (1), (2), не являются обратимыми [3]. Это имеет место на частотах, соответствующих резонансам внутренней задачи. Применялись различные способы преодоления этой трудности [3]. В данной работе предлагается подход, естественным образом связанный с изложенным методом решения интегральных уравнений. В работе [13] доказано, что для уравнения (1) в случае критических частот k_j правая часть всегда ортогональна решениям однородного уравнения. Следовательно, уравнение (1) разрешимо (неоднозначно) при любой граничной функции в задаче Дирихле. При этом поле, вычисленное на основе найденного решения уравнения (1), определяется однозначно. Так как решение уравнения (1) существует, то изложенный метод обеспечивает сходимость итерационного процесса к некоторому решению. Это означает, что предлагаемый метод позволяет получить устойчивое решение задачи Дирихле и в случае критической частоты.

Известно, что непрямой метод граничных интегральных уравнений позволяет свести задачу Дирихле к уравнению II рода [3]. В данной работе такая возможность не используется сознательно, так как на критических частотах в этом случае свободный член уравнения заведомо не ортогонален решениям сопряженного однородного уравнения.

Отметим также следующее. Если размерность комплексной матрицы, возникающей при дискретизации уравнений (1), (2), равна N , то для решения матричного уравнения любым прямым методом требуется порядка N^3 арифметических операций [8]. В то же время один шаг процесса (5), как легко видеть, требует порядка N^2 операций. При больших значениях параметра ka для адекватного описания поля на поверхности S не-

Итера- ция	$F(x_n)$ без ускоре- ния	c^2	$F(x_n)$ с ускорением	Итера- ция	$F(x_n)$ без ускоре- ния	c^2	$F(x_n)$ с ускорением
1	$2,61 \cdot 10^0$	0,293	$2,61 \cdot 10^0$	16	$5,27 \cdot 10^{-3}$	0,9271	$1,92 \cdot 10^{-4}$
2	$7,67 \cdot 10^{-1}$	0,332	$7,67 \cdot 10^{-1}$	17	$4,89 \cdot 10^{-3}$	0,9271	$1,42 \cdot 10^{-4}$
3	$2,54 \cdot 10^{-1}$	0,377	$2,54 \cdot 10^{-1}$	18	$4,53 \cdot 10^{-3}$	0,9271	$1,19 \cdot 10^{-4}$
4	$9,63 \cdot 10^{-2}$	0,430	$9,63 \cdot 10^{-2}$	19	$4,20 \cdot 10^{-3}$	0,9272	$1,07 \cdot 10^{-4}$
5	$4,14 \cdot 10^{-2}$	0,523	$4,14 \cdot 10^{-2}$	20	$3,89 \cdot 10^{-3}$	0,9272	$9,76 \cdot 10^{-5}$
6	$2,17 \cdot 10^{-2}$	0,649	$2,17 \cdot 10^{-2}$	21	$3,61 \cdot 10^{-3}$	0,9272	$8,06 \cdot 10^{-5}$
7	$1,41 \cdot 10^{-2}$	0,776	$1,41 \cdot 10^{-2}$	22	$3,35 \cdot 10^{-3}$	0,9273	$4,57 \cdot 10^{-6}$
8	$1,09 \cdot 10^{-2}$	0,856	$1,09 \cdot 10^{-2}$	23	$3,11 \cdot 10^{-3}$	0,9273	$3,35 \cdot 10^{-7}$
9	$9,36 \cdot 10^{-3}$	0,901	$9,36 \cdot 10^{-3}$	24	$2,88 \cdot 10^{-3}$	0,9273	$5,72 \cdot 10^{-8}$
10	$8,44 \cdot 10^{-3}$	0,917	$8,44 \cdot 10^{-3}$	25	$2,67 \cdot 10^{-3}$	0,9273	$3,30 \cdot 10^{-8}$
11	$7,74 \cdot 10^{-3}$	0,924	$1,93 \cdot 10^{-2}$	26	$2,48 \cdot 10^{-3}$	0,9274	$2,63 \cdot 10^{-8}$
12	$7,15 \cdot 10^{-3}$	0,925	$6,10 \cdot 10^{-3}$	27	$2,29 \cdot 10^{-3}$	0,9274	$2,31 \cdot 10^{-8}$
13	$6,62 \cdot 10^{-3}$	0,926	$2,03 \cdot 10^{-3}$	28	$2,13 \cdot 10^{-3}$	0,9274	$2,09 \cdot 10^{-8}$
14	$6,14 \cdot 10^{-3}$	0,926	$7,33 \cdot 10^{-4}$	29	$1,97 \cdot 10^{-3}$	0,9274	$1,91 \cdot 10^{-8}$
15	$5,69 \cdot 10^{-3}$	0,927	$3,31 \cdot 10^{-4}$	30	$1,83 \cdot 10^{-3}$	0,9274	$1,72 \cdot 10^{-8}$

обходимо выбирать число узлов N довольно большим. В такой ситуации м.н.с. будет более устойчивым к накоплению ошибок вычисления.

Таким образом, двумя новыми моментами в данной работе являются: использование ускорения в известном м.н.с. Это позволяет добиться быстрой практической сходимости при получении решения; доказательство того, что применение м.н.с. заодно преодолевает классическую трудность, связанную с наличием критических частот в задаче Дирихле.

Для выяснения эффективности изложенного метода были рассмотрены следующие примеры.

Двумерная задача о дифракции плоской волны на круглом жестком цилиндре. Бралось $ka=5$, число узлов $N=72$. Для таких средних длин волн решение по теории Кирхгофа не эффективно. Применение предлагаемого метода позволяет значительно его улучшить. В таблице сравнивается скорость м.н.с. (5) без ускорения и с ускорением по формуле (11) через каждые 10 итераций. При этом c^2 вычисляется по формуле (10). Из таблицы видна стабилизация параметра c^2 , что согласуется с асимптотическими свойствами м.н.с. Близость c^2 к единице говорит о плохой обусловленности матрицы, что сказывается на медленной сходимости процесса (без ускорения). В то же время ускорение делает процесс быстро сходящимся: значение невязки уменьшается на восемь порядков по сравнению с первым приближением. Расчеты проводились на ЭВМ ЕС-1055 М (на языке Фортран). Время счета: 30 итераций — 40 с.

Задача о дифракции плоской волны на жестком эллипсе. Здесь $ka=5$, $kb=0,5$ ($a/b=10$), $N=180$. Время счета 10 мин. Известно, что эффективность метода граничных интегральных уравнений заметно снижается для вытянутых тел. Связано это с тем, что для таких тел необходимо выбирать N достаточно большим. Кроме того, численные исследования показывают, что обусловленность матрицы алгебраической системы существенно ухудшается для удлиненных тел. Проведенные расчеты подтверждают эффективность предлагаемого метода и в этом случае. На рис. 1 показана диаграмма рассеяния для рассматриваемого примера.

Задача о дифракции плоской волны на полом цилиндре при $ka=3,8317$, что соответствует внутреннему резонансу. Здесь бралось $N=72$. Реализация м.н.с. с описанным выше ускорением позволяет получить решение и в этом случае.

Два последних примера рассмотрены в связи с тем, что оставался открытым вопрос о сравнении в области очень коротких волн приближенного (по теории Кирхгофа) и прямого численного решения. Здесь исследуется падение плоской волны на круглый жесткий цилиндр при $ka=20$, $N=180$. Под теорией Кирхгофа на рис. 2 понимается следующее. На поверхности цилиндра в зоне света полное давление $p=2p_0$, а в зоне тени $p=0$. По этому давлению рассчитывается интеграл, которым выражается функция рассеяния. По лучевой теории функция рассеяния выписывается

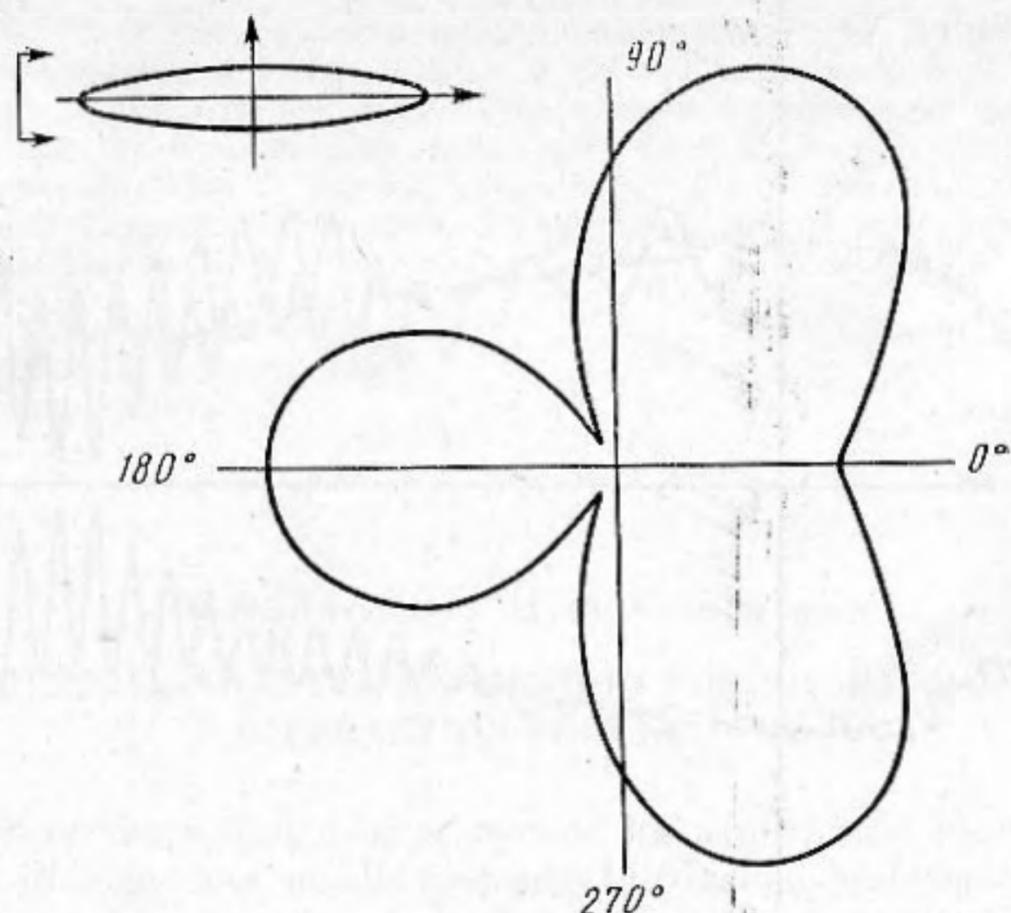


Рис. 1. Диаграмма рассеяния для жесткого эллипса:
 $ka=5$, $kb=0,5$

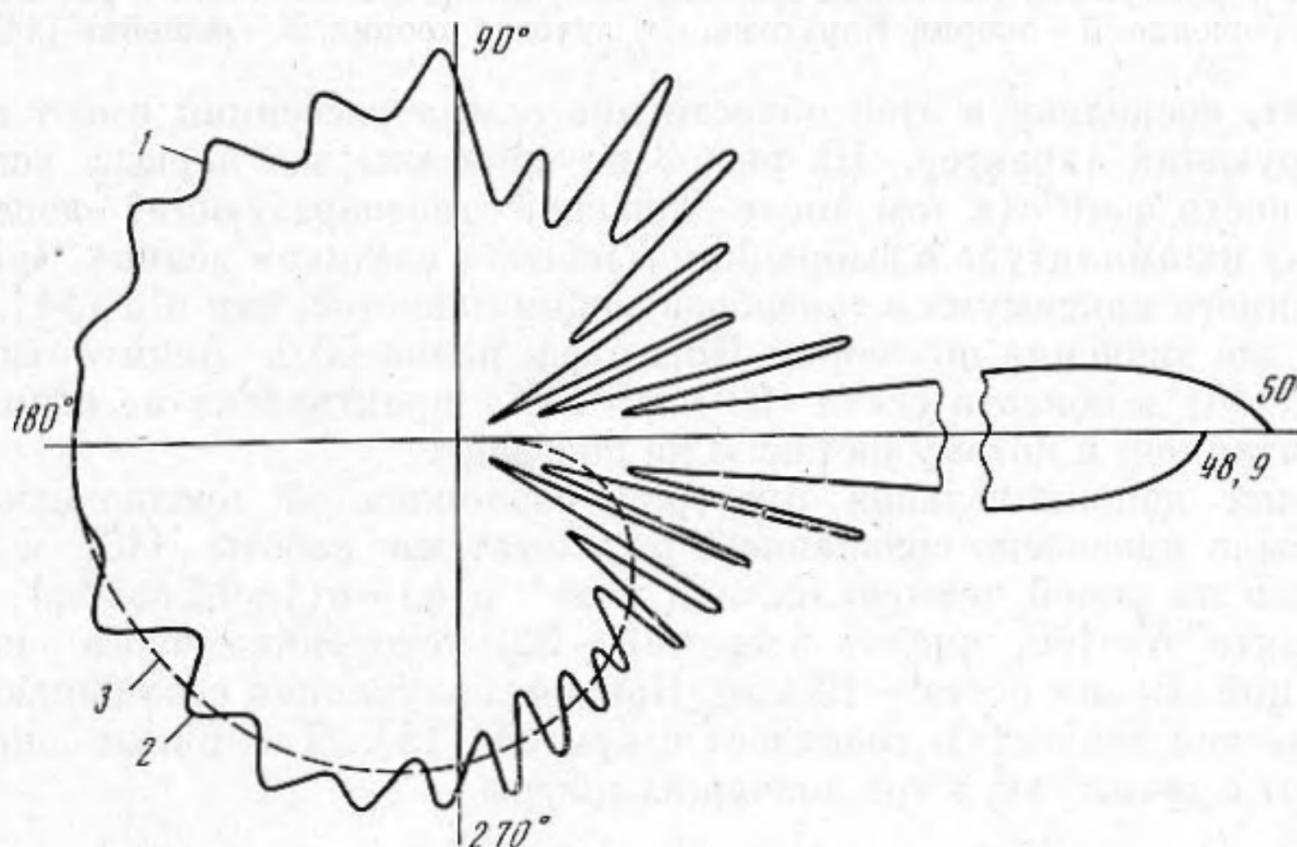


Рис. 2. Диаграмма рассеяния для жесткого цилиндра, $ka=20$: 1 — расчетное решение, 2 — теория Кирхгофа, 3 — лучевая теория

в элементарном виде:

$$F(\varphi) = \frac{\sqrt{\pi ka}}{2} \sqrt{\left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|}.$$

Для дальнейшего исследования зависимости функции рассеяния от увеличения частоты рассмотрим пример, аналогичный предыдущему, но при $ka=50$. Трудность прямой численной реализации состоит в необходимости выбора большого числа узлов (бралось $N=400$). Решение комплексной системы алгебраических уравнений размерностью 400×400 прямым методом Гаусса не привело к успеху (после 2 ч машинного счета). Реализация 20 итераций м.н.с. с ускорением через каждые пять итераций (58 мин машинного времени) уменьшает невязку на четыре порядка. Из рис. 3 видно, что даже в области очень коротких волн точное решение отличается от решения по лучевой теории и по теории Кирхгофа. Здесь же для оценки степени точности предлагаемого метода было проведено сравнение с асимптотическим решением [14]. Результаты сравнения приведены в области тени ($0^\circ < \varphi < 90^\circ$) для удобства в декартовой системе

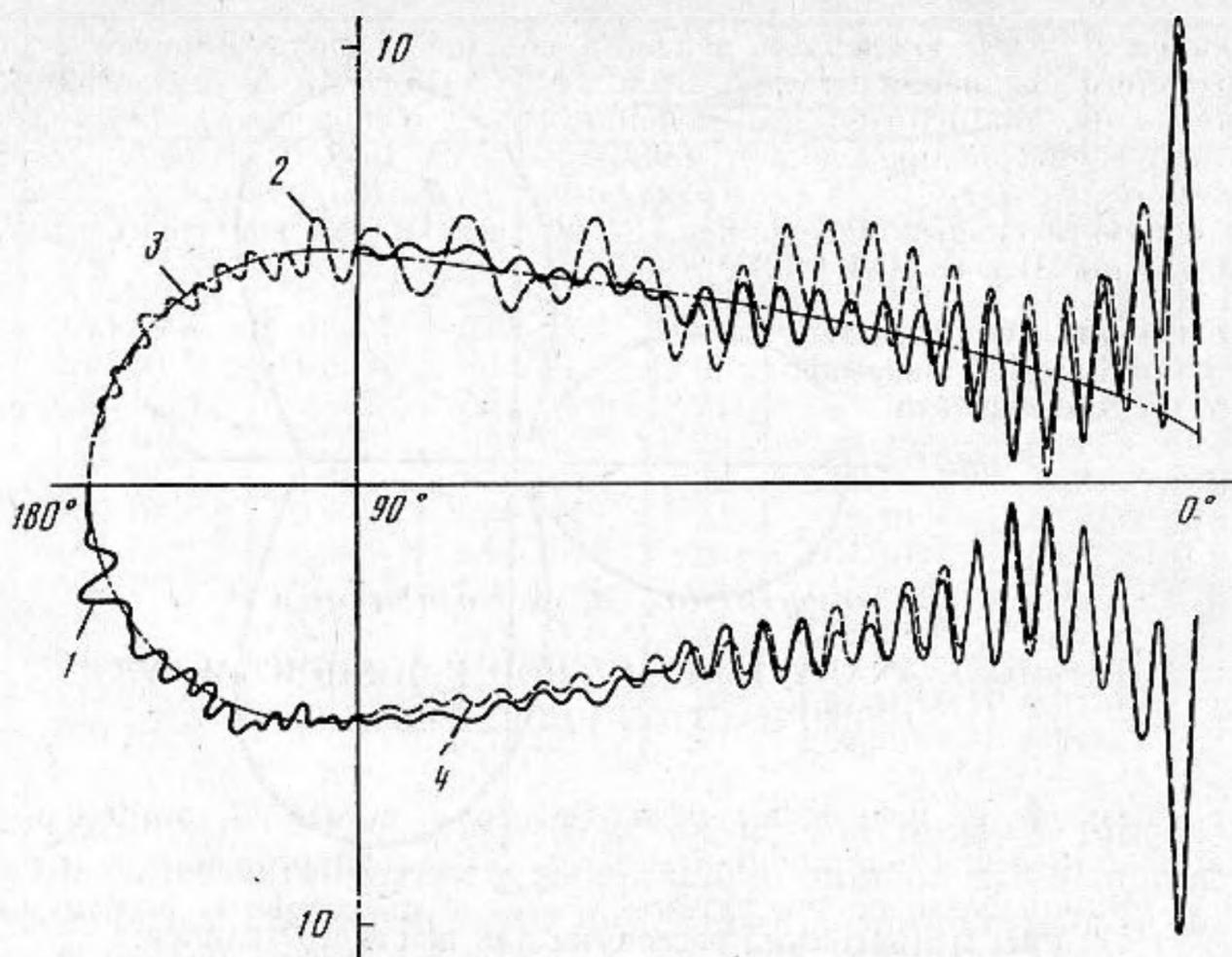


Рис. 3. Диаграмма рассеяния для жесткого цилиндра, $ka=50$: 1 – расчетное решение, 2 – теория Кирхгофа, 3 – лучевая теория, 4 – решение [14]

координат, поскольку в этой области диаграмма рассеяния имеет сильно осциллирующий характер. На рис. 3 не показаны два первых всплеска в окрестности $\varphi=0^\circ$ (в том числе основной тенеобразующий лепесток), поскольку их амплитуда в выбранном масштабе слишком велика. Значение рассчитанного максимума в тенеобразующем лепестке, как и в [14], равно 48,9, это же значение по теории Кирхгофа равно 50,0. Асимптотическое решение [14] в области света ($90^\circ < \varphi < 180^\circ$) практически не отличается от рассчитанного и потому на рис. 3 не показано.

В целях дополнительной проверки возможностей предназначаемого метода было проведено сравнение с результатами работы [15] в задаче дифракции на полой четырехлистной розе¹: $\rho(\varphi) = a(1 + 0,2 \cos 4\varphi)$, $ka=6$. Было взято $N=180$, число итераций – 32, ускорение – через каждые 10 итераций. Время счета – 19 мин. Кривая, полученная с помощью м.н.с. с графической точностью совпадает с кривой [15]. Табличные значения совпадают с точностью в три значащих цифры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 348 с.
2. Галишников Т. Н., Ильинский А. С. Численные методы в задачах дифракции. М.: Изд-во МГУ, 1987.
3. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. 312 с.
4. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 456 с.
5. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.
6. Фридман В. М. О сходимости методов типа наискорейшего спуска // Успехи мат. наук. 1962. Т. 17. Вып. 3. С. 201–204.
7. Красносельский М. А., Крейн С. И. Итерационный процесс с минимальными невязками // Мат. сб. 1952. Т. 31. № 2. С. 315–334.
8. Бахвалов Н. С. Численные методы. М.: Наука, 1973.
9. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 590 с.
10. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 223 с.
11. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шिशатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.
12. Алифанов О. М., Румянцев С. В. Об устойчивости итерационных методов решения линейных некорректных задач // Докл. АН СССР. 1979. Т. 248. № 6. С. 1289–1291.

¹ Табличные материалы по последней задаче были любезно предоставлены одним из авторов [15] А. И. Суковым.

13. *Цукерников И. Е.* О численном решении внешней задачи Дирихле с помощью интегрального уравнения I рода // ЖВМ и МФ. 1976. Т. 16. № 5. С. 1359–1364.
14. *Горяинов А. С.* Асимптотическое решение задачи о дифракции плоской электромагнитной волны на проводящем цилиндре // РИЭ. 1958. Т. 3. № 5. С. 603–614.
15. *Апельцин В. Ф., Заридзе Р. С., Каркашадзе Д. Д., Кюркчан А. Г., Суков А. И.* Метод вспомогательных источников. Вычисление полей вне граничных поверхностей. Казань: Изд-во КАИ, 1988.

Научно-исследовательский институт
механики и прикладной математики
Ростовского государственного университета

Поступила в редакцию
09.11.88
после исправления
20.09.89

I. D. Druginina, M. A. Sumbatyan

NUMERICAL-ANALYTICAL METHOD FOR SHORT-WAVE DIFFRACTION PROBLEMS

An application of the fastest descent method for a numerical solution of integral equations arising in high- and middle-frequency diffraction problems is investigated. An analytical solution based on the physical theory of diffraction is used as an initial approximation. Some asymptotic properties of the fastest descent method are used for acceleration of a process. The stability of a proposed approach on internal resonance frequencies is proved.