АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 36 1990 Вып. 2

УДК 551.463.21
© 1990 г.

С. З. Дунин, Г. А. Максимов

О ВЫЧИСЛЕНИИ ЗВУКОВЫХ ПОЛЕЙ, РАССЕЯННЫХ НА НЕРОВНЫХ АБСОЛЮТНО ОТРАЖАЮЩИХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Рассматривается рассеяние скалярных (звуковых) полей на шероховатых в среднем плоских абсолютно мягкой и абсолютно жесткой поверхностях. Предложен последовательный метод вычисления амплитуды рассеяния волновых полей, не использующий приближения гипотезы Рэлея. Показано, что на его основе могут быть получены как приближение Кирхгофа, так и приближение малых неровностей.

Задача о рассеянии звуковых волн на неровной поверхности обсуждалась неоднократно [1—4]. В последнее время эта проблема вновь привлекла внимание исследователей в связи с обоснованием возможности использования для ее решения гипотезы Рэлея [5—11]. В работах [7, 9, 10] в рамках гипотезы Рэлея и приближении малых наклонов получены выражения для амплитуд рассеяния, одновременно описывающие как приближение малых шероховатостей (малый параметр Рэлея $\sigma\nu \ll 1$, где σ — характерный масштаб шероховатости, ν — вертикальное волновое число), так и приближение Кирхгофа (приближение касательной плоскости) [3, 4, 12].

В рамках гипотезы Рэлея отраженное поле ищется в виде разложения по плоским уходящим волнам: $U_{\text{отр}}=\int d\mathbf{k}A(\mathbf{k})\exp(i\mathbf{kr}+i\nu z)$, что справедливо вдали от шероховатой поверхности. При использовании этого представления для решения граничной задачи возникает проблема расходимости интеграла $\int d\mathbf{k}A(\mathbf{k})\exp(i\mathbf{kr}+i\nu\eta(\mathbf{r}))$; поскольку при $z>\max|\eta(\mathbf{r})|$ условие излучения требует выбора $\operatorname{Im}\nu\geqslant 0$; $\nu=\sqrt{\omega^2/c^2-k^2}$ (ω — частота, c — скорость звука), то для значений $\eta(\mathbf{r})<0$ интеграл, вообще говоря, расходится. В работах [6, 8] рассматриваются условия, при которых указанный интеграл может быть вычислен асимптотически. В [6] предложена регуляризация, позволяющая устранить расходимости, присущие гипотезе Рэлея. В [7, 9, 10] для определения амплитуды рассеяния на основе гипотезы Рэлея использованы итерационные процедуры. Вычисление средних амплитуд рассеяния в этих случаях вновь приводит к расходящимся интегралам, так что предложенная регуляризация оказывается недостаточной. Тем не менее в работах [7, 10] при использовании некоторых математических приемов (разложение части экспонент) получены физически разумные результаты. Остается некоторая неудовлетворенность корректностью таких процедур. Поэтому возникает необходимость в построении теории рассеяния волн на неровных поверхностях, не использующей гипотезы Рэлея.

В настоящей работе предложен метод вычисления амплитуды рассеяния, а также среднего поля звуковой волны, отраженной от слабошероховатых абсолютно мягкой и абсолютно жесткой поверхностей, не использующий гипотезы Рэлея. Все выкладки для этих двух случаев проводятся параллельно вследствие их схожести.

Согласно теореме Грина [13], поле звуковой волны во внутренней области полупространства, ограниченного шероховатой поверхностью, задаваемой уравнением $z=\eta(\mathbf{r})$, $\mathbf{R}=(\mathbf{r}, z)$, может быть выражено через значение поля и его нормальной к поверхности производной на границе полупространства. Учитывая, что в случае абсолютно мягкой поверхности в нуль обращается поле на границе $U(\mathbf{r}, z=\eta(\mathbf{r}))=0$ (условие Дирихле), а в случае абсолютно жесткой поверхности — производная по нормали

к ней $\partial/\partial n U(\mathbf{r}, z=\eta(\mathbf{r}))=0$ (условие Неймана), поля в полупространстве представляются в виде: для условия Дирихле —

$$U_D(\mathbf{r}, z)=U_0(\mathbf{r}, z)-\int d\mathbf{r}'\left(\frac{\partial}{\partial z'}-\nabla\eta(\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'}\right)_{|z'=\eta(\mathbf{r}')}\cdot$$
$$\cdot U_D(\mathbf{r}', z')\,G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', z-\eta(\mathbf{r}')), \tag{1а}$$

для условия Неймана —

$$U_N(\mathbf{r}, z)=U_0(\mathbf{r}, z)+\left(d\mathbf{r}' U_N(\mathbf{r}', \eta(\mathbf{r}'))\left(\frac{\partial}{\partial z'}-\right.\right.$$
$$\left.-\nabla\eta(\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'}\right)_{|z'=\eta(\mathbf{r}')} G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', z-z'). \tag{1б}$$

Здесь $U_0(\mathbf{r}, z)=\exp(ik_0\mathbf{r}-i\nu_0 z)$ — поле падающей волны, $G(\mathbf{r}, z)$ — функция Грина свободного пространства:

$$G(\mathbf{r}, z)=\frac{1}{4\pi}\frac{e^{iKR}}{R}, \quad R=\sqrt{r^2+z^2}, \quad K=\omega/c. \tag{2}$$

В дальнейших вычислениях будем использовать разложение Вейля сферических волн по плоским [13] для представления функции Грина

$$G(\mathbf{r}, z)=\frac{1}{4\pi}\frac{i}{2\pi}\int d\mathbf{k}\frac{e^{i\mathbf{kr}+i\nu|z|}}{\nu}, \quad \begin{array}{ll}\nu=\sqrt{K^2-k^2}, & \text{при} \quad K>k,\\ \nu=i\sqrt{k^2-K^2}, & \text{при} \quad K<k.\end{array} \tag{2а}$$

Подставляя разложение (2а) в выражения (1а) и (1б), получим

$$U_D(\mathbf{r}, z)=U_0(\mathbf{r}, z)-\frac{i}{2(2\pi)^2}\int d\mathbf{k}\int d\mathbf{r}'\frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')+i\nu|z-\eta(\mathbf{r}')|}}{\nu}\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{\partial}{\partial z'}-\nabla\eta(\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'}\right)_{|z'=\eta(\mathbf{r}')} U_D(\mathbf{r}', z'), \tag{3а}$$

$$U_N(\mathbf{r}, z)=U_0(\mathbf{r}, z)+\frac{1}{2(2\pi)^2}\int d\mathbf{k}\int d\mathbf{r}' U_N(\mathbf{r}', \eta(\mathbf{r}'))*$$
$$*e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}\left(\operatorname{sign}(z-\eta(\mathbf{r}'))-\frac{\mathbf{k}\nabla\eta(\mathbf{r}')}{\nu}\right)e^{i\nu|z-\eta(\mathbf{r}')|}+\frac{1}{2}U_N(\mathbf{r}, z)\,\delta_{z,\eta(\mathbf{r})}. \tag{3б}$$

В этих выражениях

$$\operatorname{sign}(z=0)=0, \quad \delta_{z,\eta(\mathbf{r})}=\begin{cases}1, & z=\eta(\mathbf{r}),\\ 0, & z\neq\eta(\mathbf{r}).\end{cases}$$

Вдали от рассеивающей поверхности при $z>\max|\eta(\mathbf{r})|$ полное поле можно представить, раскрыв модули $|z-\eta(\mathbf{r})|=z-\eta(\mathbf{r})$ в виде суммы падающей и отраженных волн, т. е. в виде

$$U(\mathbf{r}, z)=U_0(\mathbf{r}, z)+\int d\mathbf{k}e^{i\mathbf{kr}+i\nu z}A(\mathbf{k}). \tag{4}$$

Здесь $A(\mathbf{k})$ — амплитуда рассеяния. Подчеркнем, что амплитуда рассеяния имеет физический смысл только вдали от рассеивающей поверхности. На самой поверхности и вблизи нее эта величина смысла не имеет. Для амплитуд рассеяния на абсолютно мягкой $A_D(\mathbf{k})$ и абсолютно жесткой $A_N(\mathbf{k})$ поверхностях будем иметь следующие выражения:

$$A_D(\mathbf{k})=-\frac{i}{2(2\pi)^2}\int d\mathbf{r}'\frac{e^{-i\mathbf{kr}'-i\nu\eta(\mathbf{r}')}}{\nu}\left(\frac{\partial}{\partial z'}-\nabla\eta(\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'}\right)_{|z'=\eta(\mathbf{r}')} U_D(\mathbf{r}', z'), \tag{5а}$$

$$A_N(\mathbf{k})=\frac{1}{2(2\pi)^2}\int d\mathbf{r}'\,e^{-i\mathbf{kr}'-i\nu\eta(\mathbf{r}')}\,U_N(\mathbf{r}', \eta(\mathbf{r}'))\left(1-\frac{\mathbf{k}\nabla\eta(\mathbf{r}')}{\nu}\right). \tag{5б}$$

Из этих выражений видно, что $A_D(\mathbf{k})$ выражается через значение нормальной к поверхности производной поля на поверхности $V_D(\mathbf{r}, \eta(\mathbf{r})) = \left(\frac{\partial}{\partial z} - \nabla\eta(\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)_{|z=\eta(\mathbf{r})} U_D(\mathbf{r}, z)$, а $A_N(\mathbf{k})$ — через значение самого поля на поверхности $U_N(\mathbf{r}, \eta(\mathbf{r}))$. Чтобы найти эти значения, в первом случае возьмем производную по нормали к поверхности от обеих частей равенства (3а), а затем положим $z=\eta(\mathbf{r})$; во втором случае сразу положим $z=\eta(\mathbf{r})$. В итоге получим следующие точные уравнения для величин $V_D(\mathbf{r}, \eta(\mathbf{r}))$ и $U_N(\mathbf{r}, \eta(\mathbf{r}))$ соответственно:

$$V_D(\mathbf{r}, \eta(\mathbf{r})) = -2i(\nu_0 + \mathbf{k}_0 \nabla\eta(\mathbf{r}))e^{i\mathbf{k}_0\mathbf{r} - i\nu_0\eta(\mathbf{r})} + \frac{1}{(2\pi)^2}\int d\mathbf{k}\cdot$$
$$\cdot\int d\mathbf{r}'\, e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + i\nu|\eta(\mathbf{r})-\eta(\mathbf{r}')|} V_D(\mathbf{r}', \eta(\mathbf{r}'))\left(\operatorname{sign}(\eta(\mathbf{r})-\eta(\mathbf{r}')) - \frac{\mathbf{k}\nabla\eta(\mathbf{r})}{\nu}\right), \tag{6а}$$

$$U_N(\mathbf{r}, \eta(\mathbf{r})) = 2e^{i\mathbf{k}_0\mathbf{r} - i\nu_0\eta(\mathbf{r})} + \frac{1}{(2\pi)^2}\int d\mathbf{k}\int d\mathbf{r}'\cdot$$
$$\cdot e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + i\nu|\eta(\mathbf{r})-\eta(\mathbf{r}')|} U_N(\mathbf{r}', \eta(\mathbf{r}'))\left(\operatorname{sign}(\eta(\mathbf{r})-\eta(\mathbf{r}')) - \frac{\mathbf{k}\nabla\eta(\mathbf{r}')}{\nu}\right). \tag{6б}$$

Отметим, что уравнения (6а) и (6б) отличаются только видом свободного члена, а в остальном это практически одно и то же уравнение. В случае, когда $\eta(\mathbf{r})=\text{const}$, т. е. поверхность является плоской, интегральные члены в (6а) и (6б) обращаются в нуль и получаем известные граничные соотношения для ровных абсолютно отражающих поверхностей, заключающиеся в удвоении поля или его производной по нормали на границе.

Уравнения (6а) и (6б) являются интегральными уравнениями Фредгольма второго рода, для которых существуют хорошо разработанные методы решения. В частности, если неровности поверхности малы и достаточно гладки и вся она полностью освещена падающим полем, то можно ожидать, что интегральное слагаемое будет малым, и уравнения (6а), (6б) можно решать итерациями. В нулевой итерации, когда интегральным слагаемым пренебрегают вовсе, граничное условие становится локальным. Подставляя его в (5а) и (5б), получим выражения для амплитуды рассеяния в приближении касательной плоскости, а после усреднения — известные выражения для коэффициентов отражения среднего поля в этом приближении [4, 12].

Возможен и другой подход, впервые реализованный в [14], когда вместо интегрального уравнения (6а) для определения значения производной поля по нормали к поверхности используется функциональное уравнение, получаемое из (3а), если в нем сразу положить $z=\eta(\mathbf{r})$. Однако в этом последнем случае решение удается получить, только если пренебречь явной зависимостью от $\eta(\mathbf{r})$ под интегралами.

Из выражений (6а), (6б) видно, что если разложить экспоненциальные множители (а это можно сделать при условии $K|\eta(\mathbf{r})| \ll 1$, поскольку интеграл по $\mathbf{k}$ набирается в области $|\mathbf{k}| \in [0, K]$; при больших значениях $|\mathbf{k}|$ подынтегральное выражение экспоненциально мало [1]), то можно строить теорию возмущений как по малым высотам и малым наклонам шероховатостей, так и только по малым наклонам, если разложить исключительно экспоненты, содержащие модули.

---

[1] Заметим, что такое разложение возможно только благодаря наличию модуля $|\eta(\mathbf{r})-\eta(\mathbf{r}')|$. В работах [7, 10], в которых использовалась гипотеза Рэлея, проведено разложение экспоненты $\exp\{-i\nu(\eta(\mathbf{r})-\eta(\mathbf{r}'))\}$, которая в зависимости от значения разности $\eta(\mathbf{r})-\eta(\mathbf{r}')$ может быть сколь угодно большой при больших $|\mathbf{k}|$. Именно это приводит к расходимостям в выражениях для средних амплитуд, если в них предварительно не провести указанного разложения.

В настоящей работе мы ограничимся вычислением амплитуд рассеяния в рамках теории возмущений по высотам и наклонам шероховатостей. Для этого проитерируем выражения (6а) и (6б), подставим получившиеся результаты соответственно в (5а) и (5б), а затем разложим экспоненциальные множители, удерживая слагаемые до второго порядка по η и $\nabla\eta$ включительно. В итоге будем иметь следующие выражения для амплитуд рассеяния:

$$A_D(\mathbf{k}_1)=-\delta(\mathbf{k}_0-\mathbf{k}_1)-\frac{1}{(2\pi)^2}\int d\mathbf{r}\, e^{i(\mathbf{k}_0-\mathbf{k}_1)\mathbf{r}}\Big\{-2i\nu_0\eta(\mathbf{r})-$$

$$-\frac{\nu_0}{\nu_1}\frac{(\nu_0^2+\nu_1^2)}{2}\eta^2(\mathbf{r})-i\frac{\nu_0}{\nu_1}\eta(\mathbf{r})\mathbf{k}_0\nabla\eta(\mathbf{r})\Big\}-$$

$$-\frac{1}{(2\pi)^4}\int d\mathbf{k}\int d\mathbf{r}\int d\mathbf{r}'\, e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\mathbf{r}}e^{i(\mathbf{k}_0-\mathbf{k})\mathbf{r}'}\Big\{\Big(\frac{\nu_0}{\nu_1}\nu^2-$$

$$-2\nu_0\nu_1\Big)\eta(\mathbf{r})\eta(\mathbf{r}')+i\frac{\nu_0}{\nu_1}\eta(\mathbf{r}')\mathbf{k}\nabla\eta(\mathbf{r})-\frac{\nu_0}{\nu_1}\frac{\nu^2}{2}(\eta(r)-\eta(\mathbf{r}'))\,|\eta(\mathbf{r})-\eta(\mathbf{r}')|-$$

$$-i\frac{\nu_0}{\nu_1}|\eta(\mathbf{r})-\eta(\mathbf{r}')|\mathbf{k}\nabla\eta(\mathbf{r})\Big\}, \tag{7а}$$

$$A_N(\mathbf{k}_1)=\delta(\mathbf{k}_0-\mathbf{k}_1)+\frac{1}{(2\pi)^2}\int d\mathbf{r}e^{i(\mathbf{k}_0-\mathbf{k}_1)\mathbf{r}}\Big\{-2i\nu_1\eta(\mathbf{r})-2\frac{\mathbf{k}\nabla\eta(\mathbf{r})}{\nu_1}-$$

$$-\frac{\nu_0^2+\nu_1^2}{2}\eta^2(\mathbf{r})+i\eta(\mathbf{r})\mathbf{k}_1\nabla\eta(\mathbf{r})\Big\}+\frac{1}{(2\pi)^4}\int d\mathbf{k}\int d\mathbf{r}\int d\mathbf{r}'\cdot$$

$$\cdot e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\mathbf{r}}e^{i(\mathbf{k}_0-\mathbf{k})\mathbf{r}'}\Big\{(\nu^2-2\nu\nu_1)\eta(\mathbf{r})\eta(\mathbf{r}')+2i\frac{\nu}{\nu_1}\eta(\mathbf{r}')\mathbf{k}_1\nabla\eta(\mathbf{r})+$$

$$+2i\frac{\nu_1}{\nu}\eta(\mathbf{r})\mathbf{k}\nabla\eta(\mathbf{r}')-i\eta(\mathbf{r})\mathbf{k}\nabla\eta(\mathbf{r}')+2\frac{\mathbf{k}_1\nabla\eta(\mathbf{r})}{\nu_1}\frac{\mathbf{k}\nabla\eta(\mathbf{r}')}{\nu}-$$

$$-\frac{\nu^2}{2}(\eta(\mathbf{r})-\eta(\mathbf{r}'))\,|\eta(\mathbf{r})-\eta(\mathbf{r}')|-i|\eta(\mathbf{r})-\eta(\mathbf{r}')|\mathbf{k}\nabla\eta(\mathbf{r}')\Big\}. \tag{7б}$$

Первые слагаемые в этих выражениях представляют собой амплитуду волны, зеркально отраженной от плоской поверхности. Линейные по η и $\nabla\eta$ слагаемые описывают брэгговское рассеяние и совпадают с известными [4, 12]. Обратим внимание на то, что во втором порядке по η и $\nabla\eta$ в отличие от обычной теории возмущений (см. Приложение) содержатся неаналитические слагаемые, пропорциональные $|\eta(\mathbf{r})-\eta(\mathbf{r}')|$.

Для определения амплитуды рассеяния среднего поля произведем усреднение выражений (7а), (7б), считая, что реализация случайной поверхности являются гауссовским процессом, так что $\langle\eta(\mathbf{r})\rangle=0$, $\langle\eta(\mathbf{r})\eta(\mathbf{r}')\rangle=\sigma^2 w(\rho)$, где $\boldsymbol{\rho}=\mathbf{r}-\mathbf{r}'$, σ — характерная высота неровностей, $w(\rho)$ — изотропная корреляционная функция шероховатости. Можно показать, что $\langle(\eta(\mathbf{r})-\eta(\mathbf{r}'))|\eta(\mathbf{r})-\eta(\mathbf{r}')|\rangle=0$, $\langle\mathbf{k}\nabla\eta(\mathbf{r})|\eta(\mathbf{r})-\eta(\mathbf{r}')|\rangle=0$. Учитывая это, получим следующие выражения для амплитуд рассеяния среднего поля:

$$\langle A_D(\mathbf{k}_1)\rangle=-\delta(\mathbf{k}_0-\mathbf{k}_1)\Big[1-\sigma^2\nu_0^2+-\frac{\sigma^2}{(2\pi)^2}\int d\mathbf{k}\int d\boldsymbol{\rho}\cdot$$

$$\cdot e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)\boldsymbol{\rho}}\{(\nu^2-2\nu_0\nu)w(\rho)+ik\nabla w(\rho)\}\Big], \tag{8а}$$

$$\langle A_N(\mathbf{k}_1)\rangle=\delta(\mathbf{k}_0-\mathbf{k}_1)\Big[1-\sigma^2\nu_0^2+\frac{\sigma^2}{(2\pi)^2}\int d\mathbf{k}\int d\boldsymbol{\rho}\cdot$$

$$\cdot e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)\boldsymbol{\rho}}\Big\{(\nu^2-2\nu_0\nu)w(\rho)+2i\frac{\nu}{\nu_0}\mathbf{k}_0\nabla w(\rho)-$$

$$-2i\frac{\nu_0}{\nu}\mathbf{k}\nabla w(\rho)+i\mathbf{k}\nabla w(\rho)-2\frac{(\mathbf{k}_0\nabla)(\mathbf{k}\nabla)w(\rho)}{\nu_0\nu}\Big\}\Big]. \qquad (8б)$$

Эти выражения можно записать в более компактном виде, проинтегрировав по частям слагаемые, содержащие градиенты корреляционой функции. Получим

$$\langle A_D(\mathbf{k}_1)\rangle=-\delta(\mathbf{k}_0-\mathbf{k}_1)\Big[1-\sigma^2\nu_0^2+\frac{\sigma^2}{(2\pi)^2}\int d\mathbf{k}\int d\boldsymbol{\rho}\cdot$$

$$\cdot e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)\rho}w(\rho)\{-2\nu_0\nu+(K^2-\mathbf{k}_0\mathbf{k})\}\Big], \qquad (9а)$$

$$\langle A_N(\mathbf{k}_1)\rangle=\delta(\mathbf{k}_0-\mathbf{k}_1)\Big[1-\sigma^2\nu_0^2+\frac{\sigma^2}{(2\pi)^2}\int d\mathbf{k}\int d\boldsymbol{\rho}\cdot$$

$$\cdot e^{(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)\rho}w(\rho)\Big\{(K^2-\mathbf{k}_0\mathbf{k})-2\frac{(K^2-\mathbf{k}_0\mathbf{k})^2}{\nu_0\nu}\Big\}\Big], \qquad (9б)$$

где $\int d\boldsymbol{\rho}e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)\rho}w(\rho)=w(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)$ – фурье-образ корреляционной функции. Можно показать, внеся слагаемое $-\sigma^2\nu_0^2$ под интегралы в этих выражениях, что оно в сумме со слагаемым $(K^2-\mathbf{k}_0\mathbf{k})$ дает нулевой вклад. Оставшееся выражение для $\langle A_D(\mathbf{k}_1)\rangle$ в точности совпадает с выражением (П.5) (см. Приложение), получаемым на основе метода снесения граничных условий на среднюю плоскость, и может быть преобразовано к виду [4]

$$\langle A_D(\mathbf{k}_1)\rangle=-\delta(\mathbf{k}_0-\mathbf{k}_1)\Big[1-2K\nu_0^2+2i\sigma^2\nu_0\int_0^\infty d\rho\frac{e^{iK\rho}}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}[J_0(k_0\rho)w(\rho)]\Big].$$

Детальный анализ поведения этого выражения в различных предельных случаях имеется в [4]. Выражение (9б) после указанных упрощений совпадает с результатом [10], если там перейти к пределу $\sigma\nu_0\ll 1$. Таким образом, несмотря на то что амплитуды рассеяния, получаемые на основе точной теории и на основе гипотезы Рэлея, отличаются, выражения для их средних значений в приближении малых высот и наклонов неровностей совпадают по крайней мере с точностью до квадратичных по указанным малым параметрам слагаемых.

Приложение

Согласно методу снесения граничных условий на среднюю плоскость, точное граничное условие Дирихле $U(\mathbf{r},\eta(\mathbf{r}))=0$ можно записать в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\eta^n(\mathbf{r})}{n!}\frac{\partial^n}{\partial z^n}U(\mathbf{r},z=0)=0. \qquad (П.1)$$

Оставляя только два первых члена этого разложения, будем иметь приближенное граничное условие, использованное в [4]

$$U(\mathbf{r},z=0)+\eta(\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial z}U(\mathbf{r},z=0)=0. \qquad П.2)$$

Для решения волнового уравнения в полупространстве с граничным условием (П.2) в [4] был использован метод среднего поля, который, как можно показать, эквивалентен суммированию в приближении Буррэ слагаемых, получаемых методом последовательных приближений из усредненного уравнения для поля на границе. Для удобства воспользуемся последним. Решение будем искать в виде суммы падающей и отраженных волн

$$U(\mathbf{r},z)=e^{i\mathbf{k}_0\mathbf{r}-i\nu_0 z}+\int d\mathbf{k}A(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}+i\nu z} \qquad (П.3)$$

где $A(\mathbf{k})$ – амплитуда рассеяния. Подставляя (П.3) в (П.2), получим следующее уравнение для амплитуды рассеяния:

$$A(\mathbf{k}_1)=-\omega(\mathbf{k}_0-\mathbf{k}_1)+\frac{1}{(2\pi)^2}\int d\mathbf{r}e^{i(\mathbf{k}_0-\mathbf{k}_1)\mathbf{r}}\{i\nu_0\eta(\mathbf{r})\}+$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^2}\int d\mathbf{k}\int d\mathbf{r}e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\mathbf{r}}A(\mathbf{k})\{-i\nu\eta(\mathbf{r})\}.$$

Решая это уравнение итерациями и удерживая слагаемые с точностью до η^2, получим следующее выражение для $A(\mathbf{k}_1)$:

$$A(\mathbf{k}_1) = -\delta(\mathbf{k}_0-\mathbf{k}_1) + \frac{2i\nu_0}{(2\pi)^2}\int d\mathbf{r} e^{i(\mathbf{k}_0-\mathbf{k}_1)\mathbf{r}}\eta(\mathbf{r}) +$$

$$+ \frac{2\nu_0}{(2\pi)^4}\int d\mathbf{k}\int d\mathbf{r}\int d\mathbf{r}' e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\mathbf{r}+i(\mathbf{k}_0-\mathbf{k})\mathbf{r}'}\nu\eta(\mathbf{r})\eta(\mathbf{r}'). \qquad (\text{П}.4)$$

Производя усреднение по случайным реализациям поверхности, получим для средней амплитуды рассеяния $\langle A(\mathbf{k}_1)\rangle$ выражение

$$\langle A(\mathbf{k}_1)\rangle = -\delta(\mathbf{k}_0-\mathbf{k}_1)\left[1 - \frac{2\nu_0\sigma^2}{(2\pi)^2}\int d\mathbf{k}\int d\boldsymbol{\rho} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)\boldsymbol{\rho}}\nu w(\rho)\right], \qquad (\text{П}.5)$$

где $w(r) = \langle\eta(\mathbf{r})\eta(\mathbf{r}')\rangle/\sigma^2$ – корреляционная функция шероховатости. Учитывая, что имеет место цепочка равенств

$$\frac{i}{2\pi}\int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}\nu = \lim_{z\to 0_+}\frac{i}{2\pi}\int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}+i\nu z}\nu =$$

$$= -\lim_{z\to 0_+}\frac{1}{(2\pi)}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\int d\mathbf{k}\frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}+i\nu z}}{\nu} = -\lim_{z\to 0_+}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{e^{iK\sqrt{z^2+r^2}}}{\sqrt{z^2+r^2}},$$

нетрудно видеть, что (П.5) эквивалентно выражению, полученному в [4] для среднего поля

$$\langle A(\mathbf{k}_1)\rangle = -\delta(\mathbf{k}_0-\mathbf{k}_1)\left[1 - \frac{2i\sigma^2\nu_0}{(2\pi)}\int d\boldsymbol{\rho} e^{-i\mathbf{k}_0\boldsymbol{\rho}} w(\rho)\lim_{z\to 0}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{e^{iK\sqrt{\rho^2+z^2}}}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\right]. \qquad (\text{П}.6)$$

Отметим, что учет квадратичных по η слагаемых в граничном условии (П.2) не вносит изменений в выражения (П.4), (П.6).

Покажем теперь, что учет всех членов ряда в граничном условии (П.1) эквивалентен гипотезе Рэлея. Действительно, используя представление решения в виде (П.3) и подставляя его в (П.1), получим следующее уравнение для амплитуды рассеяния:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i\nu_0\eta(\mathbf{r}))^n}{n!}e^{i\mathbf{k}_0\mathbf{r}} + \int d\mathbf{k} A(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\nu\eta(\mathbf{r}))^n}{n!} = 0.$$

Или, суммируя ряды, получим

$$e^{i\mathbf{k}_0\mathbf{r}-i\nu_0\eta(\mathbf{r})} + \int d\mathbf{k} A(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}+i\nu\eta(\mathbf{r})} = 0.$$

Это выражение есть не что иное, как формулировка гипотезы Рэлея применительно к задаче рассеяния звука на абсолютно мягкой неровной поверхности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бреховских Л. М.* Дифракция волн на неровной поверхности. I Общая теория // ЖЭТФ. 1952. Т. 23. № 3. С. 275–288.
2. *Исакович М. А.* Рассеяние волн на статистически шероховатой поверхности // ЖЭТФ. 1952. Т. 23. № 3. С. 305–314.
3. *Шмелев А. Б.* Рассеяние волн статистически неровными поверхностями // УФН. 1972. Т. 106. № 3. С. 459–480.
4. *Басс Ф. Г., Фукс И. М.* Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. М.: Наука, 1972. 424 с.
5. *Воронович А. Г.* Приближение малых наклонов в теории рассеяния звука на неровной свободной поверхности // Докл. АН СССР. 1986. Т. 287. № 2. С. 425–430.
6. *Воронович А. Г.* О гипотезе Рэлея в задаче рассеяния звука на неровной свободной поверхности // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273. № 1. С. 85–89.
7. *Воронович А. Г.* Приближение малых наклонов в теории рассеяния волн на неровных поверхностях // ЖЭТФ. 1985. Т. 89. № 7. С. 116–125.
8. *Hill N. R., Celli V.* Limits of convergence of the Rayleigh method to surface scattering // Phys. Rev. B. 1978. V. 17. № 6. P. 2478–2481.
9. *Hill N. R., Lerche J.* Mean-field renormalization and rough surface reflection of acoustic waves // J. Acoust. Soc. Amer. 1985. V. 78. № 3. P. 1081–1085.
10. *Кузнецова Е. П.* Приближение малых наклонов в задаче рассеяния звука на неровной жесткой поверхности // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 2. С. 272–274.
11. *Brown G. S.* A comparison of approximate theories for scattering from rough surfaces // Wave Motion. 1985. V. 7. P. 195–205.

12. *Бреховских Л. М., Лысанов Ю. П.* Теоретические основы акустики океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1982. 264 с.
13. *Морс Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. I. М.: Изд-во иностр. лит. 1958. 930 с.
14. *Лысанов Ю. П.* Об одном приближенном решении задачи о рассеянии звуковых волн на неровной поверхности // Акуст. журн. 1956. Т. 2. № 2. С. 182–187.

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию 17.02.89

S. Z. Dunin, G. A. Maksimov

ON THE CALCULATION OF SOUND FIELDS SCATTERED BY ROUGH ABSOLUTELY REFLECTED SURFACES

The scattering of scalar (sound) fields on the rough (in the mean plane) absolutely soft and absolutely hard surfaces is considered. The consistent method of calculation of the scattered wave amplitude which does not involve the Rayleigh hypotethis approximation is proposed. It is shown that the use of this method enables to obtain the Kirchhoff approximation as well as the small roughness one.