АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 36 1990 Вып. 2

УДК 534.222.2

© 1990 г.

И. Б. Есипов, В. В. Зосимов, С. Ю. Третьякова

УСИЛЕНИЕ СИГНАЛА В УСЛОВИЯХ ВКР В СРЕДЕ С ДИСПЕРСИЕЙ

Рассмотрена задача о нелинейном взаимодействии звуковых волн накачки и сигнала в пузырьковой среде. Показано, что в условиях вынужденного комбинационного рассеяния (ВКР) фазовая модуляция сигнала переходит с усилением в модуляцию интенсивности.

Рассмотрим вопрос о нелинейном взаимодействии модулированной по фазе звуковой волны с монохроматической волной накачки в пузырьковой среде. Присутствие пузырьков существенно меняет волновые свойства среды, в которой распространяется звук. При этом для звука меняются дисперсионные соотношения, увеличивается значение нелинейного параметра, а в присутствии волны накачки среда приобретает активные свойства, что делает возможным обращение волнового фронта или вынужденное комбинационное рассеяние звука на пузырьках [1—4]. Наряду с этим при взаимодействии звуковых волн в среде с пузырьками возможны и другие явления третьего порядка.

В частности, в работе [4] рассмотрено преобразование в активной оптической среде модулированного по фазе оптического сигнала в сигнал модулированной интенсивности с соответствующим усилением. Исследование этого процесса применительно к звуковым волнам может быть полезным, например, при изучении путей улучшения условий регистрации сигналов параметрическими приемниками звука.

Рассмотрим задачу в следующей постановке. Пусть на слой пузырьковой среды с пузырьками радиуса R_0 падают две волны: волна накачки $p_1=p_{10}\exp\{-i\omega_1 t+ik_{1x}x+ik_{1z}z\}$ и волна сигнала $p_2=p_{20}\exp\{-i\omega_2 t+ik_2 x\}$. Распространение волн в пузырьковой среде описывается волновым уравнением

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=\rho_0 n\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{1}$$

и уравнением движения одиночной газовой полости, которое во втором приближении имеет следующий вид:

$$\ddot{v}+\omega_0^2 v+f\dot{v}-\alpha v^2-\beta(2\ddot{v}v+\dot{v}^2)=-\varepsilon p, \tag{2}$$

где p — звуковое давление, v — изменение объема пузырька, n — концентрация пузырьков, c_0 — скорость звука в воде, $\omega_0^2=3\gamma p_0/\rho_0 R_0^2$, $\alpha=\omega_0^2(\gamma+1)/2v_0$, $\varepsilon=4\pi R_0/\rho_0$, $\beta=\frac{1}{6}v_0$.

Решения уравнений (1) и (2) будем искать, следуя [3], в виде волн с медленно меняющимися амплитудами $p=p_1(x)e^{-i\omega_1 t+ik_{1x}x+ik_{1z}z}+p_2(x)e^{-i\omega_2 t+ik_2 x}+p_3(x)e^{-i\omega_3 t+ik_{3x}x+ik_{1z}z}$, $v=v_1(x)e^{-i\omega_1 t}+v_2(x)e^{-i\omega_2 t}+v_3(x)e^{-i\omega_3 t}$. При этом $k_{3z}=k_{1z}$, где p_3, v_3 — соответственно звуковое давление и значение колебаний объема пузырьков для волны разностной частоты, $\omega_3=\omega_1-\omega_2$, $k_{3x}=k_{1x}-k_{2x}-\Delta k_x$, где Δk_x — расстройка волновых векторов. Получим укороченное уравнение для комплексной амплитуды p_2. Для этого выразим v через p из (2) и полученное выражение подставим в (1). Подставляя выражения для p и v в уравнение (2) и приравнивая члены при одинаковых

экспонентах $\exp\{-i\omega_i t\}$ $(i=1, 2, 3)$, получим следующую систему уравнений:

$$\omega_1^2 v_1-\omega_0^2 v_1+if\omega_1 v_1+2\mu v_2 v_3=\varepsilon p_1(x)\, e^{ik_{1x}x+ik_{1z}z}, \tag{3}$$

$$\omega_2^2 v_2-\omega_0^2 v_2+if\omega_2 v_2+2\mu v_1 v_3^*=\varepsilon p_2(x)\, e^{ik_2 x}, \tag{4}$$

$$\omega_3^2 v_3-\omega_0^2 v_3+if\omega_3 v_3+2\mu v_1 v_2^*=\varepsilon p_3(x)\, e^{ik_{3x}x+ik_{1z}z}, \tag{5}$$

где $\mu=\alpha-\beta(\omega_1^2+\omega_2^2-\omega_1\omega_2)$. Решая (3)—(5) методом последовательных приближений, для v_2 получаем следующее выражение:

$$v_2=-\frac{\varepsilon p_2(x)}{\gamma_2}-2\mu\frac{\varepsilon^2 p_1 p_3^* e^{i\Delta kx}}{\gamma_1\gamma_2\gamma_3^*}-\frac{4\mu^2\varepsilon^3|p_1|^2 p_2(x)}{|\gamma_1|^2\gamma_2\gamma_3^*},$$

где $\gamma_i=\omega_i^2-\omega_0^2+if\omega_i$. Заметим, что учет членов третьего порядка в уравнении колебаний пузырьков приводит к поправкам в определении резонансной частоты пузырька и не сказывается на характере решения уравнений [5].

Подставляя выражение для v_2 в (1) и учитывая, что в приближении медленно меняющихся амплитуд

$$\frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2}\simeq\left(-2ik_2\frac{\partial p_2}{\partial x}-k_2^2 p_2\right)e^{-i(\omega_2 t-k_2 x)},$$

получаем укороченное уравнение для сигнальной волны

$$\frac{\partial p_2}{\partial x}=\frac{-2i\omega_2^2\rho_0 n\varepsilon^3\mu^2|p_1|^2}{k_{2x}|\gamma_1|^2\gamma_2^2\gamma_3^*}p_2-2\mu\frac{\varepsilon^2 p_1 p_3^* e^{i\Delta kx}}{k_{2x}\gamma_1\gamma_2\gamma_3^*}, \tag{6}$$

где k_2 находится из дисперсионного соотношения

$$k_2=\frac{\omega_2^2}{c_0^2}+\frac{\omega_2^2\rho_0 n\varepsilon}{\omega_0^2-\omega_2^2+if\omega_2}.$$

Выражение для p_3 определяется из соотношений (1) и (3)—(5) следующим образом:

$$2ik_{3x}\frac{\partial p_3}{\partial x}=\rho_0 n\omega_3^2\frac{2\mu\varepsilon^2 p_1 p_2^*}{\gamma_3\gamma_1\gamma_2^*}e^{i\Delta kx}. \tag{7}$$

Интегрируя (7) и подставляя полученное выражение для p_3 в (4), получим

$$\frac{\partial p_2}{\partial x}=-\frac{2i\omega_2^2\rho_0 n\varepsilon^3\mu^2|p_1|^2}{k_{2x}|\gamma_1|^2\gamma_2^2\gamma_3^*}p_2-$$
$$-\frac{i\rho_0^2 n^2\omega_2^2\omega_3^2\mu_1^2\varepsilon^4(e^{i\Delta kx}-1)|p_1|^2}{k_{2x}k_{3x}\Delta k_x|\gamma_1|^2\gamma_2^2\gamma_3^{*2}}p_2. \tag{8}$$

Первый член выражения (8) описывает самовоздействие волны сигнала в присутствии волны накачки, второй член описывает параметрическое взаимодействие волн в пузырьковой среде. Заметим, что Δk велико в окрестности максимума резонансных колебаний пузырька на частоте ω_0 и поэтому будем считать $\omega_3\approx\omega_0$. Заметим, что второй член уравнения (8) зависит от расстройки волновых векторов взаимодействующих волн и с увеличением значения Δk_x им можно пренебречь. Так, при $\Delta k_x\gg\rho_0 n\omega_3^2\varepsilon/\gamma_3 k_{3x}=a$ выражение для p_2 принимает вид

$$\frac{\partial p_2}{\partial x}=-\frac{2i\omega_2^2\rho_0 n\varepsilon^3\mu^2|p_1|^2}{k_{2x}|\gamma_1|^2\gamma_2^2\gamma_3^*}p_2. \tag{9}$$

В этом случае взаимодействие волн в пузырьковой среде развивается аналогично процессу вынужденного комбинационного рассеяния. Волны сигнала и накачки, интерферируя, меняют упругие свойства среды. При этом картина интерференции меняется с частотой ω_3, равной разности частот взаимодействующих волн. Волна накачки, рассеиваясь комбинационным образом на упругих возмущениях, вызванных интерференцией взаимодействующих волн, приводит к усилению волны сигнала.

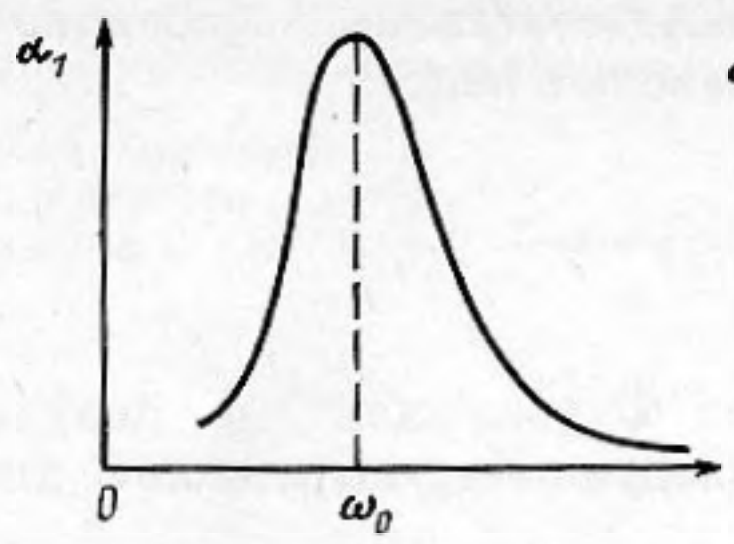

Рис. 1

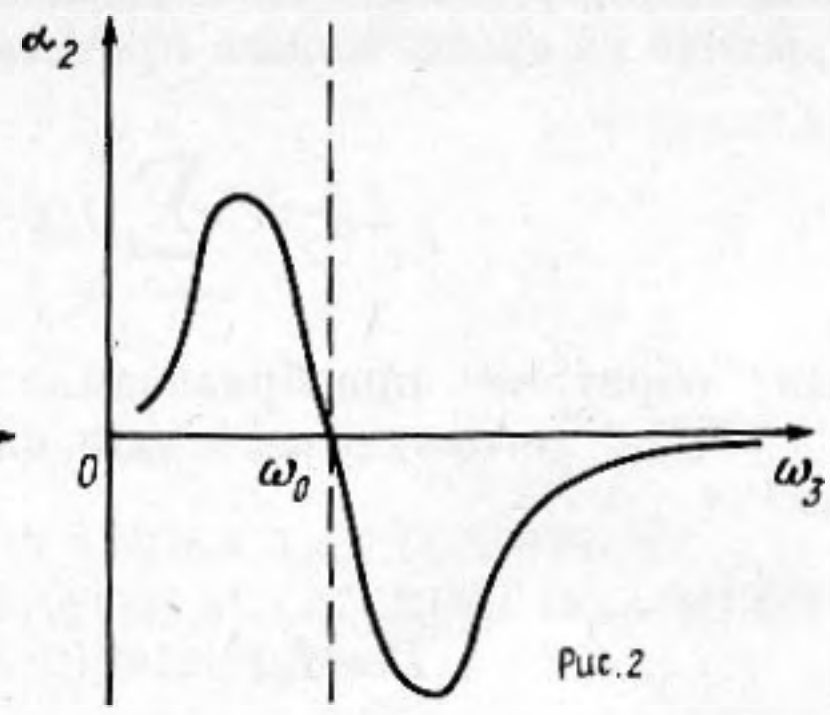

Рис. 2

Рис. 1. Зависимость коэффициента усиления сигнальной волны от разностной частоты

Рис. 2. Зависимость нелинейного сдвига фазы сигнальной волны от разностной частоты

Величина a определяет затухание в пузырьковой среде колебаний разностной частоты, вызванных взаимодействием волн сигнала и накачки. Другими словами, a определяет пространственный масштаб взаимодействия волн в среде. Как это следует из выражения (9), при $\Delta k \gg a$ возникают условия усиления волны сигнала p_2 Здесь $p_2 = p_{20} e^{\alpha x}$, $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, где

$$\alpha_1 = -\frac{\omega_2^2 \mu_1^2 2\rho_0 \varepsilon^3 n |p_1|^2}{k_{2x}\omega_1^4} \cdot \frac{2f\omega_2(\omega_3^2-\omega_0^2) - f\omega_3\omega_2 + f^3\omega_3}{\omega_2^6[(\omega_3^2-\omega_0^2)^2 + f^2\omega_3^2]}, \tag{10}$$

$$\alpha_2 = \frac{\omega_2^2 \mu_1^2 2\rho_0 \varepsilon^3 n |p_1|^2}{k_{2x}\omega_1^4} \cdot$$

$$\cdot \frac{(\omega_2^2-\omega_0^2)(\omega_3^2-\omega_0^2) + f^2\omega_2^2(\omega_3^2-\omega_0^2)}{\omega_2^6[(\omega_3^2-\omega_0^2)^2 + f^2\omega_3^2)}, \tag{11}$$

где α_1 описывает усиление сигнальной волны, α_2 — нелинейный сдвиг фазы сигнальной волны, приобретаемый ею по мере прохождения сквозь пузырьковую среду.

Зависимость α_1 и α_2 от ω_3 изображена на рис. 1 и 2. Коэффициент усиления волны максимален, когда разность частот сигнальной волны и волны накачки равна резонансной частоте пузырьков. Сдвиг фазы при этом равен нулю.

Пусть теперь исходный сигнал является модулированным по фазе, т. е. имеет вид

$$p = p_1 e^{-i\omega_2 t + i\nu \sin \Omega t}, \tag{12}$$

где Ω, ν — соответственно частота и индекс фазовой модуляции. Такой вид сигнала возникает, например, в параметрических приемниках звука.

Если при изменении частоты ω_3 на величину порядка Ω коэффициент усиления α меняется достаточно слабо, то его можно разложить в окрестности ω_3, что соответствует условию $\Omega \ll \omega_3 \approx \omega_0$

$$\alpha_1 = \alpha_1(\omega_3) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \omega}\Omega. \tag{13}$$

Разложим исходный сигнал в ряд Фурье

$$p = p_2 e^{-i\omega_2 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\nu) e^{in\Omega t}.$$

При распространении в среде каждая из компонент получает усиление и

сдвиг фазы с показателем $\alpha L+\alpha'\Omega Ln$. Следовательно, выражение для сигнала на выходе из среды можно представить в виде

$$p\sim e^{-i\omega_2 t}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\nu)\, e^{in(\Omega t-i\alpha'\Omega L)}.$$

Произведя обратное преобразование Фурье, для p получаем $p\sim \sim e^{i\nu \sin(\Omega t-i\alpha'\Omega L)t+\alpha L}$, что соответствует следующему выражению для интенсивности:

$$I=I_0 e^{\left[\alpha_1 L+2\nu\, \mathrm{sh}\left(\frac{\alpha_1' L\Omega}{2}\right)\cos\Omega t\right]}.$$

При $2\nu\,\mathrm{sh}(\alpha' L\Omega/2)\ll 1$. Соотношение между индексом модуляции интенсивности m и индексом фазовой модуляции ν будет

$$\frac{m}{\nu}=2\,\mathrm{sh}\,\frac{\alpha' L\Omega}{2}, \tag{14}$$

т. е. фазовая модуляция сигнальной волны переходит с усилением в модуляцию интенсивности звука.

Аналогично можно рассмотреть взаимодействие волн накачки и модулированного сигнала при частоте модуляции $\Omega\gtrsim\Delta\omega$, где $\Delta\omega$ — характерная ширина частотной зависимости $\alpha(\omega)$. Очевидно, что в этом случае переход фазовой модуляции в модуляцию интенсивности волны сигнала при вынужденном комбинационном рассеянии в пузырьковой среде с максимальным усилением будет осуществлен при условии совпадения одной из комбинационных частот сигнала с частотой ω_0, при которой достигается максимальное значение α_1. Для определенности можно записать это условие в виде $\omega_2-\Omega=\omega_0$. При этом данная комбинационная компонента будет усиливаться с коэффициентом α_1, в то время как амплитуды других компонент частотного спектра сигнала существенно не изменятся. Нетрудно показать, что в данном случае выражение для интенсивности рассеянной волны накачки будет иметь вид $I=I_0(1-\nu(e^{\alpha_1 L}-1)\cos\Omega t)$, что соответствует относительному значению индекса амплитудной модуляции $m_2/\nu= =e^{\alpha_1 L}-1$.

Сделаем оценку отношения m/ν. В соответствии с выражением (10) для частоты ω_0 при значении числа Маха $M=p_1/\rho c^2=10^{-4}$ получаем значение для показателя усиления $\alpha=1$ см$^{-1}$. В рассмотренном случае уже в слое толщиной 1 см происходит увеличение глубины амплитудной модуляции в 1,7 раза. Для малых частот модуляции, когда $\Omega\ll\omega_0$, соответствующее усиление, как это следует из выражения (14), будет меньше. Так, коэффициент усиления $m_1/\nu=1$ достигается в данном случае на расстоянии $L=10$ см.

Таким образом, в результате взаимодействия звуковых волн накачки и сигнала в условиях вынужденного комбинационного рассеяния в пузырьковой среде фазовая модуляция сигнала переходит с усилением в модуляцию интенсивности. При этом величина модуляции интенсивности звука существенным образом зависит от дисперсионных характеристик среды, где происходит взаимодействие волн.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кустов Л. М., Назаров В. Е., Сутин А. М.* Нелинейное рассеяние звука на пузырьковом слое // Акуст. журн., 1986. Т. 32. № 6. С. 804–810.
2. *Бункин Ф. В., Власов Д. В., Заболотская Е. А., Кравцов Ю. А.* Активная акустическая спектроскопия пузырька // Акуст. журн. 1983. Т. 29. № 6. С. 169–172.
3. *Власов Д. В., Стрельцов В. Н.* Вынужденное комбинационное рассеяние звука в одночастотном внешнем поле // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 1. С. 32–38.
4. *Зосимов В. В., Лямшев Л. М.* Исследование акустических полей методами голографии и нелинейной оптики. Обзор // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 6. С. 721–741.

5. *Заболотская Е. А.* Вынужденное комбинационное рассеяние звука на пузырьках с учетом кубической нелинейности // Акуст. журн. 1984. Т. 30. № 3. С. 324–327.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
26.04.89

I. B. Esipov, V. V. Zosimov, S. Yu. Tret'yakova

SIGNAL AMPLIFICATION UNDER THE CONDITIONS OF THE STIMULATED COMBINATIVE SCATTERING IN A MEDIUM WITH A DISPERSION

A problem of nonlinear interaction of acoustic pump and signal waves in a bubble medium is considered. It is shown that under the conditions of the stimulated combinative scattering the phase modulated signal is transformed with amplification into the intensity modulated one.