АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 36 1990 Вып. 2

УДК 534.222:551.463

© 1990 г.

В. Ю. Зайцев, М. А. Раевский

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА В СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Рассматривается влияние случайных неднородностей на формирование параметрического излучения. Анализируются амплитудные и угловые характеристики первых двух моментов поля разностной частоты. Неоднородности предполагаются крупными по сравнению с длинами волн накачки и вторичного поля. Показано, что структура нелинейных источников может сильно разрушаться в случае, когда размер неоднородностей мал по сравнению с поперечным сечением пучка накачки. В случае неоднородностей, крупных по сравнению с сечением пучка накачки, нарушение фазовой структуры нелинейных источников выражено гораздо слабее даже при сильных флуктуациях, когда длина экстинкции сравнима с длиной затухания поля накачки.

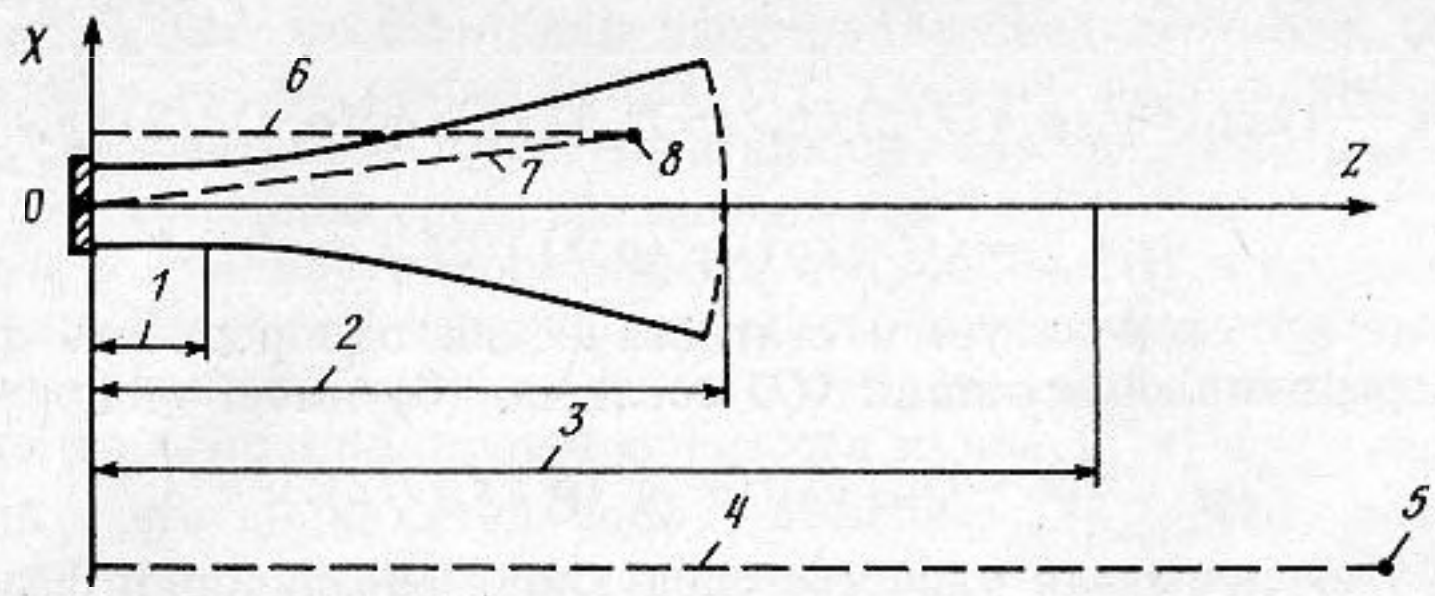
В связи с изучением возможностей применения параметрических излучателей (ПИ) для зондирования океана и атмосферы в последнее годы появились работы, где достаточно подробно исследовалось влияние регулярной рефракции [1—4] и отражающих границ [5, 6] на формирование низкочастотного поля ПИ. Вместе с тем практически не обсуждалось влияние на процесс параметрического излучения такого важного фактора, как флуктуации показателя преломления, которые типичны как для океанической среды, так и для атмосферы. Рассмотрение эффектов рассеяния акустических волн, генерируемых линейным источником (см., например, [7—9]), показывает, что, несмотря на малость флуктуаций показателя преломления, в океанической среде и атмосфере при прохождении волной протяженного рассеивающего поля ее корреляционные и энергетические характеристики могут существенно меняться. В случае ПИ случайные неоднородности среды могут оказывать влияние не только на распространение низкочастотного (НЧ) поля, но и на процесс его нелинейной генерации. Эти вопросы обсуждались в работах [10, 11], где рассматриваются слабые амплитудно-фазовые флуктуации поля ПИ в случайно-нерегулярной среде.

В данной работе анализируется влияние случайных крупномасштабных флуктуаций показателя преломления на статистические характеристики поля ПИ. В рамках параболического приближения изучаются первые два момента НЧ-поля, причем учитывается влияние неоднородностей показателя преломления как на формирование нелинейных виртуальных источников низкочастотного поля, так и на его распространение вне области нелинейного взаимодействия.

Будем рассматривать процесс нелинейной генерации звука в безграничной среде с крупномасштабными (по сравнению с длиной волны низкочастотного излучения) флуктуациями показателя преломления $n(\mathbf{r})=1+\mu(\mathbf{r})$, где $\langle\mu(\mathbf{r})\rangle=0$ ($\langle\ldots\rangle$ означает усреднение по ансамблю реализаций). В дальнейшем будет учитываться, что как в океане, так и в атмосфере $|\mu(\mathbf{r})|\ll 1$. Для описания процесса нелинейной генерации и рассеяния низкочастотного поля ПИ на флуктуациях показателя преломления будем использовать параболическое уравнение

$$2iK\frac{\partial p_s}{\partial z}+\Delta_\perp p_s+2K^2\mu(\boldsymbol{\rho},z)\,p_s=Q, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\rho}=(x,y)$, $\Delta_\perp=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$, p_s — давление НЧ-поля, Q — его нелиней-



Геометрия пучка накачки ПИ: *1* – дифракционная длина пучка накачки $L_д$, *2* – длина затухания волн накачки $L_з$, *3* – характерная длина $(\omega/\Omega)L_д$, *4* – траектория, на которой набегает случайная фаза $\varphi(\boldsymbol{\rho}, z)$, *5* – точка наблюдения $(\boldsymbol{\rho}, z)$, *6* – траектория, на которой набегает случайная фаза $\varphi(\boldsymbol{\rho}', z')$, *7* – траектория, на которой набегает случайная фаза $\varphi(\boldsymbol{\rho}', s')$, *8* – текущая точка интегрирования $(\boldsymbol{\rho}', z')$

ный источник, обусловленный волнами высокочастотной (ВЧ) накачки. В отсутствие случайных неоднородностей имеем [12]

$$Q_{\text{рег}}(\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{\varepsilon\Omega^2}{\rho_0 c^4} p_1 p_2^*, \tag{2}$$

где ε – коэффициент нелинейности, ρ_0 – плотность среды, c – скорость звука (соответствующая $n=1$), $p_{1,2}$ – комплексные поля накачки на частотах ω_1, ω_2, $\Omega=|\omega_1-\omega_2|$. При наличии флуктуаций нелинейный источник Q становится случайной функцией координат. Для волн накачки можно также записать параболические уравнения со случайным показателем преломления, выразить их решения через функции Грина параболического оператора и получить в явном виде $Q(\boldsymbol{\rho}, z)$. Соответствующее выражение получается, однако, весьма сложным для анализа. Ограничимся поэтому случаем, когда эффект влияния флуктуацией $\mu(\mathbf{r})$ на высокочастотные волны можно учесть в приближении геометрической акустики. Для этого необходимо [13], чтобы френелевский объем на расстоянии порядка длины затухания высокочастотной накачки $L_з$ был мал по сравнению с масштабом корреляции флуктуаций $L_к$, т. е. $(\lambda_{1,2}L_з)^{1/2} \ll L_к$ ($\lambda_{1,2}$ – длина волн накачки). Соответствующее выражение для нелинейного источника имеет вид

$$Q(\boldsymbol{\rho}', z') = Q_{\text{рег}} \exp\left[iK \int_0^{s'} \mu(s'')\, ds'' \right], \tag{3}$$

где s' – лучевая координата вдоль прямого луча из центра излучателя накачки в точку $(\boldsymbol{\rho}', z')$ (см. рисунок), $K=2\pi|\lambda_1^{-1}-\lambda_2^{-1}|$. Отметим, что кроме учтенных в (3) фазовых флуктуаций волн накачки есть также их амплитудные флуктуации, а также флуктуации эффективного коэффициента нелинейности $\varepsilon/\rho_0 c^4$, однако эти факторы мало влияют на процесс параметрической генерации. Действительно, в случае $(\lambda_{1,2}L_з)^{1/2} \ll L_к$ относительная величина амплитудных флуктуаций мала по сравнению с единицей, а флуктуации параметра $\varepsilon/\rho_0 c^4$ приводят к малым возмущениям (порядка μ^2) средних характеристик низкочастотного поля.

Ниже будет проведен анализ двух первых моментов низкочастотного излучения, представляющих наибольший практический интерес: $\langle p_s \rangle$ – среднего поля и $\langle p_s p_s^* \rangle$ функции когерентности. Уравнение (1) совместно с начальным условием $p_s(z=0, \boldsymbol{\rho}) = p_0(\boldsymbol{\rho})$ образует причинную по z стохастическую задачу (отметим, что поле накачки также удовлетворяет условию причинности). Это позволяет получить замкнутые уравнения для моментов p_s, используя идеологию марковского приближения [13].

Рассмотрим сначала среднее поле низкочастотного излучения. Выполняя процедуру замыкания, аналогичную приведенной в [13] для случая линейного волнового пучка без источников, на основании (1) нетрудно

получить

$$2iK\frac{\partial}{\partial z}[\exp(\langle\varphi^2(\boldsymbol{\rho},z)\rangle/2)\langle p_s\rangle]+\Delta_\perp[\exp(\langle\varphi^2(\boldsymbol{\rho},z)\rangle/2)\langle p_s\rangle]=$$
$$=\langle Q\rangle\exp(\langle\varphi^2(\boldsymbol{\rho},z)\rangle/2). \tag{4}$$

При выводе (4) используется статистическая однородность флуктуаций $\mu(\boldsymbol{\rho}, z)$. Усредненный источник $\langle Q\rangle$ согласно (3) имеет вид

$$\langle Q\rangle=Q_{\text{рег}}\exp(-\langle\varphi^2(\boldsymbol{\rho}', s')\rangle/2). \tag{5}$$

В (4) и (5) введены для удобства следующие обозначения фазовых набегов (см. рисунок):

$$K\int_0^{s'}\mu(s'')\,ds''=\varphi(\boldsymbol{\rho}',s'),$$
$$K\int_0^{z}\mu(\boldsymbol{\rho},z')\,dz'=\varphi(\boldsymbol{\rho},z). \tag{6}$$

Как видно из (4), для величины $\langle p_s\rangle\exp(\langle\varphi^2(\boldsymbol{\rho}, z)\rangle/2)$ имеет место уравнение того же вида, что и в однородной среде, но источник $Q_{\text{рег}}$ в правой части (4) заменен на $Q_{\text{эф}}$:

$$Q_{\text{эф}}=Q_{\text{рег}}\exp(\langle\varphi^2(\boldsymbol{\rho}, z)\rangle/2-\langle\varphi^2(\boldsymbol{\rho}, s)\rangle/2). \tag{7}$$

Обсудим, насколько существенным является это искажение структуры виртуальных источников. Наиболее просто это делается в предельных случаях высоконаправленного (режим Вестервельта) и сильно расходящегося (режим Берктея) [12, 14] пучка накачки. В дальнейшем понятие режима Вестервельта используется в расширенном смысле [14], т. е. при условии, что кривизной фронта виртуальных НЧ-источников (в отсутствие флуктуаций μ) можно пренебречь, в то время как для каждой ВЧ-волны пучок накачки является сферически-расходящимся. Такое приближение справедливо [14], когда $L_з<L_д\omega/\Omega$, где $L_д$ — дифракционная длина пучка накачки. При этом поперечный размер пучка накачки меньше поперечного размера френелевского объема, определяемого для волны низкой частоты, что и позволяет считать источники в каждом сечении синфазными. Режим Берктея имеет место в противоположном случае $L_з\gg L_д\omega/\Omega$, при этом сечение пучка накачки уже много больше сечения НЧ-зоны Френеля [4, 12, 14].

Итак, поскольку в режиме Вестервельта в пределах пучка накачки по низкой частоте можно пренебрегать отличием регулярного фазового набега плоской и сферической НЧ-волн, а случайные фазовые набеги (6) малы по сравнению с регулярными, то заведомо $|\varphi^2(\boldsymbol{\rho}, z)-\varphi^2(\boldsymbol{\rho}, s)|\ll 1$ и в (7) можно положить $Q_{\text{эф}}=Q_{\text{рег}}$.

В режиме Берктея, как следует из вида интегрального представления НЧ-поля регулярной задачи [4, 12, 14], вследствие большой кривизны фазовых фронтов виртуальных источников значение поля можно вычислять методом стационарной фазы. Это означает, что поле в каждой точке формируется источниками, лежащими в пределах НЧ-зоны Френеля, соответствующей прямому лучу, соединяющему центр излучателя накачки с точкой наблюдения. В сечении этой зоны Френеля регулярные источники можно считать синфазными, следовательно, для случайных фазовых набегов тем более будет выполнено неравенство $|\varphi^2(\boldsymbol{\rho}, z)-\varphi^2(\boldsymbol{\rho}, s)|\ll 1$, т. е. вновь имеем $Q_{\text{эф}}=Q_{\text{рег}}$.

Таким образом, в уравнении (4) для величины $\langle p_s\rangle\exp(\langle\varphi^2(\boldsymbol{\rho}, z)\rangle/2)$ структура нелинейного источника практически не нарушается и потому при произвольной расходимости пучка накачки (как следует из анализа двух предельных случаев) имеем

$$\langle p_s\rangle=p_s^{\text{рег}}\exp(-\langle\varphi^2(\boldsymbol{\rho},z)\rangle/2)\equiv p_s^{\text{рег}}\exp(-\beta z), \tag{8}$$

где $\beta=K^2\langle\mu^2\rangle L_к''/2$ — коэффициент экстинкции среднего поля, обусловленной рассеянием на неоднородностях [7]. Среднее поле параметрического излучения, следовательно, ведет себя аналогично среднему полю линейного пучка в нерегулярной среде без источников [13].

Перейдем к анализу интенсивности излучения ПИ в случайно-нерегулярной среде. Известно, что для линейного пучка, формируемого начальным распределением поля в плоскости $z=0$, наличие неоднородностей не сказывается на величине полной мощности пучка ($\int|p|^2dS_\perp=\text{const}$) и приводит лишь к его дополнительному уширению [13]. Для формирования поля ПИ принципиально важна взаимная фазировка виртуальных нелинейных источников. Таким образом, можно ожидать, что искажение фазовых фронтов виртуальных источников за счет влияния неоднородностей может уменьшить полную мощность излучения ПИ.

Из анализа регулярной задачи [4, 12, 14] известно, что характерным масштабом синфазности нелинейных источников является либо поперечный размер всего пучка накачки (в режиме Вестервельта), либо радиус НЧ-зоны Френеля (в режиме Берктея). Следует ожидать поэтому, что существенно разрушить структуру источников могут неоднородности, имеющие масштаб корреляции, малый по сравнению с указанными масштабами. В то же время для крупных (в указанном смысле) неоднородностей структура нелинейных источников практически не должна нарушаться.

Наиболее просто такое сохранение структуры виртуальных источников можно продемонстрировать в предельном случае не зависящих от ρ, т. е. плоскослоистых неоднородностей $\mu(\boldsymbol{\rho}, z)=\mu(z)$. При этом замена

$$p_s=\tilde{p}_s\exp(i\varphi(\boldsymbol{\rho}, z)) \tag{9}$$

приводит к параболическому уравнению в однородной среде с эффективным источником:

$$2iK\frac{\partial}{\partial z}\tilde{p}_s+\Delta_\perp\tilde{p}_s=Q_{эф}=Q_{рег}\exp[i\varphi(\boldsymbol{\rho}, s)-i\varphi(\boldsymbol{\rho}, z)]. \tag{10}$$

В плоскослоистой среде разность фаз $|\varphi(\boldsymbol{\rho}, s)-\varphi(\boldsymbol{\rho}, z)|$ обусловлена только геометрической разностью длин соответствующих отрезков (см. рисунок), а потому (как это делалось выше для величины $|\varphi^2(\boldsymbol{\rho}, s)-\varphi^2(\boldsymbol{\rho}, z)|$) в пределах френелевского объема, существенного для формирования НЧ-поля, можно положить $|\varphi(\boldsymbol{\rho}, s)-\varphi(\boldsymbol{\rho}, z)|\ll 1$ и соответственно $Q_{эф}\simeq Q_{рег}$. При этом из (9), (10) следует выражение (8) для среднего поля. Для интенсивности излучения ПИ в плоскослоистой среде имеем из (9)

$$\langle|p_s|^2\rangle=|p_s^{рег}|^2. \tag{11}$$

Подчеркнем, что равенство (11) получено при произвольной расходимости пучка накачки.

Рассмотрим теперь случай неоднородностей с конечным поперечным радиусом корреляции. В этой ситуации можно вновь воспользоваться марковским приближением и получить уравнение для функции когерентности $\Gamma=\langle p_s(\boldsymbol{\rho}_1, z)p_s^*(\boldsymbol{\rho}_2, z)\rangle$, обобщающее известное [13] уравнение на случай параметрической генерации:

$$\frac{\partial}{\partial z}\Gamma(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_+, z)-\frac{i}{K}\frac{\partial^2\Gamma}{\partial\boldsymbol{\rho}\,\partial\boldsymbol{\rho}_+}+\frac{\pi K^2}{4}H(\boldsymbol{\rho})\Gamma=$$

$$=-\frac{i}{2K}\left\langle Q\left(\boldsymbol{\rho}_++\frac{\boldsymbol{\rho}}{2}, z\right)p_s^*\left(\boldsymbol{\rho}_+-\frac{\boldsymbol{\rho}}{2}, z\right)-\right.$$

$$\left.-Q^*\left(\boldsymbol{\rho}_+-\frac{\boldsymbol{\rho}}{2}, z\right)p_s\left(\boldsymbol{\rho}_++\frac{\boldsymbol{\rho}}{2}, z\right)\right\rangle. \tag{12}$$

Здесь введены обозначения: $\boldsymbol{\rho}_+=(\boldsymbol{\rho}_1+\boldsymbol{\rho}_2)/2$, $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_2$,

$$H(\boldsymbol{\rho})=[A(0)-A(\boldsymbol{\rho})]/\pi, \quad A(\boldsymbol{\rho})=4\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_\mu(\boldsymbol{\rho},\zeta)\,d\zeta,$$

$$\psi_\mu(\boldsymbol{\rho},z)=\langle\mu(\rho_1,z_1)\,\mu(\rho_1+\rho,z_1+\zeta)\rangle.$$

Решение этого уравнения по аналогии с [13] можно представить в виде

$$\Gamma(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_+,z)=\frac{K^2}{4\pi^2}\int_0^z\frac{dz'}{(z-z')^2}\,d\boldsymbol{\rho}'\,d\boldsymbol{\rho}_+'\,R(\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\rho}_+',z')\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{iK}{z-z'}(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')(\boldsymbol{\rho}_+-\boldsymbol{\rho}_+')-\frac{\pi K^2}{4}\int_0^{z-z'}H\left[\boldsymbol{\rho}\frac{\zeta}{z-z'}+\boldsymbol{\rho}'\left(1-\frac{\zeta}{z-z'}\right)\right]d\zeta\right\}, \tag{13}$$

где $R(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_+,z)=-(i/2K)\langle Q(\boldsymbol{\rho}_++\boldsymbol{\rho}/2,z)\,p_s^*(\boldsymbol{\rho}_+-\boldsymbol{\rho}/2,z)-Q^*(\boldsymbol{\rho}_+-\boldsymbol{\rho}/2,z)\,p_s(\boldsymbol{\rho}_++\boldsymbol{\rho}/2,z)\rangle$. Для интенсивности $\langle I\rangle=\langle|p_s|^2\rangle=\Gamma(0,\rho_+,z)$ интеграл (13) несколько упрощается:

$$\langle I\rangle=\frac{K^2}{4\pi^2}\int_0^z\frac{dz'}{(z-z')^2}\,d\boldsymbol{\rho}'\,d\boldsymbol{\rho}_+'R(\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\rho}_+',z')\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{iK}{z-z'}\boldsymbol{\rho}'(\boldsymbol{\rho}_+-\boldsymbol{\rho}_+')-\frac{\pi K^2}{4}(z-z')\int_0^1 H(\rho't)\,dt\right\}. \tag{14}$$

Отсюда получаем для полного потока мощности параметрического излучения выражение

$$\int\langle I\rangle d\boldsymbol{\rho}_+=\int_0^z dz'\,d\boldsymbol{\rho}_+'R(0,\boldsymbol{\rho}_+',z'). \tag{15}$$

Интеграл (15) при $z\gg L_з$ (т. е. вне области виртуальных источников) дает сохранение полной мощности НЧ-пучка, как это и должно быть в пренебрежении поглощением энергии НЧ-поля.

Чтобы понять отличие выраженией (14) и (15) по сравнению со случаем однородной среды, необходимо знать структуру коррелятора $\langle Qp_s^*\rangle$ в эффективном источнике R. Отметим, что для рассмотренного выше случая плоскослоистой среды мы имели в силу (3), (9), (10) $\langle Qp_s^*\rangle=Q^{\text{рег}}(ps^*)^{\text{рег}}$. Учитывая также, что в плоскослоистой среде $H(\boldsymbol{\rho}')\equiv0$, из (14) получаем вновь, что распределение $\langle I(\boldsymbol{\rho}_+,z)\rangle$ то же, что и в регулярной среде.

Обратимся теперь к противоположному случаю мелкомасштабных неоднородностей. При рассмотрении режима Вестервельта это будет означать, что их поперечный масштаб корреляции $L_к^\perp$ мал по отношению к характерному размеру пучка накачки $a_*\sim a(L_з/2)$, а для режима Берктея масштаб $L_к^\perp$ будет предполагаться малым по сравнению с характерным радиусом Френеля НЧ-поля (в области параметрического взаимодействия). При выполнении этих условий коррелятор $\langle Qp_s^*\rangle$ расщепляется. т. е. $\langle Qp_s^*\rangle=\langle Q\rangle\langle p_s^*\rangle$. Действительно, источник $Q(\boldsymbol{\rho},z)$ зависит лишь от тех неоднородностей, которые лежат в сравнительно узком френелевском объеме на частоте накачки, тогда как НЧ-поле $p_s(\boldsymbol{\rho},z)$ функционально зависит от неоднородностей во всем сечении пучка (либо френелевском объеме по низкой частоте, если пучок выходит за его пределы). Таким образом, можно считать, что случайные величины Q и p_s^* определяются статистически независимыми неоднородностями и, следовательно, некорре-

лированы. Из рассмотренного ранее имеем:

$$\langle p_s\rangle = p_s^{\text{рег}} \exp\langle -\varphi^2(\boldsymbol{\rho}, z)/2\rangle,$$

$$\langle Q\rangle = Q^{\text{рег}} \exp\langle -\varphi^2(\boldsymbol{\rho}, s)/2\rangle.$$

В силу параксиальности пучка накачки в области взаимодействия можно положить $\langle\varphi^2(\boldsymbol{\rho}, z)\rangle \simeq \langle\varphi^2(\boldsymbol{\rho}, s)\rangle = 2\beta z$, где β — коэффициент экстинкции на частоте Ω, введенный в (8). Поэтому для эффективного источника R имеем

$$R(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_+, z) = R_{\text{рег}} \exp(-2\beta z). \tag{16}$$

Таким образом, мелкомасштабные неоднородности приводят к появлению дополнительного (по сравнению с вязким) затухания волн накачки:

$$2\alpha_{\text{эф}} = 2\alpha + 2\beta, \tag{17}$$

где α — коэффициент затухания на частоте $\Delta \simeq \omega_{1,2}$. Простого переобозначения (16), (17) в общем случае недостаточно для того, чтобы свести задачу в случайной среде к некоторой эффективной регулярной, поскольку источник R может зависеть от α не только через $\langle Q\rangle$ и $\langle p_s\rangle$, но и через $p_s^{\text{рег}}$. Однако численные расчеты [12] указывают на то, что в режиме Вестервельта величина p_s слабо зависит от величины α в пределах области взаимодействия, поэтому при оценке влияния неоднородностей этой зависимостью можно пренебречь. Таким образом, в режиме Вестервельта из (15) приближенно получаем соотношение

$$\int \langle I\rangle d\boldsymbol{\rho}_+ \simeq \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \int I_{\text{рег}}\, d\boldsymbol{\rho}_+. \tag{18}$$

Выражения (15), (16) и оценочное выражение (18) говорят о том, что мелкомасштабные неоднородности в отличие от слоистых приводят к нарушению структуры виртуальных источников и уменьшают эффективность излучения ПИ, что согласуется с приведенными выше качественными соображениями.

Обратимся к анализу локальной интенсивности поля на основе (14). Во фраунгоферовой зоне $z \gg Ka^2(z)$ (где $a(z)$ — текущий радиус пучка накачки) выражение для фазы в (14) упрощается: $K\boldsymbol{\rho}'(\boldsymbol{\rho}_+ - \boldsymbol{\rho}_+')/(z-z') \simeq \simeq K\boldsymbol{\rho}'\boldsymbol{\rho}_+/(z-z')$ и потому (15) при $z \gg L_з$ можно представить в виде свертки:

$$\langle I(\boldsymbol{\rho}_+, z)\rangle = K^2 \int \frac{dz'}{z-z'} \int d\boldsymbol{\rho}_+'\, d\boldsymbol{\varkappa}'\, \Phi_R(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\rho}_+', z')\, \Phi_н(\boldsymbol{\varkappa}-\boldsymbol{\varkappa}', z, z'), \tag{19}$$

где Φ_R — фурье-образ функции R, $\Phi_н$ — фурье-образ функции

$$\tilde{H} = \exp\left[-(\pi K^2/4)(z-z') \int_0^1 H(\boldsymbol{\rho}' t)\, dt\right], \quad \boldsymbol{\varkappa} = K\boldsymbol{\rho}_+/z.$$

Отметим при этом, что

$$(\pi K^2/4) \int_0^1 H(\boldsymbol{\rho}' t)\, dt = \begin{cases} 0, & \text{при } \rho' \ll L_к^{\perp} \\ 2\beta, & \text{при } \rho' \gg L_к^{\perp}. \end{cases} \tag{20}$$

Учитывая, что характерный масштаб фурье-образа $(\Delta\varkappa)$ и пространственный масштаб оригинала (ΔL) связаны соотношением $(\Delta\varkappa) \sim (\Delta L)^{-1}$, и принимая во внимание асимптотики (20), для свертки в интеграле (19) можно получить оценку в приосевой области:

$$\int \Phi_R(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\rho}_+', z, z')\, \Phi_н(\boldsymbol{\varkappa}-\boldsymbol{\varkappa}', z, z')\, d\boldsymbol{\varkappa}' \simeq$$

$$\simeq R(0, \boldsymbol{\rho}_+', z')\left[\exp\{-2\beta(z-z')\} a_{\text{эф}}^2(z') + (1-\exp\{-2\beta(z-z')\}) L_\perp^2(z)\right], \tag{21}$$

где $L_\perp(z)$ — характерный масштаб функции $\tilde{H}$, а под $a_{эф}(z')$ следует понимать минимальную из двух величин: текущего радиуса пучка либо текущего значения НЧ-радиуса Френеля. При получении (21) было учтено, что $a_{эф} \gg L_к^\perp$. Нетрудно видеть, что первое слагаемое в (21) обусловлено асимптотикой функции $\tilde{H}$ при $\rho' \gg L_к^\perp$. Из (20), (21) следует, что в приосевой области $\varkappa \ll a_{эф}^{-1}$ на расстояниях, удовлетворяющих условию

$$z \ll (2\beta)^{-1} \ln\left[1 + \frac{a_{эф}^2}{L_\perp^2(z)}\right]; \tag{22}$$

при нахождении интенсивности $\langle I \rangle$ можно заменять в (14) и (19) функцию $\tilde{H}(\rho')$ ее асимптотикой $\exp\{-2\beta(z-z')\}$. При этом с учетом связи (16) получаем из (14) простое соотношение:

$$\langle I(\boldsymbol{\rho}_+, z) \rangle \simeq \exp(-2\beta z) I_{рег}. \tag{23}$$

Напомним, что (23) справедливо при $\rho_+ < K^{-1} a_{эф}^{-1} z$. Поскольку в режиме Вестервельта ширина диаграммы направленности (в регулярной среде) $\Delta\theta_а \sim (KL_з)^{-1/2} \ll 2\pi/Ka_{эф}$, выражение (23) описывает всю основную часть диаграммы направленности ПИ. В режиме Берктея, где $\Delta\theta_а \gtrsim 2\pi/Ka_{эф}$, формула (23) справедлива лишь в малой окрестности максимума диаграммы.

Рассмотрим теперь интенсивность НЧ-поля при бо́льших значениях $\rho_+ \sim z/KL_к^\perp$. В этом случае, как нетрудно показать,

$$\int \Phi_R(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\rho}_+', z') \Phi_н(\boldsymbol{\varkappa} - \boldsymbol{\varkappa}', z, z') d\boldsymbol{\varkappa}' \simeq R(0, \boldsymbol{\rho}_+', z') \times \\ \times [1 - \exp(-2\beta(z-z'))] (L_к')^2. \tag{24}$$

Отсюда на основании (19) следует оценка значения интенсивности бокового поля ПИ:

$$\langle I(\boldsymbol{\rho}_+, z) \rangle \simeq K \int \frac{dz'}{(z-z')^2} d\boldsymbol{\rho}_+' R^{рег}(0, \rho_+', z') (e^{-2\beta z'} - e^{-2\beta z}) (L_к^\perp)^2. \tag{25}$$

Таким образом, в отличие от случая регулярной среды, где, как известно [12], у ПИ практически отсутствует боковое поле, в среде с мелкомасштабными неоднородностями возникает диффузная часть диаграммы направленности с характерным угловым масштабом $\theta \sim (KL_к^\perp)^{-1}$ и амплитудой (25).

Соотношения (23), (25) были получены в области, непосредственно примыкающей к зоне взаимодействия. На бо́льших расстояниях $z \gg \alpha^{-1}$, β^{-1} НЧ-поле распространяется, как линейный пучок с угловым распределением, сформированным в процессе нелинейной генерации. На расстояниях $z \gg \beta^{-1}$ при вычислении интеграла (14) можно воспользоваться асимптотикой функции $\tilde{H}(\rho')$ при $\rho' \ll L_к^\perp$, которая имеет универсальный характер [7]: $\tilde{H}(\rho') \simeq \exp(-\rho'^2 \beta z/L_0^2)$, причем масштаб L_0 по порядку величины совпадает с масштабом корреляции $L_к^\perp$. При этом на расстояниях $z \gg \beta^{-1}$ из (14) и (20) получаем

$$\langle I(\theta, z) \rangle \sim \frac{L_0^2}{\beta z^3} \left[\int dz' \, d\rho_+' R(0, \rho_+', z')\right] \exp\left(-\frac{K^2 L_0^2 \theta^2}{2\beta z}\right), \tag{26}$$

где $\theta = \rho_+/z$ — угол наблюдения. Характерная угловая ширина пучка, как видно из (26), растет по диффузионному закону $\Delta\theta_{хар} \sim z^{1/2}$, а интенсивность поля на оси спадает по закону z^{-3}, т. е. быстрее, чем в регулярной среде, что обусловлено поперечным уширением НЧ-пучка вследствие эффектов многократного рассеяния.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гурбатов С. Н., Прончатов-Рубцов Н. В.* Параметрическая генерация низкочастотного сигнала в звуковых волноводных каналах // Акуст. журн. 1984. Т. 30. № 1. С. 51–57.
2. *Гурбатов С. Н., Зайцев В. Ю., Прончатов-Рубцов Н. В.* О нелинейной генерации низкочастотного звука в рефракционном акустическом волноводе // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 4. С. 620–625.

3. *Зайцев В. Ю.* Параметрическое излучение звука в высокоградиентных океанических волноводах // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 4. С. 646–651.
4. *Гурбатов С. Н., Костерин А. Г., Прончатов-Рубцов Н. В.* К теории параметрических излучателей звука в рефракционных акустических волноводах // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 4.
5. *Карабутова Н. Е., Новиков Б. К.* Работа параметрического излучателя звука в плоском волноводе // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 1. С. 65–70.
6. *Зайцев В. Ю., Островский Л. А., Сутин А. М.* Модовая структура поля параметрического излучателя в акустическом волноводе // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 1. С. 37–42.
7. *Татарский В. И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967.
8. Распространение звука во флуктуирующем океане/Под ред. Флатте С. М.: Мир, 1982.
9. *Артельный В. В., Горская Н. С., Раевский М. А.* Статистические характеристики нормальных мод в случайно-неоднородных океанических волноводах: Препринт № 148. Горький: ИПФ АН СССР, 1986.
10. *Smith B. V.* A theoretical study of the effects of an inhomogenious medium upon a transmitter which exploits the nonlinear properties of acoustic propagation // J. Sound and Vibr. 1971. V. 17. P. 129–138.
11. *Chotiros N. P. and Smith B. V.* A theoretical and experimental study of the behaviour of a parametric array in a random medium // J. Sound and Vibr. 1981. V. 74. P. 395–410.
12. *Новиков Б. К., Руденко О. В., Тимошенко В. И.* Нелинейная гидроакустика. Л.: Судостроение, 1981.
13. *Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Случайные поля. М.: Наука, 1978.
14. *Наугольных К. А., Островский Л. А., Сутин А. М.* Параметрические излучатели звука // Нелинейная акустика. Горький: ИПФ АН СССР, 1980. С. 9–30.

Институт прикладной физики
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
01.03.89

V. Yu. Zaitsev, M. A. Raevskii

PARAMETRIC RADIATION OF SOUND IN A MEDIUM WITH RANDOM INHOMOGENEITIES

The influence of random inhomogeneities upon the parametric radiation forming is theoretically investigated. First and second moments of the difference frequency field are analysed in the limits of the parabolic approximation. It is shown that the structure of virtual nonlinear sources can be described efficiently if the size of inhomogeneities is small in comparison with the diameter of the pump beam and the Fresnel one for the difference frequency wave. In the case of the large-scale inhomogeneities in comparison with the cross-section of pump beam the disturbance of the phase structure of nonlinear sources is negligible even for strong inhomogeneities.