АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 36 1990 Вып. 2

УДК 534.833

© 1990 г.

Б. А. Канаев, С. А. Рыбак

О ВОЛНАХ В ТОНКОМ КРИВОЛИНЕЙНОМ ТРУБОПРОВОДЕ С ПОТОКОМ ЖИДКОСТИ

Получены уравнения колебаний в плоскости кривизны тонкого трубопровода, несущего поток идеальной сжимаемой жидкости. Методом возмущений решено дисперсионное уравнение задачи, оценено влияние кривизны и потока жидкости на характеристики волнового движения в системе «трубопровод – жидкость».

В работах [1–4] получены уравнения колебаний изогнутых стержней, исследованы особенности волновых движений в характерных областях частот, сопоставлены точные и приближенные решения. В предположении нерастяжимости осевой линии в [5] получены уравнения колебаний криволинейного тонкого трубопровода с потоком жидкости. В [6] на основе уравнений, полученных при условии нерастяжимости оси трубы и пренебрежения волновым движением в жидкости исследована зависимость собственных частот конечной криволинейной трубы от скорости потока и давления в жидкости.

В предлагаемой работе способом, изложенным в [7], выводятся уравнения движения трубы с жидкостью, свободные от ограничений, содержащихся в [5, 6]; методом возмущений решается дисперсионное уравнение, оценивается влияние кривизны трубы и скорости потока на волновые числа волн, распространяющихся в системе «труба – жидкость».

Рассмотрим трубу, ось которой имеет в плоскости постоянную кривизну $1/R$. Радиус трубы r мал по сравнению с радиусом кривизны R, что позволяет рассматривать трубу как стержень и использовать гипотезу плоских сечений при выводе уравнений движения. По трубе течет с постоянной скоростью V идеальная жидкость.

Введем подвижную систему координат, связанную с осью трубы. В каждой точке оси трубы координатная ось ξ' направлена по касательной τ', ось η' – по внутренней нормали n'; начало координат определяется величиной s, равной расстоянию вдоль оси от некоторого сечения трубы, принятого за начало отсчета.

Согласно [8], условия равновесия участка криволинейной трубы (стержня) при плоском изгибе имеют вид

$$\frac{\partial P_\tau}{\partial s}-\frac{P_n}{R'}-q_\tau{}^m=0,\quad \frac{\partial P_n}{\partial s}+\frac{P_\tau}{R'}+q_n=0,\quad \frac{\partial M}{\partial s}+P_n=0, \tag{1}$$

где M – изгибающий момент, P_n и P_τ – перерезывающая и осевая сила, $q_n=q_n{}^0-q_n{}^m$, $q_\tau{}^m$ и $q_n{}^m$ – массовые силы, $q_n{}^0$ – распределенная сила, действующая на трубу со стороны жидкости, R' – радиус кривизны деформированной трубы.

Исключив из (1) P_n, получим

$$\frac{\partial P_\tau}{\partial s}+\frac{1}{R'}\frac{\partial M}{\partial s}-q_\tau{}^m=0,\quad \frac{\partial^2 M}{\partial s^2}-\frac{P_\tau}{R'}-q_n=0. \tag{2}$$

В линейном приближении момент, осевая и массовые силы выражаются через касательное (u_τ) и нормальное (u_n) смещение трубы соотношениями

$$M=D\left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial s^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial u_\tau}{\partial s}\right),\quad P_\tau=B\left(\frac{\partial u_\tau}{\partial s}-\frac{u_n}{R}\right),\quad q_\tau{}^m=\rho_1\ddot{u}_\tau \text{ и } q_n{}^m=\rho_1 F\ddot{u}_n,$$

где $B=EF$ и $D=EI$ — продольная и изгибная жесткости, E — модуль Юнга материала, $I=\pi r^3 H$ — момент инерции сечения, $F=2\pi rH$ — площадь поперечного сечения, H — толщина стенки, ρ_1 — плотность материала трубы; точки сверху означают двойное дифференцирование по времени t. Кривизна деформированной трубы равна

$$\frac{1}{R'}=\frac{1}{R}\left(1+\frac{\partial u_\tau}{\partial s}+R\frac{\partial^2 u_n}{\partial s^2}\right).$$

Движение жидкости будем рассматривать в системе координат, связанной с начальным (недеформированным) положением трубы. Скорость жидкой частицы в сечении трубы $\mathbf{v}_0$ складывается из скорости поступательного движения вместе с трубой $\mathbf{v}_п$ и скорости относительного движения $\mathbf{v}_{от}$. Будем считать скорость относительного движения одинаковой во всех точках сечения s, что допустимо, если пренебречь вязкостью; при турбулентном движении под $\mathbf{v}_{от}$ следует понимать усредненное по сечению значение скорости. Исключая из рассмотрения очень высокие частоты, можно рассматривать движение жидкости в трубе как одномерное, зависящее лишь от координаты s. Скорость $\mathbf{v}_{от}$ всегда направлена по касательной $\boldsymbol{\tau}'$ к деформированной оси трубы.

Движение жидкости описывается уравнением Эйлера и уравнением непрерывности в векторной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t}+(\mathbf{v}_0\nabla)v_0=-\frac{1}{\rho}\nabla p,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\mathbf{v}_0)=0,\quad \delta p=c_0^2\delta\rho,$$

$$\mathbf{v}_0=\mathbf{v}_п+\mathbf{v}_{от}=\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\mathbf{v}_{от},$$

$\mathbf{u}=u_\tau\boldsymbol{\tau}+u_n\mathbf{n}$ — вектор перемещения трубы, $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{n}$ — единичные вектора касательной и нормали к недеформированной оси трубы, ρ — плотность жидкости, p — гидродинамическое давление, c_0 — эффективная скорость распространения звука в жидкости с учетом податливости стенок трубы [10]. Скорость $\mathbf{v}_{от}$ можно выразить через ее проекцию на недеформированную ось ξ:

$$\mathbf{v}_{от}=v_\xi(\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{\varphi}),$$

где $\boldsymbol{\varphi}=-\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s}\times\boldsymbol{\tau}\right)$ — вектор угла поворота сечения трубы, $v_\xi=V+v$, V — скорость потока жидкости, v — скорость колебательного движения жидкости.

Используя соотношения [9] $\frac{\partial\boldsymbol{\tau}}{\partial s}=\frac{n}{R}$ и $\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial s}=-\frac{\boldsymbol{\tau}}{R}$, выразим производную $\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial s}$ через проекции вектора смещения и их производные

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial s}=\frac{\partial}{\partial s}(u_\tau\boldsymbol{\tau}+u_n\mathbf{n})=\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial s}\right)_n\mathbf{n}+\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial s}\right)_\tau\boldsymbol{\tau}=$$

$$=\left(\frac{\partial u_\tau}{ds}-\frac{u_n}{R}\right)\boldsymbol{\tau}+\left(\frac{\partial u_n}{\partial s}+\frac{u_\tau}{R}\right)\mathbf{n}. \qquad (3)$$

В соответствии с (3) скорость $\mathbf{v}_{от}$ можно записать как

$$\mathbf{v}_{от}=v_\xi\left[\boldsymbol{\tau}+\left(\frac{\partial u_n}{\partial s}+\frac{u_\tau}{R}\right)\mathbf{n}\right].$$

Рассмотрим второй член уравнения Эйлера. Поскольку задача одномерная, то $(\mathbf{v}_0\nabla)\mathbf{v}_0=(\mathbf{v}_0)_\tau\frac{\partial\mathbf{v}_0}{\partial s}$. Аналогично в уравнении непрерывности

$$\operatorname{div}(\rho\mathbf{v}_0)=(\mathbf{v}_0)_\tau\frac{\partial\rho}{\partial s}+\rho\left(\frac{\partial\mathbf{v}_0}{\partial s}\right)_\tau.$$

С учетом приведенных соотношений получим в линейном приближении уравнение Эйлера в виде

$$\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}+V\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t\,\partial s}+\left[\frac{\partial v}{\partial t}+V\frac{\partial v}{\partial s}-\frac{V^2}{R}\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial s}\right)_n\right]\boldsymbol{\tau}+$$
$$+\left[V\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial s}\right)_n+\frac{V^2}{R}+2\frac{Vv}{R}+\frac{V}{R}\frac{\partial u}{\partial t}+V^2\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial s}\right)_n\right]\mathbf{n}=-(1/\rho_0)\nabla p,$$

а в проекции на $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{n}$ соответственно

$$\frac{\partial^2u_\tau}{\partial t^2}+\frac{\partial v}{\partial t}+V\frac{\partial v}{\partial s}+V\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_\tau}{\partial s}+\frac{u_n}{R}\right)-\frac{V^2}{R}\left(\frac{\partial u_n}{\partial s}+\frac{u_\tau}{R}\right)=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial s} \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2u_n}{\partial t^2}+2V\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_n}{\partial s}+\frac{u_\tau}{R}\right)+\frac{V}{R}\frac{\partial u_\tau}{\partial t}+\frac{V^2}{R}+2\frac{Vv}{R}+$$
$$+V^2\left(\frac{\partial^2u_n}{\partial s^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial u_\tau}{\partial s}\right)=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial\eta}, \tag{5}$$

ρ_0 — плотность невозмущенной жидкости.

Аналогично уравнение непрерывности будет

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+V\frac{\partial p}{\partial s}+\rho_0\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_\tau}{\partial s}-\frac{u_n}{R}\right)+\frac{\partial v}{\partial s}-\frac{V}{R}\left(\frac{\partial u_n}{\partial s}+\frac{u_\tau}{R}\right)\right]=0. \tag{6}$$

Воспользуемся уравнением (5) для определения распределенной силы q_n^0, записав его в виде $j_n=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial\eta}$ где j_n — ускорение, которое испытывает жидкость.

Поскольку движение одномерно, j_n не зависит от η. Следовательно, в соответствии с (5) гидродинамическое давление может быть представлено интегралом $p_\eta=-[\rho_0 j_n\eta+p(\xi,t)]$, где $p(\xi,t)$ — давлéние определяемое из уравнения (4).

Сила q_n^0 определяется интегралом от p_η по внутренней поверхности элемента трубы; в результате интегрирования получим

$$q_n^0=-\left(\rho_0F_0j_n+\frac{pF_0}{R}\right),$$

где F_0 — площадь окна трубы.

Подставим q_n^0, q_τ^m, q_n^m, P_τ и M в (2), в результате будем иметь

$$\left.\begin{aligned}&B\left(\frac{\partial^2u_\tau}{\partial s^2}-\frac{1}{R}\frac{\partial u_n}{\partial s}\right)+\frac{D}{R}\left(\frac{\partial^3u_n}{\partial s^3}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2u_\tau}{\partial s^2}\right)=m_1\ddot{u}_1,\\&D\left(\frac{\partial^4u_n}{\partial s^4}+\frac{1}{R}\frac{\partial^3u_\tau}{\partial s^3}\right)-\frac{B}{R}\left(\frac{\partial u_\tau}{\partial s}-\frac{u_n}{R}\right)+m_0j_n+\\&+\frac{p_1}{R}+m\ddot{u}_n=0,\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где $m_0=\rho_0F_0$, $m_1=\rho_1F$, $m=m_0+m_1$, $p_1=pF_0$. В дальнейшем опускаем индекс 1 у p_1, понимая под p силу pF_0. Уравнения (4), (6), (7) образуют систему уравнений движения трубы с жидкостью.

Для идеальной жидкости движение трубы вдоль ξ не влияет на дви-

жение жидкости, поэтому в выражении скорости v_n следует отбросить член $\frac{\partial u_\tau}{\partial t}\tau$. Пренебрегая, кроме этого, в выражениях (4)—(6) членами, имеющими величину порядка $V/c_0 \ll 1$, получим

$$\dot{v} - V\left(\frac{\dot{u}_n}{R} + \frac{V}{R^2}u_\tau\right) = -\frac{1}{m_0}\frac{\partial p}{\partial s}, \tag{8}$$

$$\ddot{u}_n + 2V\frac{\partial \dot{u}_n}{\partial s} + V\frac{\dot{u}_\tau}{R} + \frac{V^2}{R} + \frac{2Vv}{R} = -\frac{1}{m_0}\frac{\partial p}{\partial \eta}, \tag{9}$$

$$\dot{m} + m_0\left[\frac{\partial v}{\partial s} - \left(\frac{\dot{u}_n}{R} + \frac{V}{R^2}u_\tau\right)\right] = 0. \tag{10}$$

Исключив v из (8) и (10), получим волновое уравнение для жидкости, текущей в колеблющейся криволинейной трубе:

$$\ddot{p} - c_0^2\frac{\partial^2 p}{\partial s^2} = m_0 c_0^2\left(\frac{\ddot{u}_n}{R} + \frac{V}{R^2}\dot{u}_\tau\right). \tag{11}$$

Если в уравнениях (7) пренебречь членами порядка $(kH)^2 \ll 1$, то совместно с (8) и (11) они составят следующую систему уравнений движения трубы и жидкости:

$$B\left(\frac{\partial^2 u_\tau}{\partial s^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial u_n}{\partial s}\right) = m_1\ddot{u}_\tau,$$

$$D\frac{\partial^4 u_n}{\partial s^4} - \frac{B}{R}\left(\frac{\partial u_\tau}{\partial s} - \frac{u_n}{R}\right) + m\ddot{u}_n + m_0\left[2V\frac{\partial \dot{u}_n}{\partial s} + V\frac{\dot{u}_\tau}{R} + \frac{V^2}{R} + 2\frac{Vv}{R}\right] + \frac{p}{R} = 0,$$

$$\ddot{p} = c_0^2\frac{\partial^2 p}{\partial s^2} = m_0 c_0^2\left(\frac{\ddot{u}_n}{R} + \frac{V}{R^2}\dot{u}_\tau\right), \tag{12}$$

$$\dot{v} - V\left(\frac{\dot{u}_n}{R} + \frac{V}{R^2}u_\tau\right) = -\frac{1}{m_0}\frac{\partial p}{\partial s}.$$

Ищем решение (12) в виде бегущих волн:

$$\left.\begin{aligned} p &= \bar{p} \\ v &= \bar{v} \\ u_\tau &= \bar{u}_\tau \end{aligned}\right| \times e^{i(ks-\omega t)}, \quad u_n = \bar{u}_n e^{i(ks-\omega t)} + u_{n0}. \tag{13}$$

Здесь $u_{n0} = -m_0 V^2 R/B$ — постоянное нормальное смещение трубы, обусловленное течением жидкости с постоянной скоростью V.

Подставив (13) в (12), получим систему уравнений для амплитуд $\bar{u}_n$, $\bar{u}_\tau$, $\bar{v}$ и $\bar{p}$:

$$\frac{1}{R}ik\bar{u}_n + (k^2B - \omega^2 m_1)\bar{u}_\tau = 0,$$

$$\left(Dk^4 - \omega^2 m + 2\omega k m_0 V + \frac{B}{R^2}\right)\bar{u}_n - \left(\frac{1}{R}ikB + \frac{1}{R}i\omega m_0 V\right)\bar{u}_\tau +$$

$$+ \frac{2}{R}m_0 V\bar{v} + \frac{\bar{p}}{R} = 0, \tag{14}$$

$$\frac{1}{R}\omega^2 m_0 c_0^2\bar{u}_n + \frac{1}{R^2}i\omega m_0 c_0^2 V\bar{u}_\tau + (k^2c_0^2 - \omega^2)\bar{p} = 0,$$

$$\frac{1}{R}i\omega m_0 V\bar{u}_n - \frac{1}{R^2}m_0 V^2\bar{u}_\tau - i\omega m_0\bar{v} + ik\bar{p} = 0.$$

Для получения аналитического решения исключим из рассмотрения область малых частот, ограничившись частотами, для которых $(kR)^2 \gg$

$\gg V/c_0$. Тогда, приравнивая нулю детерминант системы (14), получим дисперсионное уравнение

$$(Dk^4-\omega^2 m+2\omega k m_0 V)(k_п^2-k^2)(k_0^2-k^2)+$$

$$+\frac{1}{R^2}[(\omega^2 m_1+\omega k m_0 V)(k_0^2-k^2)+(\omega^2 m_0+2\omega k m_0 V)(k_п^2-k^2)]=0, \quad (15)$$

где $k_п=\omega B^{1/2} m^{1/2}$ и $k_0=\omega/c_0$ – волновые числа продольных волн в трубе и волн в жидкости.

В общем случае, уравнение (15) может быть решено на ЭВМ. При принятых выше допущениях относительно малости величин H/r, r/R и V/c_0 оценку корней дисперсионного уравнения можно получить методом малых возмущений.

Предположим, что $R\to\infty$, $\varepsilon_1=V/c_и\ll 1$, и ищем решение в виде $k'=k_0'+\varepsilon_1 k_1'+\ldots$, где k_0 – решение уравнения при $\varepsilon_1=0$, $c_и=\omega^{1/2}B^{1/4}m^{-1/4}$ – скорость изгибных волн в прямой трубе с погонной массой $m=m_0+m_1$. Учитывая лишь члены первого порядка по ε_1, получим

$$k_{1,2}'=\pm k_0, \quad k_{3,4}'=\pm k_п, \quad k_{5,6}=k_и\left(\pm 1+\frac{m_0 V}{2mc_и}\right),$$

$$k_{7,8}=k_и\left(\pm i+\frac{m_0 V}{2mc_и}\right), \quad k_и=\omega/c_и.$$

Полагая далее $\varepsilon_2=F/R^2\ll 1$, ищем решение уравнения (12) в виде $k=k_0''+\varepsilon_2 k_1''+\ldots$, где k_0'' – найденные выше при $R\to\infty$ значения k_{1-8}. Вновь ограничившись величинами первого порядка по ε_1 и ε_2, находим

$$k_{1,2}=\pm k_0\left[1-\frac{m_0/m}{2(k_0R)^2(1-k_0^4/k_и^4)}\right],$$

$$k_{3,4}=\pm k_п\left[1-\frac{m_1/m}{2(k_пR)^2(1-k_п^4/k_и^4)}\right],$$

$$k_{5,6}=k_и\left\{\pm\left[1+\frac{1}{4(k_иR)^2}\left(\frac{m_1/m}{1-k_п^2/k_и^2}+\frac{m_0/m}{1-k_п^2/k_и^2}\right)\right]-\frac{m_0V}{2mc_и}\right\},$$

$$k_{7,8}=k_и\left\{\pm i\left[1-\frac{1}{4(k_иR^2)}\left(\frac{m_1/m}{1+k_п^2/k_и^2}+\frac{m_0/m}{1+k_п^2/k_и^2}\right)\right]+\frac{m_0V}{2mc_и}\right\}. \quad (16)$$

Полученный результат показывает, что в системе «труба – жидкость» существуют четыре типа волн: звуковые в жидкости ($k_{1,2}$), продольные ($k_{3,4}$), изгибные бегущие ($k_{5,6}$) и изгибные неоднородные ($k_{7,8}$) волны в трубе. Кривизна трубы и поток жидкости в ней приводят к взаимной связи этих движений, результатом которой являются добавочные члены к «невозмущенным» волновым числам k_0, $k_п$ и $k_и$. Соотношения (16) позволяют оценить величину и характер влияния кривизны трубы и скорости потока жидкости на волновые процессы в системе.

Если материал трубы обладает диссипативными свойствами, которые могут быть учтены введением комплексного модуля Юнга материала трубы $E_1=E_1(1-i\eta)$, где η – коэффициент потерь, то решением (12) вместо полученных действительных k_j, $j=1-6$, будут комплексные $k_j^*=k_j+iq_j$, где

$$q_{1,2}=\pm\eta k_0\frac{(m_0/m)\alpha_0^2}{2(k_0R)^2(1-\alpha_0^2)^2}, \quad \alpha_0=k_0^2/k_и^2,$$

$$q_{3,4}=\pm\frac{\eta k_п}{2}\left[1+\frac{m_1/m}{2(k_пR)^2}\frac{1-3\alpha_п^2}{(1-\alpha_п^2)^2}\right], \quad \alpha_п=k_п^2/k_и^2,$$

$$q_{5,6}=\frac{\eta k_и}{4}\left\{\pm\left[1-\frac{1}{4(k_иR)^2}\left(\frac{m_1}{m}\frac{1-3\alpha_п}{(1-\alpha_п)^2}+\frac{m_0}{m}\frac{1+\alpha_0}{(1-\alpha_0)^2}\right]+\frac{m_0V}{mc_и}\right\}.$$

Кривизна трубы приводит к увеличению пространственного затухания продольных волн в трубе и появлению затухания волн в жидкости. Затухание изгибных волн с ростом кривизны уменьшается, с ростом же скорости потока — уменьшается или увеличивается в зависимости от направления распространения волны относительно направления потока жидкости.

Полезно привести закон сохранения энергии в дифференциальной форме для рассматриваемой системы. Умножим первое уравнение (12) на $\dot{u}_\tau$, второе — на $\dot{u}_n$, уравнение (8) — на v, уравнение (10) — на p. Сложим левые и правые части получившихся уравнений и после некоторых преобразований придем к следующему соотношению:

$$\frac{\partial}{\partial t}[(E_{\text{кт}}+E_{\text{пт}})+(E_{\text{кп}}+E_{\text{пп}})+(E_{\text{к0}}+E_{\text{п0}})]+\frac{\partial}{\partial s}q_\tau+\frac{q_n}{R}=0,$$

где плотность кинетической ($E_{\text{к}}$) и потенциальной ($E_{\text{п}}$) энергии продольного (τ) и поперечного (n) движения трубы и движения жидкости (0), а также потоки энергии q_τ и q_n определяются выражениями

$$E_{\text{кт}}=\frac{1}{2}m_1\dot{u}_\tau^2,\quad E_{\text{пт}}=\frac{1}{2}\left(B+\frac{D}{R^2}\right)u_\tau^{s^2},\quad E_{\text{кп}}=\frac{1}{2}m_1\dot{u}_n^2,$$

$$E_{\text{пп}}=\frac{1}{2}\left(Du_n^{ss^2}+\frac{B}{R^2}u_n^2\right),\quad E_{\text{к0}}=\frac{1}{2}m_0v^2,\quad E_{\text{п0}}=\frac{1}{2m_0c_0^2}p^2,$$

$$q_\tau=q_\tau'+q_n'+q_0+q_{\text{к}},\quad q_\tau'=-\left(B+\frac{D}{R^2}\right)\dot{u}_\tau u_\tau^s,$$

$$q_n'=D(u_n^{sss}\dot{u}_n-u_n^{ss}\dot{u}_n^s),\quad q_0=pv,\quad q_{\text{к}}=-m_0V\dot{u}_n^2,$$

$$q_n=m_0V\left(\dot{u}_n\dot{u}_\tau+\dot{u}_nv-\frac{V}{R}u_\tau v\right)-\frac{p}{R}Vu_\tau;$$

верхний индекс s означает дифференцирование по s, например $u^{ss}=\partial^2u/\partial s^2$.

Приведем также выражения для средних за период $T=2\pi/\omega$ плотности и потоков энергии распространяющихся мод системы:

$$E_{\text{кт}}=\frac{1}{4}\omega^2m_1|\bar{u}_\tau|^2,\quad E_{\text{пт}}=\frac{1}{4}k^2\left(B+\frac{D}{R^2}\right)|\bar{u}_\tau|^2,$$

$$E_{\text{кп}}=\frac{1}{4}\omega^2m_1|\bar{u}_n|^2,\quad E_{\text{пп}}=\frac{1}{4}\left(k^4D+\frac{B}{R^2}\right)|\bar{u}_n|^2,$$

$$E_{\text{к0}}=\frac{1}{4}m_0|\bar{v}|^2,\quad E_{\text{п0}}=\frac{1}{4}\left(k^4D+\frac{B}{R^2}\right)|\bar{u}_n|^2,$$

$$q_\tau'=\frac{\omega k}{2}\left(B+\frac{D}{R^2}\right)|\bar{u}_\tau|^2,\quad q_n'=\omega k^3D|\bar{u}_n|^2,$$

$$q_0=\frac{|\bar{p}|\,|\bar{v}|}{2}\cos\alpha,\quad q_{\text{к}}=-\frac{\omega^2m_0}{2}|\bar{u}_n|^2,$$

где α — угол сдвига фаз между комплексными амплитудами v и p. Среднее значение потока $q_n=0$. Полученные выражения позволяют оценить вклад компонент движения в общую энергию и ее поток для различных мод системы; необходимые для этого отношения амплитуд рассчитываются на ЭВМ в соответствии с уравнениями движения (12).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Исакович М. А., Комарова Л. Н.* Продольно-изгибные волны в тонком стержне // Акуст. журн. 1971. Т. 13. № 4. С. 579–583.
2. *Смирнов В. А., Тартаковский Б. Д.* К вопросу о распространении колебаний в изогнутых стержнях // Докл. VI Всесоюз. акуст. конф., М.: АКИН. 1968. МП6.

3. *Heines D. W., Chang N., Huang C. H.* Wave propagation in elastic rings and helical coils of small pitch // J. Acoust. Soc. Amer. 1974. V. 55. № 6. P. 1138–1143.
4. *Львовская Г. Ф.* Особенности поведения упругих волн в стержнях постоянной кривизны // Акуст. журн. 1987. Т. 23. № 2. С. 287–292.
5. *Доценко П. Д.* Об уравнениях малых колебаний криволинейного трубопровода // Механика тв. тела. 1974. № 5. С. 104–112.
6. *Chen Sh. Sh.* Vibration and stability of a uniformly curved tube containing fluid // J. Acoust. Soc. Amer. 1971. V. 51. № 1 (Pt 2). P. 224–232.
7. *Колесников К. С., Самойлов Е. А., Рыбак С. А.* Динамика топливных систем ЖРД. М.: Машиностроение, 1975. С. 170.
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория упругости. М.: Наука, 1965. С. 203.
9. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. II. М.– Л.: ГИТТЛ, 1951. С. 627.
10. *Жуковский Н. Е.* О гидравлическом ударе в водопроводных трубах. Полн. собр. соч. Т. VII. М.: ОНТИ НКТП. 1937. С. 410.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
02.02.89

B. A. Kanaev, S. A. Rybak

ON WAVES IN A THIN CURVED TUBE WITH A FLUID FLOW

Equations of motion in a plane of curvature of a thin curved tube with a flow of an ideal compressible fluid are obtained. The dispersion equation is solved by means of the perturbation method. The obtained solution permits to estimate the influence of the tube curvature, flow velocity and losses in the material of the tube on wave motion characteristics in the system «tube-fluid».