АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 36 1990 Вып. 2

УДК 517.947 : 534.414
© 1990 г.

Ю. А. Лавров

О СОБСТВЕННЫХ ВОЛНАХ ВОЛНОВОДА С УПРУГИМИ СТЕНКАМИ

Исследуется спектр нормальных волн плоского волновода с упругими стенками. Волновод заполнен идеальной сжимаемой жидкостью. Упругие стенки совершают изгибные колебания. Поглощение в жидкости и в пластинах отсутствует. Показано, что дисперсионное уравнение рассматриваемого волновода может иметь комплексные корни, а также чисто мнимые корни кратности 2 и 3. Приведены численные результаты и приближенные формулы для кратных корней. Выведено выражение для поля точечного источника в волноводе в виде разложения по нормальным волнам. Показано, что волны, соответствующие чисто мнимым и комплексным корням дисперсионного уравнения, не переносят энергии через поперечное сечение волновода.

Собственные волны плоского волновода с идеально жесткими или мягкими стенками изучены, к примеру, в [1]. Если же стенками волновода являются плоские упругие пластины, что имеет место в [2 и 3], процесс построения собственных волн имеет ряд особенностей, рассматриваемых в данной работе.

Пусть плоский волновод $-\infty<x<+\infty$, $-H<y<H$, заполнен идеальной сжимаемой жидкостью. Поле акустических давлений $P(x, y)$ в жидкости в физически реальных задачах возбуждается источником. Будем считать, что этот источник точечный, тогда давление в волноводе удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2 P(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P(x,y)}{\partial y^2}+k^2P(x,y)=\delta(x,y-b), \tag{1}$$

где k — волновое число, $k=\omega/c$, ω — круговая частота, c — скорость звука в жидкости, b — поперечная координата источника, $-H<b<H$. Зависимость процессов от времени t подразумевается всюду опущенным множителем $\exp(-i\omega t)$.

Боковыми стенками волновода служат упругие пластины. Уравнения Кирхгофа для пластин, совершающих изгибные колебания с учетом контакта с жидкостью, имеют вид

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}-\varkappa^4\right)\frac{\partial P(x,\pm H)}{\partial y}\mp\nu P(x,\pm H)=0. \tag{2}$$

Здесь $\varkappa$ — волновое число изгибных волн, $\varkappa^4=\varkappa_0^4k^2$, $\varkappa_0^4=\rho c^2h/D$, ρ — плотность материала пластин, h — их толщина, D — цилиндрическая жесткость, $\nu=\nu_0k^2$, $\nu_0=\rho_0c^2/D$, ρ_0 — плотность жидкости, в равенстве (2) и в последующих берутся одновременно или верхние, или нижние знаки.

Внешней ($y=\pm H\pm 0$) стороной каждая пластина граничит с вакуумом.

Решая задачу методом, изложенным в [4], имеем

$$P(x,y)=\frac{i}{2}\sum_{\operatorname{Im}\lambda>0}\operatorname{Res}\left(\frac{\operatorname{sh}(\gamma b)g^+(\lambda,k,H)}{\gamma g^-(\lambda,k,H)}f^-(\lambda,k,y)e^{i\lambda|x|}\right)-$$
$$-\frac{i}{2}\sum_{\operatorname{Im}\lambda>0}\operatorname{Res}\left(\frac{\operatorname{ch}(\gamma b)g^-(\lambda,k,H)}{g^+(\lambda,k,H)}f^+(\lambda,k,y)e^{i\lambda|x|}\right). \tag{3}$$

Выражение в правой части (3) представляет собой разложение поля давлений по собственным волнам $P_n^{\pm}(x, y)=f^{\pm}(\lambda_n^{\pm}, k, y)e^{i\lambda_n^{\pm}|x|}$, $n=-2, -1, 0, 1, 2, \ldots$, $f^{+}(\lambda, k, y)=\mathrm{ch}(\gamma y)$, $f^{-}(\lambda, k, y)=\mathrm{sh}(\gamma y)/\gamma$, $\gamma^2=\lambda^2-k^2$, $\lambda_n^{\pm}$ — корень уравнения

$$g^{\pm}(\lambda, k, H)=(\lambda^4-\varkappa^4)\frac{\partial f^{\pm}(\lambda, k, H)}{\partial y}-\nu f^{\pm}(\lambda, k, H)=0,$$
$$(\gamma_n^{\pm})^2=(\lambda_n^{\pm})^2-k^2. \tag{4}$$

В равенстве (3) предполагается, что требованию $\mathrm{Im}\,\lambda>0$ удовлетворяют все λ, которые при $\mathrm{Im}\,k>0$ оказались бы в верхней полуплоскости комплексной переменной λ, самое же число k будем считать вещественным и положительным. Рассмотрим расположение на комплексной плоскости λ корней дисперсионного уравнения $g^{+}(\lambda, k, H)=0$, соответствующего случаю симметричных по координате y собственных волн. При малых k для вычисления корней могут быть использованы приближенные формулы $\gamma_n^{+}\approx\exp(-i\pi n/3)\sqrt[6]{\nu/H}$, $n=-2, -1, 0$, $\gamma_n^{+}\approx i\pi n$, $n=1, 2, 3, \ldots$.

Числа λ_0^{+}, γ_0^{+} — вещественны и положительны при любых положительных k. Корни $\lambda_1^{+}, \lambda_2^{+}, \ldots$, являясь чисто мнимыми при малых k, последовательно смещаются на положительное направление вещественной оси по достижении волновым числом k значений k_{m0}^{+}, $m=1, 2, \ldots$ — корней уравнения

$$\varkappa_0^4 k\sin(kH)-\nu_0\cos(kH)=0. \tag{5}$$

Число λ_{-1} по мере роста k (при фиксированном H) может образовывать пары кратности 2 (рис. 1) с прочими корнями дисперсионного уравнения. Происходит это при $k=k_{m2}^{+}$, $\lambda_{-1}=\lambda_{m2}^{+}$, $m=0, 1, 2, \ldots$ — номер посадки на мнимую ось (номер $m=0$ выделен для удобства) и $k=k_{m1}^{+}$, $\lambda_{-1}=\lambda_{m1}^{+}$, $m=1, 2, \ldots$ — номер схода с мнимой оси. Здесь k_{ml}^{+}, λ_{ml}^{+}, $l=1, 2$ — решения системы уравнений

$$\begin{cases} f^{+}(\lambda, k, H)=0, \\ \dfrac{\partial f^{+}(\lambda, k, H)}{\partial\lambda}=0. \end{cases}$$

Для преодоления вычислительных трудностей, связанных с поиском кратных корней, полезно иметь начальное приближение. В случае малых H пригодны приближенные формулы

$$k_{ml}^{+}\approx k_m=-\varkappa_0^2/2+\sqrt{\varkappa_0^4/4+p_m^2}, \tag{6}$$

$$\lambda_{ml}^{+}\approx i\left(p_m+(-1)^l\left(\frac{\nu_m}{H(5p_m^4-6p_m^2k_m^2+k_m^4-\varkappa_m^4}\right)^{1/2}\right), \tag{7}$$

$$p_m=\pi m/H,\quad \varkappa_m^4=\varkappa_0^4k_m^2,\quad \nu_m=\nu_0k_m^2,\qquad m=1, 2, \ldots,\quad l=1, 2,$$

а в случае H больших — приближенные формулы

$$\lambda_{02}^{+}\approx\alpha_1^{+}/H,\quad k_{02}^{+}\approx\beta_1^{+}/\sqrt{\nu_0H^5},$$
$$\lambda_{11}^{+}\approx\alpha_2^{+}/H,\quad k_{11}^{+}\approx\beta_2^{+}/\sqrt{\nu_0H^5},$$

α_1^{+}, α_2^{+} — положительные корни уравнения $5\sin 2\alpha+2\alpha=0$,

$$\beta_m^{+}=\sqrt{-(\alpha_m^{+})^5\mathrm{tg}\,\alpha_m^{+}},\quad m=1, 2.$$

При больших H ($H>\varkappa_0^4/\nu_0$) m-я посадка λ_{-1} на мнимую ось ($m=1, 2, \ldots$) и образование кратных пар возможно лишь при $H\leqslant H_{m3}^{+}$ (рис. 2), если тройка чисел λ_{m3}^{+}, k_{m3}^{+}, H_{m3}^{+} — решение системы уравнений

$$\begin{cases} g^{+}(\lambda, k, H)=0, \\ \dfrac{\partial g^{+}(\lambda, k, H)}{\partial\lambda}=0, \\ \dfrac{\partial^2 g^{+}(\lambda, k, H)}{\partial\lambda^2}=0, \end{cases}$$

определяющей точку, соответствующую корню λ_{-1} кратности 3.

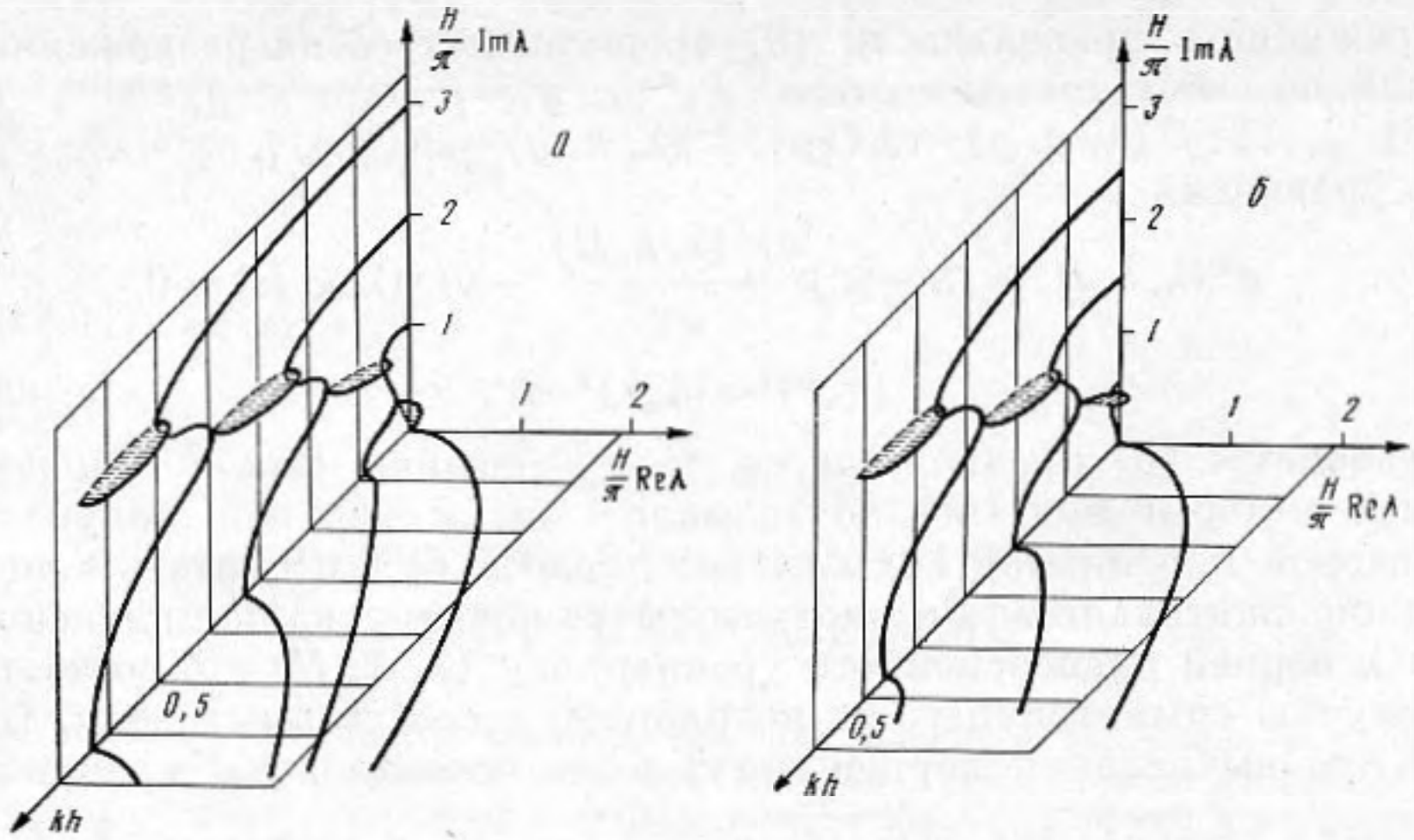

Рис. 1

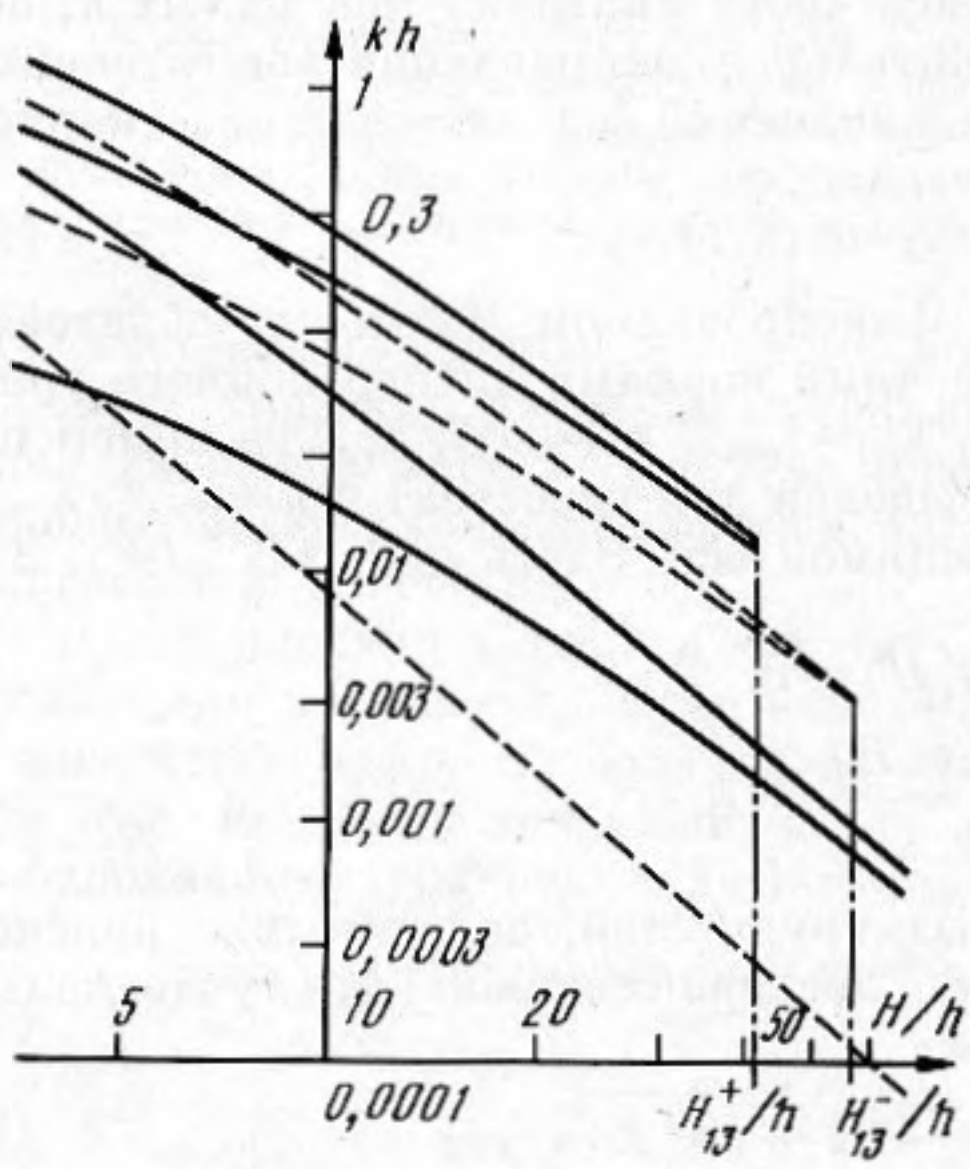

Рис. 2

Рис. 1. Линии перемещения корней дисперсионного уравнения с изменением волнового числа для случая *а* – симметричных, *б* – антисимметричных по координате *y* процессов. Материал пластин – сталь, жидкость – вода, $H/h=10$

Рис. 2. Зависимости волнового числа, соответствующего кратному корню дисперсионного уравнения, от ширины волновода для симметричных (сплошные линии) и антисимметричных (пунктирные линии) по координате *y* процессов. Материал пластин – сталь, жидкость – вода

При малых ρ_0/ρ для первых нескольких решений этой системы можно выписать приближенные формулы

$$\lambda_{m3}^{+} \approx i\frac{\rho_0\xi_m^{+}}{\rho h}, \qquad k_{m3}^{+} \approx \frac{\rho_0^2\eta_m^{+}}{\rho^2h^2\varkappa_0^2},$$

$$H_{m3}^{+} \approx \frac{\rho h\vartheta_m^{+}}{\rho_0\xi_m^{+}},$$

где

$$\xi_m^{+} = -\frac{\vartheta_m^{+}(\vartheta_m^{+}\cos\vartheta_m^{+}+2\sin\vartheta_m^{+})}{2\sin^3\vartheta_m^{+}}, \tag{8}$$

$$\eta_m^{+} = \left(-10(\xi_m^{+})^5\frac{\sin^3\vartheta_m^{+}}{(\vartheta_m^{+})^2\cos\vartheta_m^{+}}\right)^{1/2}, \tag{9}$$

ϑ_m^{+} – *m*-й положительный корень уравнения

$$\cos\vartheta - \frac{5\vartheta\sin\vartheta}{2\vartheta^2+5\sin^2\vartheta} = 0. \tag{10}$$

Перейдем теперь к корням дисперсионного уравнения $g^-(\lambda, k, H)=0$, используемым для построения антисимметричный по координате y волн.

При малых k могут быть использованы приближенные формулы $\gamma_{-2}^- \approx \approx i\pi/2H$, $\gamma_n^- \approx \exp(-i\pi n/2)\sqrt[4]{\varkappa^4+H\nu}$, $n=-1, 0$. $\gamma_n^- \approx i\pi(n+0{,}5)/H$, $n=1, 2, \ldots$, λ_0^- вещественно при любых $k>0$, γ_0^- вещественно только при $k< <\sqrt{\varkappa_0^4+H\nu_0}$. Так же, как и в случае симметричных по y волн, мнимые (при малых k) корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ по мере возрастания k могут смещаться на вещественную ось, а корень λ_{-1} образовывать кратные пары.

Для первой кратной пары (слияние чисто мнимых $\lambda_{-1}, \lambda_{-2}$) применимы при больших H приближенные формулы $\lambda_{11}^- \approx \alpha_1^-/H$, $k_{11}^- \approx \beta_1^-/\sqrt{\nu_0 H^5}$, α_1^- — положительный корень уравнения $5\sin 2\alpha - 2\alpha = 0$, $\beta_1^- = =\sqrt{(\alpha_1^-)^5 \operatorname{ctg} \alpha_1^-}$.

Для нахождения чисел k_{ml}^-, $m=1, 2, 3, \ldots$, $l=0, 1, 2, 3$ в соотношениях (5), (8)—(10) следует всюду заменить функции $\cos\varphi$ на $-\sin\varphi$, $\sin\varphi$ на $\cos\varphi$. В приближенных равенствах (6), (7) следует считать $p_m = =\pi(m-0{,}5)/H$.

В случае, если $\lambda_{-1}^\pm$ — корень кратности 2, ему наряду с волной $P_{-1}^\pm(x, y) = f^\pm(\lambda_{-1}^\pm, k, y)e^{i\lambda_{-1}^\pm|x|}$ соответствует присоединенная волна

$$P_{-1,1}^\pm(x, y) = \frac{\partial}{\partial\lambda_{-1}^\pm}(f^\pm(\lambda_{-1}^\pm, k, y)\, e^{i\lambda_{-1}^\pm|x|}).$$

В случае же кратности 3 и вторая присоединенная волна

$$P_{-1,2}^\pm(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial(\lambda_{-1}^\pm)^2}(f^\pm(\lambda_{-1}^\pm, k, y)\, e^{i\lambda_{-1}^\pm|x|}).$$

Энергия, переносимая полем давлений $P(x, y)$ через поперечное сечение волновода, вычисляется по формуле $W = \operatorname{Im}(P(x, y), P(x, y))$, где

$$(P(x, y), Q(x, y)) = \frac{1}{2\rho_0\omega}\int_{-H}^{H}\frac{\partial P(x, y)}{\partial x}\overline{Q(x, y)}\,dy +$$

$$+\frac{D}{2\rho_0^2\omega^3}\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{\partial P(x, (-1)^j H)}{\partial y}\overline{\frac{\partial^4 Q(x, (-1)^j H)}{\partial x^3\,\partial y}} -\right.$$

$$\left.-\frac{\partial^2 P(x, (-1)^j H)}{\partial x\,\partial y}\overline{\frac{\partial^3 Q(x, (-1)^j H)}{\partial x^2\,\partial y}}\right).$$

Если поле давлений в волноводе представляет собой пакет собственных волн

$$P(x, y) = \sum_{n=-2}^{\infty}(q_n^+ P_n^+(x, y) + q_n^- P_n^-(x, y))$$

($q_n^\pm$ — коэффициенты разложения по нормальным волнам), то распространяемая энергия

$$W = \operatorname{Im}\sum_{\operatorname{Im}\lambda_n^+=0} q_n^+\overline{q_n^+}(P_n^+(x, y), P_n^+(x, y)) +$$

$$+\operatorname{Im}\sum_{\operatorname{Im}\lambda_n^-=0} q_n^-\overline{q_n^-}(P_n^-(x, y), P_n^-(x, y)) \qquad (11)$$

есть величина, от x не зависящая.

При построении равенства (11) учтено, что

$$\operatorname{Re}(P_n^\pm(x, y), P_n^\pm(x, y)) = 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im}\lambda_n^\pm = 0,$$
$$\operatorname{Im}(P_n^\pm(x, y), P_n^\pm(x, y)) = 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im}\lambda_n^\pm > 0,$$

Константа	s			Константа	s		
	1	2	3		1	2	3
α_s^+	2,05231	2,45315	–	α_s^-	1,29787	–	–
β_s^+	8,34736	8,54942	–	β_s^-	1,01529	–	–
ξ_s^+	0,981473	1,84393	2,66343	ξ_s^-	0,501675	1,42178	2.25649
η_s^+	0,797297	3,15564	6,81924	η_s^-	0,169993	1,80620	4,82908
ϑ_s^+	5,13625	8,14245	11,21102	ϑ_s^-	3,68051	6,62793	9,67178

$$(P_n^{\pm}(x, y), P_m^{\pm}(x, y)) = (P_m^{\pm}(x, y), P_n^{\pm}(x, y)) \text{ при } m \neq n,$$
$$\operatorname{Re} q_n^{\pm} = 0, \text{ если } \operatorname{Re} \lambda_n^{\pm} = 0, \tag{12}$$

$$\operatorname{Im} q_m^{\pm} = 0, \text{ если } \operatorname{Im} \lambda_n^{\pm} = 0. \tag{13}$$

Кроме того, в случае, если $\lambda_{-1}^{\pm}$, $\lambda_{-2}^{\pm}$ – комплексные (не вещественные и не чисто мнимые),

$$(P_{-2}^{\pm}(x, y), P_{-2}^{\pm}(x, y)) = (P_{-1}^{\pm}(x, y), P_{-1}^{\pm}(x, y)),$$
$$\lambda_{-1}^{\pm} = -\overline{\lambda_{-2}^{\pm}}, \quad q_{-1}^{\pm} = -\overline{q_{-2}^{\pm}}. \tag{14}$$

Соотношения (12)–(14), выполненные в разложении (3) для поля точечного источника, сохранят справедливость и для поля, возбужденного любым иным физически реальным источником. Значения некоторых констант, используемых в приближенных формулах, приведены в таблице.

Автор благодарит Д. П. Коузова и В. Д. Лукьянова за полезное обсуждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Исакович М. А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973.
2. *Коузов Д. П.* Об акустическом поле точечного источника в прямоугольном объеме, ограниченном тонкими упругими стенками // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 2. С. 305–313.
3. *Лавров Ю. А., Лукьянов В. Д.* О матрице рассеяния в волноводе с упругими стенками // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 871–875.
4. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 2. М.: Наука, 1981.

Ленинградский институт
советской торговли
им. Ф. Энгельса

Поступила в редакцию
02.02.89

Yu. A. Lavrov

ON EIGENWAVES OF A WAVEGUIDE WITH ELASTIC WALLS

An eigenwaves spectrum of a plane waveguide with elastic walls is investigated. The waveguide is filled with the ideal compressible fluid. The elastic walls accomplish bend vibration. An absorption in the fluid and walls is absent.

A dispersion equation of the waveguide is shown to have complex roots and also imaginary ones of two or three multiplicity. Approximate formulas and numerical results for such roots are cited. An expression for a pressure field of a harmonic point source in a form of normal waves sum is derived. The waves which correspond to the imaginary and complex roots of the dispersion equation are shown to not transfer an energy through a cross-section of the waveguide.