АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 36 1990 Вып. 2

УДК 534.2 : 532

© 1990 г.

В. А. Мурга

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКА В ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ ЖЕСТКОЙ ПЛОСКОСТИ

Теоретически показано, что распространение звука вблизи жесткой плоскости в вязкой жидкости (в потенциальной области) с учетом прилипания обладает существенными особенностями по сравнению с аналогичным процессом в идеальной жидкости.

Решена задача о звуковом поле излучающей бесконечной нити, расположенной перпендикулярно к жесткой плоскости в вязкой сжимаемой жидкости, при выполнении условия прилипания на плоскости; решение существенно отличается от аналогичного решения для идеальной жидкости (т. е. от обычной цилиндрической волны). Показано также, что принципиально возможен случай, когда вся звуковая энергия, излучаемая конечной нитью, распространяется вдоль плоскости, как в волноводе конечной ширины. Наконец, рассмотрено распространение звука в плоском широком канале; показано, что вместо «классической» нулевой моды должны существовать две независимые нулевые моды, существенно отличающиеся как друг от друга, так и от классической моды.

Пусть вблизи бесконечной жесткой плоскости находится точечный источник, излучающий сферическую волну с единичной амплитудой (для потенциала)

$$\varphi_0 = e^{ikr'}/r', \tag{1}$$

где r' — расстояние от источника, $k=k_0+i\gamma$, $k_0=\omega/c$, ω — угловая частота колебаний, c — скорость звука, γ — коэффициент поглощения звука в свободном пространстве; временно́й множитель $\exp(-i\omega t)$ всюду опущен. Сферическую волну (1) можно представить в виде разложения на цилиндрические волны [1]

$$\varphi_0 = \frac{i}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\mu(z-l)} H_0^{(1)}(\varkappa R)\,\varkappa\, d\varkappa/\mu, \tag{2}$$

где z и R — цилиндрические координаты ($z\geqslant 0$), ось z перпендикулярна жесткой плоскости, совпадающей с геометрической плоскостью $z=0$, источника звука находится на оси z на расстоянии l от плоскости, $\mu=(k^2-\varkappa^2)^{1/2}$, точка $\varkappa=0$ при интегрировании должна обходиться сверху (в плоскости комплексного переменного $\varkappa$), мнимая часть μ должна быть положительна. Знаки плюс и минус в показателе экспоненты соответственно относятся к случаям $z>l$ и $z<l$.

Отраженное от плоскости поле в потенциальной области (т. е. вне акустического пограничного слоя толщиной $\sim(\nu/\omega)^{1/2}$, примыкающего к плоскости) описывается выражением

$$\varphi = \frac{i}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu(z+l)} H_0^{(1)}(\varkappa R)\, V\varkappa\, d\varkappa/\mu, \tag{3}$$

где V — коэффициент отражения (для плоских волн).

Пусть теперь вместо точечного источника имеется линейная антенна или нить, расположенная вдоль оси z и начинающаяся на плоскости.

Пусть отдельный бесконечно малый элемент антенны dl излучает сферическую волну с амплитудой

$$A=\exp(i\delta l)\,dl, \tag{4}$$

где δ — произвольное комплексное число с неотрицательной мнимой частью. Выражение для результирующего поля можно получить, если домножить (2) и (3) на амплитуду (4), проинтегрировать получившиеся выражения по l от нуля до бесконечности и результаты сложить. Коэффициент отражения для случая вязкой жидкости и при выполнении условия прилипания на плоскости определяется выражением [2]

$$V=\frac{\mu-\varkappa^2\sqrt{\nu/i\omega}}{\mu+\varkappa^2\sqrt{\nu/i\omega}} \tag{5}$$

(вещественная часть у квадратного корня положительна, $k_0(\nu/\omega)^{1/2}\ll 1$). Выражение для результирующего поля потенциала излучающей нити записывается, таким образом, в виде

$$\Phi=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(e^{iz\delta}-\frac{\delta+\varkappa^2\sqrt{\nu/i\omega}}{\mu+\varkappa^2\sqrt{\nu/i\omega}}e^{iz\mu}\right)\frac{H_0^{(1)}(\varkappa R)\varkappa}{\delta^2-\mu^2}\,d\varkappa. \tag{6}$$

Рассмотрим случай однородно излучающей полубесконечной нити ($\delta=0$); тогда вместо (6) имеем

$$\Phi=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\varkappa^2\sqrt{\nu/i\omega}}{\mu+\varkappa^2\sqrt{\nu/i\omega}}e^{iz\mu}-1\right)H_0^{(1)}(\varkappa R)\varkappa\,d\varkappa/\mu^2. \tag{7}$$

Второе слагаемое в (7) описывает однородную цилиндрическую волну

$$\Phi_2=\left(\frac{2\pi i}{k_0R}\right)^{1/2}e^{ikR} \tag{8}$$

(здесь и везде ниже считаем, что выполняется условие $k_0R\gg 1$).

Для вычисления первого слагаемого в (7) перейдем к сферическим координатам r, θ_0 (точка наблюдения) и проведем замену переменных так, что $\varkappa=k\sin\theta$, $\mu=k\cos\theta$ (см. рис. 1). Тогда первое слагаемое переписывается в виде

$$\Phi_1=\frac{1}{i}\left(\frac{2k_0\nu}{\pi R\omega}\right)^{1/2}\int\frac{(\sin\theta)^{5/2}e^{ikr\cos(\theta-\theta_0)}}{\cos\theta(\cos\theta+\sqrt{\nu/i\omega}\,k\sin^2\theta)}\,d\theta. \tag{9}$$

При этом интегрирование проводится в плоскости комплексного переменного θ по «перевальному» пути Γ (см. рис. 2) в окрестности точки $\theta=\theta_0$.

Подынтегральная функция в (9) имеет полюсы (ближайшие к контуру Γ) в точках $\theta=\pm\pi/2$ и $\theta=\pm(\pi/2+k_0(\nu/i\omega)^{1/2}$: на рис. 2 указаны два полюса (P_1 и P_2).

При значениях θ_0, не слишком близких к $\pi/2$ ($\cos\theta_0\gg k_0(\nu/\omega)^{1/2}$), интеграл (9) легко вычисляется (это обычный метод перевала). Результат представляет собой малую поправку к цилиндрической волне (8) с относительной величиной, равной $\sim(k_0\nu/\omega R)^{1/2}$.

Если же θ_0 близко к $\pi/2$ ($\cos\theta_0\approx\alpha\ll 1$; α обозначено на рис. 2), то при вычислении интеграла (9) уже нельзя непосредственно использовать метод перевала вследствие близости полюсов P_1, P_2 к контуру интегрирования. Например, при $\theta_2=\pi/2$ оба полюса лежат на самом контуре, причем полюс P_1 совпадает с седловой точкой, а P_2 расположен близко от нее. Используя условие $\alpha\ll 1$, а также тот факт, что интегрировать можно по малому участку контура в окрестности седловой точки, упрощаем подынтегральную функцию в (9) (кроме экспоненты) с помощью приближенных соотношений $\sin\theta\approx 1$, $\cos\theta\approx\cos\theta_0-\xi$, где $\xi=\theta-\theta_0$; в показа-

Рис. 1. Система координат *1* — α, *2* — r, *3* — $\mathbf{k}$, *4* — θ, *5* — θ_0, *6* — R, *7* — z

Рис. 2. Контур интегрирования: *1* — плоскость θ, *2* — полюс P_1 в точке $\theta=\pi/2$, *3* — P_2, *4* — $\pi/4$, *5* — θ_0, *6* — $\pi/4$, *7* — контур Г

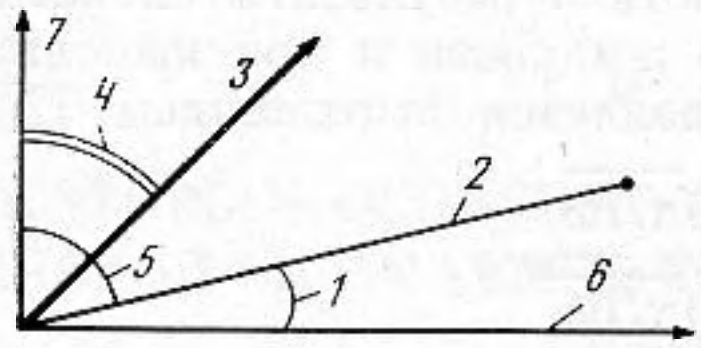

Рис. 1

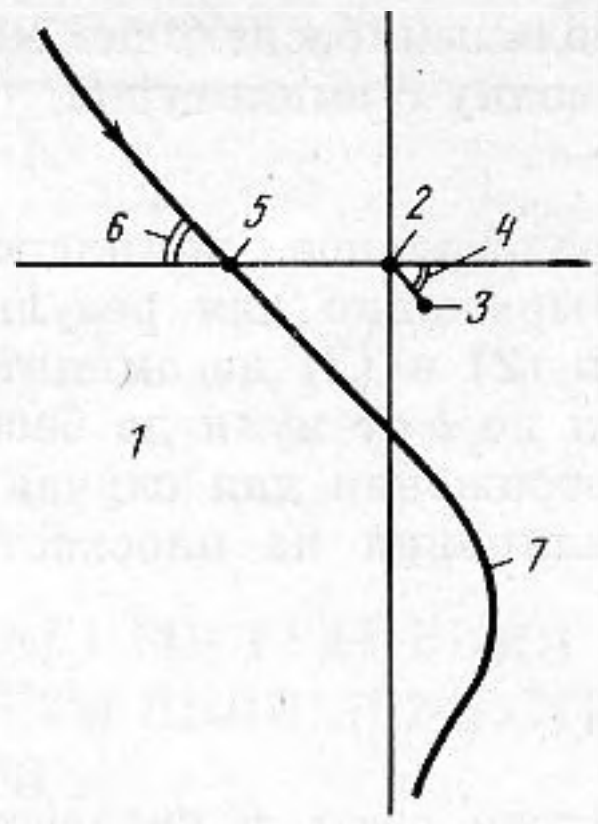

Рис. 2

теле экспоненты полагаем $\cos\xi=1-\xi^2/2$. После преобразования интеграл (9) сводится к

$$\Phi_1=2\left(\frac{2}{i\pi k_0R}\right)^{1/2} e^{ikr}\int\limits_0^\infty \frac{(\rho^2+\psi\xi_0\sqrt{i})\,e^{-a^2\rho^2}}{(\rho^2-i\psi^2)\,(\rho^2-\xi_0^2)}\,d\rho, \tag{10}$$

где $a^2=k_0^3\nu R/2\omega$, $\xi_0=1+\sqrt{i}\psi$, $\psi=\alpha(k_0^2\nu/\omega)^{-1/2}$. Вычисляя этот интеграл и объединяя результат с полученным ранее результатом (8), получаем окончательно выражение для потенциала результирующего поля от однородно излучающей полубесконечной нити в потенциальной области:

$$\Phi=2\left(\frac{2}{k_0R}\right)^{1/2} e^{ikR}\left[\int\limits_0^{a\psi} e^{i\rho^2}\,d\rho+\left(\frac{\sqrt{\pi i}}{2}-\frac{\xi_0}{\sqrt{i}}\int\limits_0^{a} e^{\rho^2\xi_0^2}\,d\rho\right)e^{-a^2+i\mu_0 z}\right],$$

$$\mu_0=k_0^2(\nu/2\omega)^{1/2}(i-1). \tag{11}$$

В случае идеальной жидкости $a=0$, $\psi=\infty$, $\mu_0=0$; интегралы в (11) взаимно уничтожаются, и поле представляет собой однородную цилиндрическую волну, как и должно быть.

В общем случае, второе слагаемое в (11) описывает неоднородную цилиндрическую волну с амплитудой, уменьшающейся с ростом z и с характерной шириной, равной $\sim|\mu_0^{-1}|\sim k_0^{-2}(\omega/\nu)^{1/2}$; эта волна соответствует полюсу P_2 на рис. 2. Однородная волна, соответствующая полюсу P_1, отсутствует в (11), как «нефизическая», поскольку она не может удовлетворить граничному условию для поперечной компоненты скорости колеблющихся частиц жидкости при $z=0$ (точнее, на внешней границе акустического слоя, где, как известно, поперечная скорость не равна нулю).

За пределами области шириной $\sim|\mu_0^{-1}|$, примыкающей к плоскости, поле описывается однородной цилиндрической волной (с точностью до малых величин). Действительно, если $|\mu_0 z|\gg1$, то в (11) остается только первый интеграл. Поскольку $a^2\psi\sim|\mu_0 z|\gg1$, то верхний предел интеграла $a\psi$ также велик по сравнению с единицей (за исключением случая $a\gg1$, о котором будет сказано ниже), поэтому значение этого интеграла стремится к $(\pi i)^{1/2}/2$ и (11) переходит в выражение для однородной цилиндрической волны (8).

В приведенной оценке предполагается, что значение $\psi=\alpha(k_0^2\nu/\omega)^{-1/2}$ может быть бóльшим по сравнению с единицей одновременно с принятым условием $\alpha\ll1$. Для обычных газов и жидкостей это предположение будет не выполняться лишь при весьма высоких частотах. Например, для воздуха при нормальных условиях $\psi\sim\alpha\cdot10^5/\omega^{1/2}$ (в системе единиц СИ); поэтому, если $\alpha=0{,}1$ (все еще малая величина), значение ψ заметно больше единицы при частотах $\omega<10^8$ Гц.

Внутри области $|\mu_0 z| \lesssim 1$, которую можно назвать областью влияния акустического слоя, отличие поля (11) от однородной цилиндрической волны зависит от расстояния R при прочих неизменных величинах. Если $a^2 = k_0^3 \nu R/2\omega \ll 1$, то это отличие пропорционально a, т. е. невелико. Если $a \sim 1$, то это отличие становится существенным.

На весьма больших расстояниях от источника звука ($a \gg 1$) вторым слагаемым в (11) можно пренебречь. При дополнительном условии $|\mu_0 z| \lesssim 1$ первый интеграл в (11) равен $a\psi$, второй интеграл вместе с множителем $\exp(-a^2)$ равен $(2a)^{-1}$; таким образом, (11) переписывается в виде

$$\Phi = -\frac{2i}{\mu_0 R}(i\mu_0 z + e^{i\mu_0 z})\, e^{ikR}. \tag{12}$$

Полученное решение убывает с ростом R, как сферическая волна. При увеличении z оно становится неверным, когда величина $a\psi$ перестает быть малой по сравнению с единицей, т. е. далеко за пределами области влияния акустического слоя ($|\mu_0 z| \sim a^2\psi \gg 1$). Из общего решения (11) видно, как при дальнейшем увеличении z результирующее поле переходит в однородную цилиндрическую волну.

Неоднородная цилиндрическая волна (второе слагаемое в (11)) входит в результирующее поле как компонента. Ее довольно трудно выделить на фоне остального поля. Однако возможен случай (по крайней мере теоретически), когда все результирующее поле является такой волной. В самом деле, если в выражении (4), определяющем закон излучения антенны, положить $\delta = \mu_0 = -k_0^2(\nu/i\omega)^{1/2}$, то в общем выражении для потенциала результирующего поля (6) второе слагаемое обращается в нуль в том же приближении, в котором получено выражение (10), поскольку $\varkappa^2(\nu/i\omega)^{1/2} \approx \approx k_0^2(\nu/i\omega)^{1/2}$. Тогда вместо (6) получаем выражение

$$\Phi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_0^{(1)}(\varkappa R)\varkappa}{\mu_0^2 - \mu^2} e^{iz\mu_0}\, d\varkappa = \left(\frac{2\pi i}{k_0 R}\right)^{1/2} e^{ikR - a^2 + i\mu_0 z},$$

которое, очевидно, описывает упомянутую неоднородную цилиндрическую волну. Таким образом, принципиально возможен случай, когда вся энергия, излучаемая источником конечной эффективной длины, распространяется вдоль жесткой плоскости, не удаляясь от нее, как в волноводе.

Рассмотрим теперь распространение звука в плоском канале с жесткими параллельными стенками. Ось z перпендикулярна стенкам, h — полуширина канала, геометрические плоскости $z = \pm h$ совпадают со стенками, ось x параллельна стенкам. Предположим, что вдоль оси x может распространяться звуковая волна с потенциалом φ, равным

$$\varphi = A\cos(\mu z)\, e^{i\varkappa x}, \tag{13}$$

где μ и $\varkappa$ — неизвестные величины, причем $\mu^2 + \varkappa^2 = k^2$. Учет вязкости жидкости и условия прилипания на стенках канала приводит к приближенному дисперсионному уравнению [3]

$$\mu\, \mathrm{tg}(\mu h) = -(1+i)\varkappa^2(\nu/2\omega)^{1/2} \tag{14}$$

(здесь, как и выше, учтено, что $k_0(\nu/\omega)^{1/2} \ll 1$).

Общее решение уравнения (14) в явном виде получить нельзя, поэтому ограничимся исследованием «нулевой моды», причем само это понятие требует уточнения, коль скоро речь идет о вязкой жидкости.

Очевидно, решение уравнения (14) должно иметь вид $\mu h = \varepsilon_n + n\pi$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; ε_n — некоторое комплексное число, зависящее от n. Назовем нулевой модой случай, когда $n = 0$ (по аналогии с классической акустикой); для нулевой моды уравнение (14) переходит в

$$\varepsilon_0\, \mathrm{tg}\, \varepsilon_0 = -(1+i)k_0^2 h(\nu/2\omega)^{1/2} \tag{15}$$

в предположении, что $|\varepsilon_0| \ll k_0 h$.

Ранее анализ уравнений (14), (15) или аналогичных уравнений для круглой трубы проводился в предположении, что канал не очень широк ($k_0^2h(\nu/\omega)^{1/2}\ll 1$) [3, 4]. При этом оказывается, что волна (13) слабо отличается от соответствующего решения в идеальной жидкости (для одних и тех же значений n). Иной результат получается для широкого канала, когда $k_0^2h(\nu/\omega)^{1/2}\gg 1$. В этом случае уравнение для нулевой моды (15) имеет два решения. Первое решение:

$$\mu_0=\varepsilon_0/h=\pm k_0^2(\nu/2\omega)^{1/2}(1-i). \tag{16}$$

Если вместо z использовать переменную $z'=h-z$ (z' отсчитывается от стенки канала), то формула (13) примет вид

$$\varphi=A'\exp\left[i(\mu_0z'+\varkappa_0x)\right],\quad A'=Ae^{-i\mu_0h}/2 \tag{17}$$

(мнимая часть у μ_0 (16) положительна). Полученный результат совершенно аналогичен обнаруженной выше цилиндрической неоднородной волне.

Второе решение уравнения (15) для широкого канала имеет вид (как легко убедиться проверкой)

$$\mu_0=\pm\frac{\pi}{2h}\left(1+\frac{1-i}{k_0^2h(2\nu/\omega)^{1/2}}\right), \tag{18}$$

а соответствующее выражение для потенциала (13)

$$\varphi=A\cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right)e^{ikx}, \tag{19}$$

где приближенно положили $\mu_0=\pi/2h$, $\varkappa_0=k$. Очевидно, волна (19) так же, как и волна (17), может быть возбуждена.

Можно показать, что дисперсионное уравнение для нулевой моды (15) не имеет других решений, кроме полученных (16), (18). Таким образом, в вязкой жидкости в широком канале существует не одна нулевая мода, а две, существенно отличающиеся по структуре как друг от друга, так и от классической нулевой моды; при этом они могут существовать независимо одна от другой. При возбуждении поля, например, поршнем одновременно будут иметь место обе эти моды (и конечно, моды более высоких порядков). Если предположить, что амплитуды волн (17) и (19) приблизительно равны друг другу при возбуждении (при $x=0$), то сумма этих волн будет более или менее близка к обычной нулевой моде (в зависимости от ширины канала). По мере распространения вдоль канала волна (17) затухает несколько быстрее, чем волна (19); на очень больших расстояниях от источника звука, когда $\gamma\varkappa\gg 1$ (коэффициент поглощения γ по порядку величины равен $\sim k_0^3\nu/\omega$), остается только волна (19). Моды высших порядков затухают, разумеется, еще раньше, поэтому на этих расстояниях поле, возбужденное произвольным образом, должно иметь вид волны (19). Этот результат аналогичен полученному выше результату (12) в том смысле, что оба они принципиально отличаются от соответствующих «классических» решений на одних и тех же расстояниях от источника звука ($a^2\sim\gamma x\gg 1$). В этом же смысле оба упомянутых результата аналогичны известному «эффекту Константинова», согласно которому коэффициент отражения (5) существенно отличается от «классического» решения (т. е. от единицы) в области малых углов скольжения α волны, падающей на бесконечную жесткую плоскость ($\alpha\lesssim k_0(\nu/\omega)^{1/2}$). В самом деле, применять результат Константинова к случаю конечной пластины можно лишь на таких расстояниях x вдоль пластины от ее края, для которых выполняется условие $k_0x\alpha^2\gg 1$, в противном случае отраженную волну нельзя считать плоской (как это принято в [2]) вследствие дифракционного искажения. Поэтому написанное условие принимает вид $k_0^3\nu/\omega\gg 1$, что эквивалентно условию $\gamma x\gg 1$. Роль источника звука здесь играют край пластины ($x=0$), а также сама падающая волна вблизи края (волна па-

дает из области отрицательных значений x). Таким образом, эффект Константинова имеет место на таких же расстояниях x от источника звука, на которых справедливы формулы (12) и (19).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
2. *Константинов Б. П.* О прохождении звуковых волн при отражении от твердой границы // ЖТФ. 1939. Т. 9. № 3. С. 226–238.
3. *Стретт Дж. В.* (Лорд Рэлей). Теория звука. Т. 2. М.: ГИТТЛ, 1955. 476 с.
4. *Константинов Б. П.* Гидродинамическое звукообразование и распространение звука в ограниченной среде. Л.: Наука, 1974. 257 с.

Ленинградский кораблестроительный институт

Поступила в редакцию 06.05.89

V. A. Murga

ON SOME FEATURES OF A SOUND PROPAGATION IN A VISCOUS COMPRESSIBLE FLUID NEAR A RIGID PLANE

Some specific features of a sound propagation in a viscous fluid near rigid plane are theoretically investigated in comparison with such processes in an ideal liquid. The solution is obtained taking into account the adherence of the fluid.