АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 36 1990 Вып. 2

УДК 534.26.51
© 1990 г.

А. В. Осипов

РАВНОМЕРНАЯ АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ АКУСТИЧЕСКОГО ПОЛЯ ВБЛИЗИ ГРАНИ ИМПЕДАНСНОГО КЛИНА

Приводится равномерная асимптотическая формула, описывающая акустическое поле при дифракции плоской волны на клине с заданными импедансами граней, которая остается справедливой не только на границах тени для прямой и отраженных волн, но и вблизи граней клина.

Известно, что источник акустического поля, расположенный над безграничной плоскостью с поверхностным импедансом, отличным от ∞, не создает поля излучения в направлении скольжения вдоль поверхности, так как звуковое давление в этом направлении при достаточно больших расстояниях R между источником и точкой наблюдения убывает быстрее, чем $1/R$ [1]. В случае плоскости ограниченных размеров функция углового распределения отлична от нуля для направлений скольжения, что является существенным, если речь идет, например, о построении антенн бегущей волны или об учете влияния несущих конструкций на направленные свойства системы излучателей. Поэтому исследование влияния конечной протяженности границы на излучаемое вдоль нее поле представляет несомненный теоретический и практический интерес.

Простейшей моделью, в рамках которой учитывается пространственная ограниченность поверхности, может служить хорошо известная в теории дифракции модель клина с импедансными гранями [2]. Построению удобных приближенных представлений точного решения задачи при больших волновых расстояниях между точкой наблюдения и ребром клина посвящены работы нескольких авторов [3—6]. Наиболее общий результат был сформулирован А. Ф. Филипповым, который получил все члены равномерного асимптотического разложения, применимого вблизи границ тени для прямой и отраженных волн. Однако при описании свойств волнового поля около импедансной поверхности необходимо учитывать специфическое явление оттока энергии в примыкающую среду, которое может существенно сказываться на структуре поля в приповерхностной зоне [1]. С математической точки зрения это проявляется во влиянии на результат асимптотического вычисления интеграла плоских волн полюсов в подынтегральном выражении, связанных с возможным существованием в структуре поверхностных волн. Для модели импедансного клина данное обстоятельство было рассмотрено в [6], но только для случая, когда точка наблюдения располагается непосредственно на границе. В настоящей работе получено равномерное асимптотическое представление решения задачи дифракции плоской волны, справедливое при произвольной высоте расположения точки наблюдения над гранью клина.

Рассмотрим систему координат, в которой отрицательная часть оси OX совмещена с одной из сторон клина. Тогда звуковое давление в точке с цилиндрическими координатами r, φ при дифракции на клине плоской волны, падающей под углом φ_0 к оси OX, описывается следующим интегралом [2]:

$$u(r,\varphi,\varphi_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} e^{-ikr\cos\alpha}S(\alpha+\varphi-\pi+\Phi,\ \varphi_0-\pi+\Phi)\,d\alpha, \qquad (1)$$

где

$$S(\alpha,\beta)=\frac{\Psi(\alpha)}{\Psi(\beta)}\frac{\mu\cos(\mu\beta)}{\sin(\mu\alpha)-\sin(\mu\beta)},\quad \mu=\pi/2\Phi,\ k=2\pi/\lambda,$$

λ — длина волны, Φ — половина углового размера внешней к клину области. Функция $\Psi(\alpha)$ представляется в виде произведения специальных функций Малюжинца $\psi_\Phi(\alpha)$ [2]: $\Psi(\alpha)=\prod_{j=1}^{4}\psi_\Phi(\delta_j)$; здесь $\delta_1=\alpha+\Phi+\pi/2-\theta_\pm$, $\delta_2=\alpha+\Phi-\pi/2+\theta_+$, $\delta_3=\alpha-\Phi-\pi/2+\theta_-$, $\delta_4=\alpha-\Phi+\pi/2-\theta_-$, а параметры $\theta_\pm$, связанные с поверхностными импедансами сторон клина $Z_\pm$ и волновым сопротивлением окружающей среды Z_0 соотношением $\sin\theta_\pm=Z_0/Z_\pm$, есть углы Брюстера граней, причем $\mathrm{Re}\,\theta_\pm\in(0,\pi/2]$. Контур интегрирования γ является контуром Зоммерфельда.

Вычислим интеграл (1) асимптотически с помощью метода наискорейшего спуска, считая kr большим параметром. Для определенности предположим, что точка наблюдения располагается вблизи верхней грани клина $\varphi=\pi$. Тогда при деформации пути интегрирования γ на перевальные контуры $\gamma_{\pm\pi}$, проходящие через седловые точки $\alpha=\pm\pi$, могут выделиться вычеты в полюсах подынтегрального выражения $\alpha_0=\varphi_0-\varphi$, $\alpha_1=2\pi-\varphi_0-\varphi$, $\alpha_+=2\pi-\varphi+\theta_\pm$. Полюсы $\alpha_{0,1}$ относятся к тригонометрическому множителю в выражении для функции $S(\alpha,\beta)$, а полюс α_+ принадлежит функции $\Psi(\alpha+\varphi-\pi+\Phi)$. Соответственно выражение для звукового давления принимает следующий вид:

$$u=u_g+u_++u_d, \tag{2}$$

где

$$u_g=\Theta(\pi-|\varphi-\varphi_0|)e^{-ikr\cos(\varphi-\varphi_0)}+\Theta(\pi-|2\pi-\varphi-\varphi_0|)R_+(\varphi_0)e^{-ikr\cos(\varphi+\varphi_0)},$$

$$u_+=\Theta(-q_2)\frac{\tilde\Psi(\Phi+\pi+\theta_+)}{\Psi(\Phi-\pi+\varphi_0)}\frac{2\sin(\mu\pi/2)\sin(\mu(\varphi_0-\pi))}{\cos(\mu(\varphi_0-\pi))-\cos(\mu(\pi+\theta_+))}e^{-ikr\cos(\varphi-\theta_+)},$$

$$u_d=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\pi+\gamma_{-\pi}}e^{-ikr\cos\alpha}S(\alpha+\varphi-\pi+\Phi,\varphi_0-\pi+\Phi)\,d\alpha,$$

$$R_+(\varphi_0)=\frac{\sin\varphi_0-\sin\theta_+}{\sin\varphi_0+\sin\theta_+},\qquad \Theta(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases},$$

$$\tilde\Psi(\alpha)=\psi_\Phi(\delta_1-2\pi)\prod_{j=2}^{4}\psi_\Phi(\delta_j),\quad q_2=\mathrm{sign}\left(\mathrm{Im}\left(e^{i\pi/4}\cos\left(\frac{\varphi-\theta_+}{2}\right)\right)\right).$$

Слагаемое u_g представляет собой решение задачи в приближении геометрической акустики; член u_+ имеет смысл поверхностной волны, распространяющейся от ребра вдоль верхней грани клина; дифракционная поправка описывается функцией u_d [2].

При написании асимптотических формул для интегралов по контурам спуска необходимо учитывать возможную близость полюсов α_1, α_+ к седловой точке $\alpha=\pi$, а полюса α_0 к седловой точке $\alpha=-\pi$. После замены переменной интегрирования: $\cos\alpha=-1-iz^2$, которая переводит контуры $\gamma_{\pm\pi}$ в вещественную ось, дифракционный член u_d запишем следующим образом:

$$u_d=\frac{\mu C_\Phi(\varphi_0)}{\Psi(\varphi_0-\pi+\Phi)}(I_0+I_1+I_2)e^{ikr}, \tag{3}$$

где $C_\Phi(\varphi_0)=\cos(\mu(\varphi_0-\pi+\Phi))$, а интегралы I_j имеют вид

$$I_j=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-krz^2}\frac{f_j(z)}{z-\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}x_j}dz,$$

$$x_0=\cos\left(\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\right),\quad x_1=\cos\left(\frac{\varphi+\varphi_0}{2}\right),\quad x_2=\cos\left(\frac{\varphi-\theta_+}{2}\right),$$

причем функции $f_j(z)$ аналитические в окрестности точки $z=0$.

Методы построения равномерных асимптотических разложений интегралов типа I_j хорошо известны [7]. Приведем два первых члена асимптотики при $kr\gg1$ в форме метода Паули — Отта — Клеммова:

$$I_j\approx i\pi q_j f_j(0)\,w(s_j)+\sqrt{\frac{\pi}{kr}}\left(1+i\sqrt{\pi}\,s_j w(s_j)\right)\left(f_j'(0)+\frac{x_j e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}}f_j''(0)\right).$$

Здесь

$$q_j=\operatorname{sign}\left[\operatorname{Im}(e^{i\pi/4}x_j)\right],\quad s_j=\sqrt{2krq_j}\,x_j e^{i\pi/4}.$$

Специальная функция $w(s)$ — интеграл вероятностей комплексного аргумента [8] — имеет интегральные представления

$$w(s)=\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{s-t}\,dt,\quad \operatorname{Im}s>0,$$

$$w(s)=e^{-s^2}\left(1+\frac{2i}{\sqrt{\pi}}\int_0^s e^{t^2}\,dt\right)$$

и является родственной интегралу Френеля, но в отличие от него не содержит быстросциллирующего множителя при $|s|\gg1$ $w(s)\sim$ $\sim\frac{i}{\pi s}\sum_{n=0}^{\infty}\Gamma(n+1/2)\,s^{-2n}$, что дает определенные преимущества при численных расчетах. В случае малых по абсолютной величине аргументов функция $w(s)$ описывается формулой: $w(s)=1+2is/\sqrt{\pi}+O(s^2)$.

Вычисляя значения функций $f_j(z)$ и их производных при $z=0$, окончательно получаем

$$I_0=\frac{x_0\Psi(\varphi-2\pi+\Phi)}{S_\Phi(\varphi-\pi)-S_\Phi(\varphi_0)}\left[q_0 w(s_0)+e^{-i3\pi/4}\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\left(1+i\sqrt{\pi}\,s_0 w(s_0)\right)x_0 L_0(\varphi,\varphi_0)\right],$$

$$I_j=\frac{A_j\Psi(\varphi+\Phi)}{S_\Phi(\varphi+\pi)-S_\Phi(\varphi_0)}\left[q_j w(s_j)+e^{-i3\pi/4}\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\left(1+i\sqrt{\pi}\,s_j w(s_j)\right)x_1 L_1(\varphi,\varphi_0)\right],\tag{4}$$

$$j=1,2,\ A_1=\frac{x_1x_2}{x_3}\frac{x_3-x_1}{x_1-x_2},\ A_2=\frac{x_1x_2}{x_3}\frac{x_2-x_3}{x_1-x_2},\ x_3=\cos\left(\frac{\varphi+\theta_+}{2}\right),$$

$$S_\Phi(\varphi_0)=\sin\left(\mu(\varphi_0-\pi+\Phi)\right),\quad L_0(\varphi,\varphi_0)=F_2(\varphi-\pi,\varphi_0)-\frac{1}{2x_0^2}+\frac{1}{4},$$

$$L_1(\varphi,\varphi_0)=F_2(\varphi+\pi,\varphi_0)-\frac{1}{2x_1^2}+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{x_3}-\frac{1}{x_2}\right)\left(F_1(\varphi+\pi,\varphi_0)+\frac{1}{2x_3}\right),$$

$$F_1(\xi,\varphi_0)=\frac{\Psi'(\xi-\pi+\Phi)}{\Psi(\xi-\pi+\Phi)}-\frac{\mu C_\Phi(\xi)}{S_\Phi(\xi)-S_\Phi(\varphi_0)},$$

$$F_2(\xi,\varphi_0)=\frac{\Psi''(\xi-\pi+\Phi)}{\Psi(\xi-\pi+\Phi)}-\frac{2\mu C_\Phi(\xi)}{S_\Phi(\xi)-S_\Phi(\varphi_0)}\times$$

$$\times\frac{\Psi'(\xi-\pi+\Phi)}{\Psi(\xi-\pi+\Phi)}+\mu^2\frac{2-S_\Phi(\xi)\left(S_\Phi(\xi)+S_\Phi(\varphi_0)\right)}{\left(S_\Phi(\xi)-S_\Phi(\varphi_0)\right)^2}$$

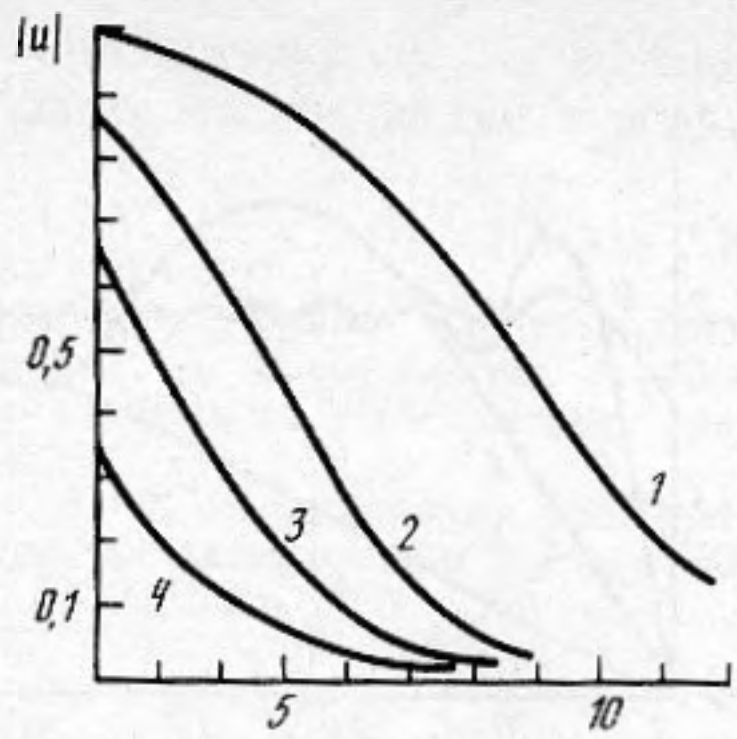

Рис. 1

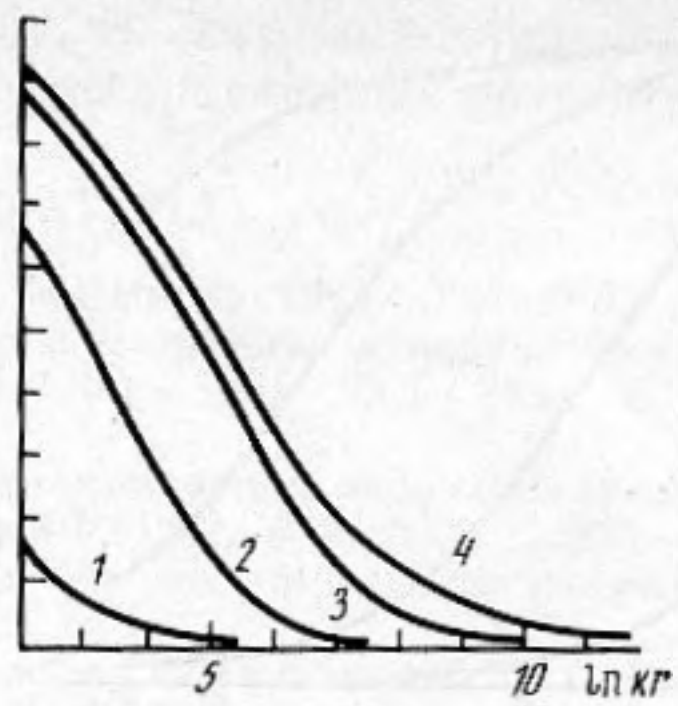

Рис. 2

Рис. 1. Зависимость амплитуды поля на грани клина от расстояния при $\theta_{\pm}=10^{-2}\ (1+i)$ для различных углов падения, φ_0, град: *1* – 0°, *2* – –6, *3* – –18, *4* – –60°

Рис. 2. Зависимость амплитуды поля на грани клина от расстояния при наклонном падении $\varphi_0=-6°$ для различных поверхностных импедансов, $\theta_{\pm}$: *1* – $1+i$, *2* – $10^{-1}\ (1+i)$, *3* – $10^{-2}\ (1+i)$, *4* – $10^{-4}\ (1+i)$

При $|s_j|\gg 1$, $j=0, 1, 2$, старшие члены асимптотического представления (3), (4) переходят в известную формулу для цилиндрической волны, рассеянной ребром клина [2]:

$$u_d \approx \frac{\mu C_\Phi(\varphi_0)}{\Psi(\varphi_0-\pi-\Phi)}\left[\frac{\Psi(\varphi-2\pi+\Phi)}{S_\Phi(\varphi-\pi)-S_\Phi(\varphi_0)}-\frac{\Psi(\varphi+\Phi)}{S_\Phi(\varphi+\pi)-S_\Phi(\varphi_0)}\right]\frac{e^{ikr+i\pi/4}}{\sqrt{2\pi kr}}. \tag{5}$$

Заметим, что для описания поля вблизи грани важно сохранять поправочные члены в выражениях для I_j в (4), так как из (5) следует, что главный член асимптотики краевой волны, пропорциональный $(kr)^{-1/2}$, при $\varphi=\pi$ (а также и при $\varphi=\pi-2\Phi$) обращается в нуль, исключая случай граничного условия Неймана $\theta_+=0\,(\theta_-=0)$. Асимптотическое выражение для поля (формулы (2)–(4)) непрерывно на границах тени для прямой и отраженных волн, а также учитывает отток части энергии поля в среду клина. В отличие от результата, представленного в [6], точка наблюдения может располагаться на произвольном расстоянии от грани клина.

В важном частном случае скользящего падения ($\varphi_0=0$) и при размещении точки наблюдения на поверхности клина ($\varphi=\pi$) формулы (2)–(4) упрощаются:

$$u(r, \pi, 0)=u_+(r, \pi, 0)+u_d(r, \pi, 0),$$

$$u_d(r,\pi,0)\approx e^{ikr}\left[w(s_2)\left(1+2c_1\sin\frac{\theta_+}{2}\right)+e^{i\pi/4}\frac{c_0-c_1}{\sqrt{2\pi kr}}\right], \tag{6}$$

$$c_0=\frac{\Psi'(\Phi-\pi)}{\Psi(\Phi-\pi)}+\frac{\mu}{2}\operatorname{ctg}(\mu\pi), \qquad c_1=-c_0+\frac{\operatorname{tg}(\theta_+/4)}{1-2\sin^2(\theta_+/4)}.$$

Интересно подчеркнуть, что в случае скользящего падения амплитуда краевой волны убывает при $r\to\infty$ как $O((kr)^{-1/2})$, т. е. медленнее, чем при наклонном падении ($\varphi_0\neq 0$), когда $u_d=O((kr)^{-3/2})$. При $\theta_+=0$ (условие Неймана на верхней грани) амплитуда вообще не убывает с расстоянием, в то время как в случае наклонного падения она убывает по закону $(kr)^{-1/2}$. Физически это можно объяснить подпиткой «подошвы» волны за счет поперечной диффузии вдоль фронта из освещенной области, поскольку при $\varphi_0=0$ верхняя грань целиком попадает в область пространства, где диффузия играет существенную роль.

С помощью полученных формул (2)–(4), (6) удается детально исследовать структуру поля вблизи грани импедансного клина в зависимости от расстояния до ребра, угла падения плоской волны, импеданса поверхности, а также высоты точки наблюдения над гранью. Все представ-

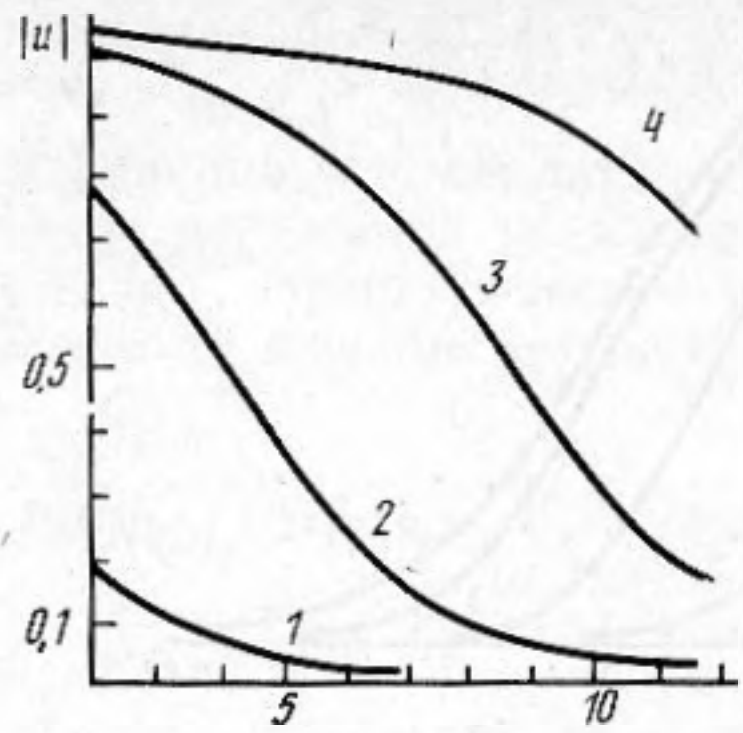

Рис. 3

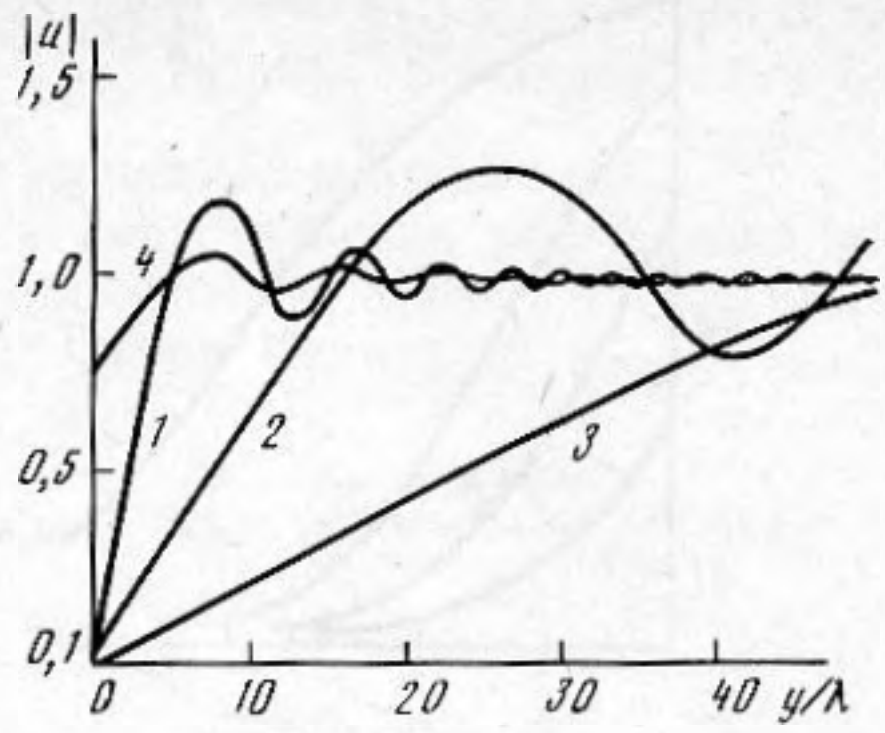

Рис. 4

Рис. 3. Зависимость амплитуды поля на грани клина от расстояния при скользящем падении $\varphi_0=0°$ для различных поверхностных импедансов; $\theta_\pm$: *1* — $1+i$, *2* — $10^{-1}(1+i)$, *3* — $10^{-2}(1+i)$, *4* — $10^{-3}(1+i)$

Рис. 4. Зависимость амплитуды поля при скользящем падении от высоты подъема точки наблюдения над гранью клина: *1* — $|x/\lambda|=10^2$, *2* — $|x/\lambda|=10^3$, *3* — $|x/\lambda|=10^4$ ($\theta_\pm=10^{-1}(1+i)$), *4* — $|x/\lambda|=10^2$ ($\theta_\pm=10^{-2}(1+i)$)

ленные ниже результаты расчетов относятся к случаю прямоугольного клина ($\Phi=3\pi/4$). Кроме того, предполагается, что условие возбуждения поверхностной волны ($q_2<0$) не выполняется.

На рис. 1 изображены кривые, характеризующие зависимость амплитуды поля $|u|$ на грани клина $\varphi=\pi$ от волнового расстояния от ребра kr для различных углов падения плоской волны. При переходе точки наблюдения из области полутени в область тени (кривые *1—4*) амплитуда поля монотонно убывает, равномерно для всех значений kr.

Зависимость амплитуды поля на поверхности клина от параметра kr при различных импедансах граней представлена на рис. 2. Чем ближе свойства верхней грани к идеально жестким ($\theta_+=0$), тем больше уровень поля на поверхности. Наоборот, при увеличении $|\mathrm{Im}\,\theta_+|$ амплитуда монотонно и равномерно уменьшается, обращаясь в пределе идеально мягкой поверхности ($|\mathrm{Im}\,\theta_+|=\infty$) в нуль.

Свойства амплитуды поля на поверхности для случая скользящего падения плоской волны проиллюстрированы графиками на рис. 3. При уменьшении модуля угла Брюстера верхней грани, т. е. при переходе к акустически более жестким поверхностям, амплитуда поля нарастает и одновременно изменяется характер зависимости $|u|$ от расстояния до ребра клина. Убывание амплитуды начинается лишь при выполнении условия $|s_2|>1$. Для диапазона расстояний $1\ll kr\ll 2/|\theta_+|^2$ амплитуда поля близка к единице и слабо зависит от r. В пределе акустически жесткой поверхности $|u|$ асимптотически стремится к единице при $r\to\infty$.

Значительный интерес представляет зависимость модуля полного поля при скользящем падении от высоты точки наблюдения над гранью клина y (рис. 4). При удалении точки наблюдения от грани клина амплитуда поля сначала монотонно увеличивается, а затем начинает осциллировать с уменьшающимся размахом около уровня $|u|=1$. Осцилляции объясняются интерференцией падающего поля и цилиндрической волны, рассеянной ребром клина. Высота y_c, на которой амплитуда поля достигает единичного значения, что соответствует переходу из области полутени в освещенную область, может быть найдена из условия $|s_{0,1}|=1$ (в рассматриваемом случае $\varphi_0=0$, $\varphi=\pi$ границы тени для прямой и отраженной волн совпадают). Если $|x|\gg y$, то для y_c получается простое выражение $y_c=\sqrt{\lambda|x|/\pi}$. Существенным обстоятельством здесь является то, что значение y_c зависит лишь от удаления точки наблюдения от ребра клина и не зависит от импеданса поверхности.

Завершая обсуждение, заметим, что учет влияния поверхностной волны в тех случаях, когда она возбуждается на грани клина, не представляет принципиальных трудностей (см. выражение для u_+ в формуле (2)).

Автор признателен Е. Л. Шендерову за стимулирование интереса к данной области исследований и обсуждение полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
2. *Малюжинец Г. Д.* Возбуждение, отражение и излучение поверхностных волн на клине с заданными импедансами граней // Докл. АН СССР. 1958. Т. 121. № 3. С. 436–439.
3. *Филиппов А. Ф.* Исследование решения нестационарной задачи дифракции плоской волны на импедансном клине // ЖВМиМФ. 1967. Т. 7. № 4. С. 825–835.
4. *James G. L.* Uniform diffraction coefficients for an impedance wedge // Electron. Lett. 1977. V. 13. № 14. P. 403–404.
5. *Pierce A. D., Hadden W. J.* Plane wave diffraction by a wedge with finite impedanco // J. Acoust. Soc. Amer. 1978. V. 63. № 1. P. 17–27.
6. *Tiberio R., Pelosi G., Manara G.* A uniform GTD formulation for the diffraction by a wedge with impedance faces // IEEE Trans. AP. 1985. V. 33. P. 867–873.
7. *Boersma J., Rahmat-Samii Y.* Comparision of two leading uniform theories of edge diffraction with the exact uniform asymptotic solution // Radio Science. 1980. V. 15. № 6. P. 1179–1194.
8. Справочник по специальным функциям с графиками, формулами и математическими таблицами/Под ред. Абрамовица М. и Стиган И. М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию
28.02.89

A. V. Osipov

UNIFORM ASYMPTOTIC FORMULA FOR THE CALCULATION OF AN ACOUSTIC FIELD NEAR FACES OF AN IMPEDANCE WEDGE

Uniform asymptotic formula for the description of a plane wave diffraction on an impedance wedge is suggested. This formula remains correct both on shadow boundaries and near faces of the wedge.