АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 36 1990 Вып. 2

УДК 534.21
© 1990 г.

А. С. Старков

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БОКОВОЙ ВОЛНЫ В КРИТИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЯХ СЛАБОНЕРЕГУЛЯРНОГО ВОЛНОВОДА

Рассматривается поле точечного источника, расположенного в низкоскоростном слое переменной толщины, лежащем на однородном полупространстве. Исследуются эффекты преобразования боковой волны и нормальных волн в критических сечениях.

Задача о точечном источнике в слабонерегулярном волноводе рассматривалась многими авторами [1–3]. Основное внимание в этих работах уделяется нахождению асимптотики нормальных волн. В то же время процесс распространения боковой волны исследован недостаточно. Цель настоящей работы – описание поведения боковой волны в области критических сечений. Аналогичная задача для нормальных волн рассмотрена в [4–8].

В декартовой системе координат (x, z) рассмотрим низкоскоростной слой переменной толщины – $h(px)<z<0$, лежащий на однородном полупространстве $z>0$. Система координат выбрана таким образом, что ось x совмещена с границей раздела сред. Введем обозначения ρ, c для плотности и скорости распространения волн в полупространстве. Параметрам среды, занимающей слой, припишем индекс 1, причем считаем $n=c/c_1>1$. Предположим, что толщина слоя меняется достаточно медленно, а именно $p=\max h'(x)\ll 1$, т. е. можно считать толщину функцией медленной переменной px: $h=h(px)$. Наложим также ограничение на толщину волноведущего слоя h (иначе говоря, на частоту ω рассматриваемых колебаний) $\sqrt{p}\omega h/c\ll 1$. Это предположение позволяет рассматривать трансформацию боковой волны в нормальную волну с фиксированным номером независимо от нормальных волн других номеров.

Рассмотрим поле давлений от точечного источника (зависимость от времени принята $e^{-i\omega t}$)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2n^2\right)G_1(x,z)=-\delta(M-M_1),\qquad h(px)<z<0, \tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right)G(x,z)=0,\qquad z>0, \tag{2}$$

где $k\omega/c$ – волновое число в полупространстве. Гармонический точечный источник помещен в точку $M_1(x_1, z_1)$, $x_1<0$, $z_1<0$, точка $M(x, z)$ – точка наблюдения. При $z=-h(px)$ должно выполняться условие свободной поверхности

$$G_1|_{z=-h(px)}=0. \tag{3}$$

На границе $z=0$ должны быть непрерывны давление и нормальная скорость частиц

$$G_1|_{z=0}=G|_{z=0},\qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial G}{\partial z}\bigg|_{z=0}=\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial G_1}{\partial z}\bigg|_{z=0}. \tag{4}$$

Задача (1)–(4) моделирует существенные стороны распространения звука как в природных, так и искусственных волноведущих системах [1]. Заметим, что явный вид выбранных граничных условий на последующие рассуждения качественного влияния не оказывает. Основную роль в пред-

лагаемом в работе методе нахождения асимптотики акустического поля в окрестности критических сечений играет вронскиан W и связанное с ним дисперсионное уравнение. Явная формула для дисперсионного уравнения легко может быть получена и для многослойных систем и для систем, состоящих из упругих слоев [1]. Преобразование волн происходит в окрестности тех точек, где нарушается гладкость коэффициентов дисперсионного уравнения. В работе рассмотрена одна из наиболее типичных особенностей — точка ветвления, обусловленная совпадением в критическом сечении фазовых скоростей боковой и одной из нормальных волн.

На больших расстояниях от источника ($k|x-x_1|\gg 1$) вне критических сечений для функций G и G_1 можно использовать следующее приближение [1—3]:

$$G_1=g_1+\tilde{g}_1, \qquad G=g+\tilde{g},$$

$$g_1=\sum_{j=1}^{N} iu_j^-(M_1)\,u_j^+(M), \qquad g=\sum_{j=1}^{N} iu_j^-(M_1)\,v_j(M),$$

$$u_j^{\pm}(M)=A_j(x)\,\frac{\sin k\beta_j(z+h)}{\sin k\beta_j h}\exp\left[\pm ik\int\limits_{x_1}^{x}\lambda_j(px)\,dx\right],$$

$$v_j^{\pm}(M)=A_j(x)\exp\left[-k\alpha_j z\pm ik\int\limits_{x_1}^{x}\lambda_j(px)\,dx\right],$$

$$A_j(x)=\left[\lambda_j kh\left(1+\frac{\beta_j^2+\alpha_j^2}{\beta_j^2+d^2\alpha_j^2}\,\frac{d}{\alpha_j kh}\right)\right]^{-1/2},$$

$$d=\frac{\rho_1}{\rho}, \qquad \alpha_j=\sqrt{\lambda_j^2-1}, \qquad \beta_j=\sqrt{n^2-\lambda_j^2}, \tag{5}$$

$$\tilde{g}_1=B\,\frac{e^{ik|x-x_1|}}{|x-x_1|^{3/2}}\,\frac{\sin[k(z+h)\sqrt{n^2-1}}{\cos[kh\sqrt{n^2-1}]},$$

$$\tilde{g}=B\cdot\frac{e^{ik|x-x_1|}}{|x-x_1|^{3/2}}\left(\frac{kz\sqrt{n^2-1}}{d}+\operatorname{tg}\sqrt{n^2-1}\,kh\right),$$

$$B=\frac{i}{\sqrt{2\pi k^3(n^2-1)}}\,\frac{\sin[k(z_1+h(x_1))\sqrt{n^2-1}]}{\cos[kh(x_1)\sqrt{n^2-1}]}$$

Функции $u_j^{\pm}(M)$ описывают главный член асимптотики нормальной волны в плавнонерегулярном волноводе. Амплитудный множитель $A_j(x)$ может быть определен из закона сохранения энергии в поперечном сечении, который в данном случае имеет вид

$$\lambda_j\left\{\frac{1}{\rho_1}\int\limits_{-h(px)}^{0}|u_j(x,z)|^2\,dz+\frac{1}{\rho}\int\limits_{0}^{\infty}|v_j^{\pm}(x,z)|^2\,dz\right\}=\text{const}.$$

Слагаемые $\tilde{g}_1$ и $\tilde{g}$ описывают поле боковой волны, убывающей при удалении от источника как $|x-x_1|^{-3/2}$. Функции $\lambda_j(px)$, $j=1, 2, \ldots N$ являются корнями трансцендентного уравнения

$$\cos k\beta_j h(px)-d\frac{\alpha_j}{\beta_j}\sin k\beta_j h(px)=0, \tag{6}$$

которое является обобщением дисперсионного уравнения на случай слабонерегулярных сред. На комплексной плоскости λ проведен разрез от точек $\lambda=1(-1)$ вертикально вверх (вниз), и радикал $\sqrt{\lambda^2-1}$ считается положительным при $\lambda>1$. Число корней уравнения (6), заключенных в

промежутке $(1, n)$, зависит от толщины слоя h и уменьшается при уменьшении h.

В точке x_0, такой, что $kh(px_0)=\left(m-\frac{1}{2}\right)\pi(n^2-1)^{-1/2}$, $m=N,\ N+1$, число нормальных волн меняется скачком. Окрестность критической точки $x=x_0$ есть зона появления $(m=N+1)$ или исчезновения $(m=N)$ нормальной волны с номером m. Здесь формулы (5) перестают быть справедливыми.

С лучевой точки зрения рассматриваемое явление для сужающегося волновода вызвано появлением лучей, для которых условия полного внутреннего отражения оказываются нарушенными, и возбуждением в полупространстве волны, отвечающей этим лучам. Фазовая скорость исчезающей нормальной волны в критическом сечении совпадает со скоростью звука в полупространстве, т. е. с фазовой скоростью боковой волны.

Цель дальнейшего — дополнить формулы (5) формулами, описывающими поведение поля точечного источника вблизи критических сечений. Основное внимание уделим исследованию поля боковой волны, так как формулы для нормальных волн, применимые в окрестности критических сечений, известны [4—8].

Поместим начало системы координат в критическое сечение. При приближении к критическому сечению $x=0$ в асимптотике боковой волны (5) легко выделить главный член, который имеет вид

$$\tilde{g}\approx E\left[\frac{kz}{d}+\frac{1}{kh_1px(n^2-1)}\right]e^{ikx},$$

$$\tilde{g}_1\approx E\frac{\cos(kz\sqrt{n^2-1})}{kh_1px(n^2-1)}e^{ikx},\qquad E=B\sqrt{n^2-1}\,\frac{e^{-ikx_1}}{|x_1|^{3/2}}. \tag{7}$$

Наличие сингулярностей в асимптотике боковой волны, выделенных в (7), и приводит к неприменимости разложения (5) вблизи начала координат.

Решение однородной задачи (1)—(4) (в правой части уравнения (1) отсутствует δ-функция) будем искать в виде преобразования Фурье по переменной x:

$$\hat{g}_1=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda kx}U_1(z,\lambda)\,d\lambda,\qquad \hat{g}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda kx}U(z,\lambda)\,d\lambda. \tag{8}$$

Контур интегрирования в (8) обходит особые точки при $\operatorname{Re}\lambda>0$ снизу, а при $\operatorname{Re}\lambda<0$ — сверху.

При подстановке (8) в уравнения (1) и (2) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для U и U_1

$$\frac{\partial^2U_1}{\partial z^2}+(n^2-\lambda^2)U_1=0,\qquad \frac{\partial^2U}{\partial z^2}+(1-\lambda^2)U=0. \tag{9}$$

Граничные условия (4) будут выполнены, если взять решения уравнений (9) в виде $U=V(\lambda)e^{-\sqrt{\lambda^2-1}\,kz}$, $U_1=V(\lambda)\left[\cos k\beta(\lambda)z-\frac{\alpha(\lambda)}{\beta(\lambda)}d\sin k\beta(\lambda)z\right]$,

где $\alpha(\lambda)=\sqrt{\lambda^2-1}$, $\beta(\lambda)=\sqrt{h^2-\lambda^2}$.

Теперь осталось потребовать, чтобы было выполнено граничное условие (3). Равенство нулю функции $\tilde{g}_1$ при $z=-h(px)$ приводит к следующему интегральному уравнению для остававшегося произвольным множителя $V(\lambda)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\cos[k\beta(\lambda)h(px)]+\frac{\alpha(\lambda)}{\beta(\lambda)}d\sin[k\beta(\lambda)h(px)]\right\}e^{i\lambda kx}V(\lambda)=0. \tag{10}$$

В случае постоянной толщины слоя решения уравнения (10) имеют вид $V(\lambda)=\delta(\lambda-\lambda_j)$, где λ_j — корень дисперсионного уравнения (6). В случае медленноменяющейся толщины слоя удобно рассматривать не уравнение (10), а вытекающее из него следующее псевдодифференциальное уравнение:

$$\left\{\cos\left[k\beta(\lambda)h\left(ip\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]-\frac{\alpha(\lambda)}{\beta(\lambda)}d\sin\left[k\beta(\lambda)h\left(ip\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]\right\}V(\lambda)=0. \quad (11)$$

Символ этого псевдодифференциального уравнения имеет вид

$$W(\lambda,x)\equiv\cos[k\beta(\lambda)h(px)]-d\frac{\alpha(\lambda)}{\beta(\lambda)}\sin[k\beta(\lambda)h(px)].$$

и совпадает с левой частью дисперсионного уравнения (6).

Таким образом, задача (1)—(4), связанная с решением дифференциальных уравнений в частных производных, свелась к нахождению решений псевдодифференциального уравнения (11), т. е. при построении асимптотики волнового поля можно рассматривать дисперсионное уравнение (6), связывающее x и λ, как псевдодифференциальное. Переменные x и λ являются двойственными друг к другу.

Заметим, что зависимость толщины слоя от продольной координаты x предполагалось слабой, т. е. толщина зависит от растянутой координаты px, где p — малый параметр. Следовательно, уравнение (11) содержит малый параметр и при его решении можно использовать асимптотические методы [9].

Вне малой окрестности особой точки $\lambda=1$ у уравнения (11) есть набор ВКБ решений вида

$$V_j(\lambda)=e^{-ik\int x_j(\lambda)d\lambda}\sum_{l=0}^{\infty}V_{lj}(\lambda)p^l, \quad (12)$$

где $x_j(\lambda)$ — корень дисперсионного уравнения (6) — обратная функция к корню $\lambda_j(x)$. Можно показать, вычислив методом стационарной фазы интегралы, полученные при подстановке (12) в (8), что решения $V_j(\lambda)$ отвечают нормальным волнам с номерами j.

Вблизи особой точки $\lambda=1$ символ псевдодифференциального уравнения не является гладким — производная $\partial W/\partial\lambda$ имеет особенность в этой точке, и, следовательно, ВКБ-асимптотика здесь неприменима. Главная часть символа $W(x,\lambda)$ вблизи особой точки $x=0$, $\lambda=1$ может быть получена при разложении $W(x,\lambda)$ в ряд Тейлора по степеням x и $\sqrt{\lambda-1}$ и имеет вид

$$W(x,\lambda)=(n^2-1)kh_1px-d\sqrt{2(\lambda-1)}+\ldots \quad (13)$$

Для построения локальной асимптотики поля при малых $\lambda-1$ перейдем к растянутой координате $\mu=2(\lambda-1)p^{-2/3}$. Масштаб растяжения выбирается из условия, чтобы операторы, отвечающие выписанным в (13) главным членам, имели одинаковый порядок малости по p. Малость $\lambda-1$ означает, что вблизи критического сечения основной вклад в поле боковой волны дают лучи, идущие в полупространстве под малыми углами к границе $z=0$.

Уравнение (11) для растянутой переменной μ можно записать в виде

$$\left[\sum_{j=0}^{\infty}w_j\left(\mu,i\frac{\partial}{\partial\mu}\right)p^{j/3}\right]V(\mu)=0, \quad (14)$$

где w_j — дифференциальные операторы конечного порядка. В частности, $w_0=i(n^2-1)\dfrac{h_1}{2}\dfrac{\partial}{\partial\mu}-d\sqrt{\mu}$. Решение уравнения (14) будем искать в

виде ряда по дробным степеням p

$$V(\mu)=\sum_{l=0}^{\infty} v_l(\mu)p^{l/3},$$

и для главного члена ряда получаем соотношение

$$v_0(\mu)=R\exp\left[-\frac{i}{3}\mu^{3/2}\frac{d}{h_1(n^2-1)}\right]. \tag{15}$$

Для определения множителя R обратимся к асимптотике (7). Ее преобразование Фурье при $z=0$ имеет вид

$$R_0\begin{cases}\eta(\mu), & h_1>0,\\ -\eta(-\mu), & h_1<0,\end{cases}\quad R_0=\frac{iBe^{-ihnx_1}}{\sqrt{n_2-1}\,ph_1|x_1|^{3/2}}, \tag{16}$$

где $\eta(\mu)$ — скачкообразная функция: $\eta(\mu)=1$ при $\mu>0$, $\eta(\mu)=0$ при $\mu<0$. При сшивании (15) и (16) при малых μ (отвечающих большим x) находим $R=\frac{R_0}{2}p^{2/3}\eta(\mu)$ при $h_1>0$ и $R=-\frac{1}{2}R_0p^{2/3}\eta(-\mu)$ при $h_1<0$.

Отсюда получаем главный член асимптотики акустического поля в виде

$$\tilde{g}=\frac{R_0}{2}p^{2/3}e^{ikx}\int_0^{\infty}\exp\left(ik\frac{\mu xp^{2/3}}{2}-\frac{id\mu^{3/2}}{3h_1(n^2-1)}-\sqrt{\mu}\,p^{1/3}z\right)d\mu, \tag{17}$$

$$\tilde{g}_1=\frac{R_0}{2}p^{2/3}e^{ikx}\cos\sqrt{n^2-1}\,z\int_0^{\infty}\exp\left(ik\frac{\mu xp^{2/3}}{2}-\frac{id\mu^{3/2}}{3h_1(n^2-1)}\right)d\mu$$

при $h_1>0$ и

$$\tilde{g}=-\frac{R_0}{2}p^{2/3}e^{ikx}\int_{-\infty}^{0}\exp\left(ik\frac{\mu xp^{2/3}}{2}-\frac{id\mu^{3/2}}{3h_1(n^2-1)}-\sqrt{\mu}\,p^{1/3}z\right)d\mu,$$

$$\tilde{g}_1=-\frac{R_0}{2}p^{2/3}e^{ikx}\int_{-\infty}^{0}\exp\left(ikx\mu\frac{p^{2/3}}{2}-\frac{id\mu^{3/2}}{3h_1(n^2-1)}\right)\cos\sqrt{n^2-1}\,z\,d\mu \quad \text{при} \quad h_1<0. \tag{18}$$

Аналогичным образом, в виде интеграла Фурье, строится асимптотика исчезающей нормальной волны. При этом уравнение (14) и формула (15) остаются справедливыми, но коэффициент R не зависит от μ. Следовательно, в окрестности критического сечения, как показано в [4—8], нормальная волна описывается интегралом (17) с бесконечными пределами интегрирования.

Интегралы (17), (18) выражаются через неполные цилиндрические функции, асимптотика которых при больших значениях аргумента известна [10]. Другой способ нахождения асимптотики интегралов при больших x — это вычисление интегралов по методу стационарной фазы. Основой вклад в асимптотику интеграла (17) будет давать стационарная точка $\sqrt{\mu}=xp^{2/3}h_1(n^2-1)/d$ и концевая точка интегрирования $\mu=0$. Вклад от стационарной точки имеет вид

$$\tilde{g}_c=R_0\frac{p}{d}h_1(n^2-1)\sqrt{\pi x}\exp\left[ikx-i\frac{\pi}{4}-\frac{h_1}{d}pk^2xz(n^2-1)+\right.$$
$$\left.+\frac{i(kx)^3}{6d}p^2h_1^2(n^2-1)^2\right]. \tag{19}$$

Покажем, что именно это слагаемое при удалении от критического сечения переходит в нормальную волну номера $N+1$. Для этого исследуем дисперсионное уравнение (6) при малых x. Разлагая $h(px)$ в ряд Тейлора

по степеням px, получаем из (6) разложение всех величин, входящих в асимптотику нормальной волны

$$\alpha_{N+1}(x)=\frac{(n^2-1)h_1pkx}{d}+\ldots,\quad \lambda_{N+1}=1-\frac{x^2h_1^2p^2(n^2-1)^2}{2d}+\ldots$$

$$A_{N+1}(x)=\sqrt{(n^2-1)kh_1px}(1+\ldots \tag{20}$$

Сравнивая формулы (19) и (20), приходим к выводу, что в области за критическим сечением в сумму нормальных волн g, g_1 следует добавить еще одно слагаемое — нормальную волну номера $N+1$, в качестве коэффициента возбуждения которой $u^+_{N+1}(M_1)$ следует взять следующую величину

$$u^+_{N+1}(M_1)=\frac{e^{i\frac{\pi}{4}-iknx_1}}{(n^2-1)\sqrt{ph_1}\,|kx_1|^{3/2}}. \tag{21}$$

Значит, амплитуда возбужденной нормальной волны зависит от расстояния до источника и обратно пропорциональна корню из тангенса угла наклона касательной к границе раздела сред в критическом сечении.

Точно также можно показать, что вклад от начальной точки интегрирования в асимптотику интеграла (17) соответствует в точности боковой волне, описываемой формулой (5) и для больших положительных x.

Аналогичное исследование интеграла (18) приводит к выводу, что для сужающегося волновода ($h_1<0$) за критическим сечением акустическое поле будет иметь вид

$$\tilde{g}=Be^{ik|x-x_1|}\left[\frac{1}{(x-x_1)^{3/2}}-\frac{\sqrt{\pi}e^{i\frac{\pi}{4}}}{|x_1|^{3/2}x^{3/2}h_1(n^2-1)k^{3/2}d}\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{z\sqrt{n^2-1}}{d}+\operatorname{tg}(\sqrt{n^2-1}\,kh(px)\right]. \tag{22}$$

Формула (22) описывает две боковые волны: исходную, расходящуюся от источника, и вторичную, возбужденную в критическом сечении $x=0$. Следует отметить, что при прохождении критического сечения исчезающей нормальной волной номера N также появляется расходящаяся из начала координат волна, аналогичная вторичной боковой волне [8].

Таким образом, боковая волна для расширяющегося волновода в каждом критическом сечении порождает нормальную волну соответствующего номера, коэффициент возбуждения которой дается формулой (21). В формулу (5) за критическим сечением следует добавить появившуюся нормальную волну, а в окрестности критического сечения — суммарное поле, образующееся при интерференции появляющейся нормальной и боковой волн и описывающееся специальной функцией — интегралом (17).

Для сужающихся волноводов боковая волна в критическом сечении порождает вторичную боковую волну, в которую превращается и исчезающая нормальная волна. В окрестности критического сечения боковая волна описывается интегралом (18), а исчезающая нормальная волна — таким же интегралом, но с бесконечными пределами интегрирования. За критическим сечением исчезнувшую нормальную волну следует заменить на вторичную боковую волну [8], а к исходной боковой волне добавить вторичную волну (22).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
2. *Молотков И. А., Сардаров С. С.* Поверхностные волны, удерживаемые тонким низкоскоростным слоем // Математические вопросы теории распространения волн. 5. Зап. науч. сем. ЛОМИ, 1973. Т. 34. С. 93—102.
3. *Kamel A., Felsen L. B.* Spectral theory of sound propagation in a ocean channel with weakly sloping bottom // J. Acoust. Soc. Amer. 1983. V. 73. № 4. P. 1120—1130.

4. *Pierce A. D.* Guided mode disappearence during upslope propagation in variable depth shallow water overlying a fluid bottom // J. Acoust. Soc. Amer. 1982. V.72. № 2. P. 523–531.
5. *Arnold J. M., Felsen L. B.* Intrinsir modes in a nonseparable ocean waveguide // J. Acoust. Soc. Amer. 1984. V. 76. № 3. P. 850–860.
6. *Miller J. F., Nagl A., Überall H.* Upslope sound propagation through the bottom of a wedge shaped ocean beyond cutoff // J. Acoust. Soc. Amer. 1986. V. 79. № 2. P. 562–565.
7. *Ваксман Л. Л., Олифер А. В.* О коэффициентах прохождения нормальных волн через область отсечки в узких открытых волноводах. Математические методы прикладной акустики. Ростов н/Д: Изд-во РГУ, 1986. С. 141–147.
8. *Старков А. С.* Излучение нормальной волны при прохождении критического сечения волновода переменной толщины // Математические вопросы теории распространения волн. 17. Зап. науч. сем. ЛОМИ, 1987. Т. 165. С. 166–176.
9. *Маслов В. П.* Операторные методы. М.: Наука, 1973. 400 с.
10. *Агрест М. М., Максимов М. З.* Теория неполных цилиндрических функций и ее приложения. М.: Атомиздат, 1965. 351 с.

Ленинградский технологический институт холодильной промышленности

Поступила в редакцию 18.11.88
после исправления 16.06.89

A. S. Starkov

LATERAL WAVE TRANSFORMATION IN CRITICAL CROSS-SECTIONS OF A WEAKLY INHOMOGENEOUS WAVEGUIDE

A point source field in a shallow water waveguide with a slowly varying depth is considered. Effects of lateral and normal waves transformation in critical cross-section are investigated.