АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 36 1990 Вып. 2

УДК 534.222:517.934
© 1990 г.

С. Л. Эдельштейн

АСИМПТОТИКА МОД ПЛАВНО НЕРЕГУЛЯРНОГО ВОЛНОВОДА С ПРОНИЦАЕМЫМИ ГРАНИЦАМИ

Рассматривается двумерный волновод, состоящий из слоя почти стратифицированной жидкости, граничащего со стратифицированными средами. Получено адиабатическое приближение метода поперечных сечений для поля нормальных волн.

Рассматривается гармоническое поле в акустическом волноводе, состоящем из слоя жидкости, ограниченного плоскостями $z=0$, $z=h$. Скорость звука $c(\xi x, z)$ в слое предполагается не зависящей от одной из горизонтальных переменных и медленно меняющейся по другой ($\xi \ll 1$). Свойства граничных поверхностей описываются с помощью их проводимостей (или, что эквивалентно, с помощью импедансов, или коэффициентов отражения), при этом допускается, что эти проводимости зависят от угла падения плоских волн.

Такое описание границ [1, 2] является наиболее общим способом постановки задачи, когда слой граничит со стратифицированными средами. Известно, что в случае стратифицированного волновода скорость звука в слое и проводимости границ полностью определяют алгоритм расчета поля нормальных волн. В статье показано, что в определенном смысле это так и для плавно нерегулярного волновода.

Для изучения плавно нерегулярных волноводов часто используется адиабатическое приближение метода поперечных сечений [3]. Это приближение является главным членом формального асимптотического решения (ФАР) соответствующей краевой задачи. Известны способы построения таких асимптотик для некоторых моделей открытых жидких [4, 5] и упругих [6, 7] волноводов.

Цель работы — построение асимптотики поля нормальных волн для плавно нерегулярного волновода, границы которого заданы с помощью проводимостей. В частных случаях, например, когда граница $z=0$ — абсолютно мягкая, а $z=h$ отделяет слой от однородного жидкого или упругого полупространства, полученные в работе формулы сводятся к вытекающим из [5, 6].

Здесь мы не останавливаемся на вопросах корректности постановок соответствующих математических задач, вопросах существования решений, имеющих найденную формально асимптотику. Отметим, что в некоторых частных случаях эти вопросы решены [8].

Итак, будем искать ФАР следующей задачи:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+a(\xi x, z)p=0,\ x\in(-\infty,\infty),\ z\in[0,h]; \tag{1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}(x,0)=g_1\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)p(x,0); \tag{2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}(x,h)=g_2\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)p(x,h). \tag{3}$$

Здесь $a(\xi x, z)=\omega^2/c^2(\xi x, z)$, ω — круговая частота гармонического поля, p — комплексная амплитуда акустического давления. Условия (2), (3)

заданы с помощью псевдодифференциальных операторов. Напомним, что эти соотношения эквивалентны следующим равенствам для преобразований Фурье $\hat{p}(\lambda, z)$ фукции $p(x, z)$ по x:

$$(\partial\hat{p}/\partial z)(\lambda, 0)=g_1(\lambda)\hat{p}(\lambda, 0),\ (\partial\hat{p}/\partial z)(\lambda, h)=g_2(\lambda)\hat{p}(\lambda, h).$$

Символы псевдодифференциальных операторов связаны с проводимостями границ $Y_j(\lambda)$ соотношениями $g_j(\lambda)=i\omega\rho Y_j(\lambda)$, где ρ — плотность слоя; $j=1, 2$.

Функции $g_j(\lambda)$ предполагаются аналитическими во всех точках некоторой замкнутой области $G\subset\overline{\mathbf{C}}_+=\{\lambda\in\mathbf{C}|\operatorname{Im}\lambda\geqslant 0\}$; $c(\alpha, z)$ — бесконечно дифференцируема по α.

Для построения ФАР запишем задачу (1)—(3) в виде уравнения с операторным гамильтонианом. Определим для всех α, μ оператор $\mathscr{H}(\mu, \alpha) : \mathbf{C}^2\to B$, действующий из пространства C^2 дважды непрерывно дифференцируемых на $[0, h]$ функций в пространство B троек $(v; \sigma_1; \sigma_2)$, где v — непрерывная на $[0, h]$ функция, σ_1, σ_2 — комплексные числа. Положим $\mathscr{H}(\mu, \alpha)v=(v''(z)+(a(\alpha, z)-\mu^2)v(z);\ v'(0)-g_1(\mu)v(0);\ v'(h)-g_2(\mu)v(h))$. Здесь и далее штрих обозначает производную по z.

Сделаем замену переменных $\alpha=\xi x$, тогда $\partial/\partial x=\xi\partial/\partial\alpha$ задача (1)—(3) преобразуется к виду

$$\mathscr{H}(-i\xi\partial/\partial\alpha;\ \alpha)P=0. \tag{4}$$

Формальное асимптотическое решение уравнения (4) будем искать в виде

$$P(\alpha, z)\sim\exp\left(\frac{i}{\xi}\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\mu_0(\eta)d\eta\right)\sum_{k=0}^{\infty}\xi^k\varphi_k(\alpha, z). \tag{5}$$

Вычисляя действие гамильтониана на быстро осциллирующую компоненту [9], получим

$$\mathscr{H}(-i\xi\partial/\partial\alpha, \alpha)P\sim\exp\left(\frac{i}{\xi}\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\mu_0(\eta)d\eta\right)\sum_{k=0}^{\infty}\xi^k\sum_{j=0}^{\infty}\xi^jR_j(\partial/\partial\alpha; \alpha)\varphi_k(\alpha, z), \tag{6}$$

где $R_j(\mu, \alpha)$ — полиномы по μ степени не выше j с операторными коэффициентами, зависящими от α как от параметра. В частности, $(R_0\varphi)(\alpha)=\mathscr{H}(\mu_0(\alpha), \alpha)\varphi(\alpha)$; $(R_1\varphi)(\alpha)=(\partial\mathscr{H}/\partial\mu)(\mu_0(\alpha), \alpha)\dot{\varphi}(\alpha)+(^1/_2)(\partial^2\mathscr{H}/\partial\mu^2)\times(\mu_0(\alpha), \alpha)\dot{\mu}_0(\alpha)\varphi_0(\alpha)$. Точка здесь и далее обозначает производную по α.

Собирая члены при одинаковых степенях ξ, в правой части (6) имеем

$$\sum_{m=0}^{\infty}\xi^m\sum_{j=0}^{m}R_j\varphi_{m-j}.$$

Приравнивая коэффициенты при ξ^m к 0, получаем последовательность равенств

$$R_0\varphi_0=0, \tag{7.0}$$

$$R_0\varphi_1=-R_1\varphi_0, \tag{7.1}$$

$$R_0\varphi_2=-R_1\varphi_1-R_2\varphi_0, \tag{7.2}$$

и т. д.

Равенство (7.0) означает, что $\mu_0(\alpha)$ и $\varphi_0(\alpha, z)$ должны быть соответственно собственным числом и собственной функцией следующей спектральной задачи:

$$\varphi''(z)+(a(\alpha, z)-\mu^2)\varphi(z)=0; \tag{8}$$

$$\varphi'(0)-g_1(\mu)\varphi(0)=0; \tag{9}$$

$$\varphi'(h)-g_2(\mu)\varphi(h)=0. \tag{10}$$

Равенства (7.1), (7.2) и т. д. являются неоднородными краевыми задачами, соответствующими (8)—(10). Сформулируем условие разрешимости таких неоднородных задач.

Пусть $\mu_0(\alpha)\,(\in G)$, $\varphi_0(\alpha)$ являются решениями задачи (8)–(10). Тогда задача

$$\psi''(z)+(a(\alpha,z)-\mu_0^2(\alpha))\psi(z)=f; \tag{11}$$

$$\psi'(0)-g_1(\mu_0(\alpha))\psi(0)=\sigma_1; \tag{12}$$

$$\psi''(h)-g_2(\mu_0(\alpha))\psi(h)=\sigma_2 \tag{13}$$

разрешима в том и только в том случае, когда

$$\int_0^h f(z)\varphi_0(\alpha,z)\,dz+\sigma_1\varphi_0(\alpha,0)-\sigma_2\varphi_0(\alpha,h)=0. \tag{14}$$

Сформулированное утверждение при $\sigma_j=0$ – хорошо известный факт теории задач Штурма – Лиувилля. В случае $\sigma_j\neq 0$ обоснование условия (14) проводится совершенно аналогично. В частности, необходимость вытекает из соотношения

$$\int_0^h f(z)\varphi_0(\alpha,z)\,dz=(\psi'\varphi_0-\psi\varphi_0')\,|_0^h,$$

являющегося следствием формулы Грина.

Удобно условие (14) записывать в виде $\langle T\varphi_0,F\rangle=0$, где $F=(f;\sigma_1;\sigma_2)\in\in B$, $T:C^2\to B$ – оператор, действующий по правилу $T\varphi=(\varphi;\varphi(0);\varphi(h))$, $\langle .,.\rangle$ – симметричная билинейная форма на $B\times B$ ставящая в соответствие элементам $F^j=(f^j;\sigma_1^j;\sigma_2^j)\in B$, $j=1,2$ число

$$\langle F^1,F^2\rangle=\sigma_1^1\sigma_1^2-\sigma_2^1\sigma_2^2+\int_0^h f^1(z)f^2(z)\,dz.$$

Далее будем полагать, что при всех α задача (8)–(10) разрешима, собственное число $\mu_0(\alpha)\in G$ непрерывно зависит от α.

Более того, предположим, что это собственное число простое. Это означает, что для вронскиана $W(\mu,\alpha)=\psi_1'(\mu,\alpha,z)\psi_2(\mu,\alpha,z)-\psi_1(\mu,\alpha,z)\times\times\psi_2'(\mu,\alpha,z)$ двух решений ψ_1, ψ_2 однородного уравнения $\psi''+(a(\alpha,z)-\mu^2)\psi=0$ таких, что $\psi_1(\mu,\alpha,0)=1$, $\psi'(\mu,\alpha,0)=g_1(\mu)$, $\psi_2(\mu,\alpha,h)=1$, $\psi'(\mu,\alpha,z)=g_2(\mu)$ справедливы соотношения $W(\mu_0(\alpha),\alpha)=0$, $(\partial W/\partial\mu)\times\times(\mu_0(\alpha),\alpha)\neq 0$.

Вычисляя производную вронскиана с помощью формулы Грина, не трудно установить, что требование простоты $\mu_0(\alpha)$ эквивалентно условию

$$2\mu_0(\alpha)\int_0^h[\varphi_0(\alpha,z)]^2\,dz+(^1/_2)(\partial g_1/\partial\mu)(\mu_0(\alpha),\alpha)[\varphi_0(\alpha,0)]^2-$$

$$-(^1/_2)(\partial g_2/\partial\mu)(\mu_0(\alpha),\alpha)[\varphi_0(\alpha,h)]^2\neq 0.$$

Отметим, что левая часть последнего равенства совпадает с $\langle T\varphi_0,(\partial\mathscr{H}/\partial\mu)(\mu_0(\alpha),\alpha)\varphi_0\rangle$. Требования бесконечной дифференцируемости с (α,z) по α и простоты $\mu_0(\alpha)$ обеспечивают бесконечную дифференцируемость $\mu_0(\alpha)$ по α.

Равенство (7.1) является неоднородной краевой задачей для φ_1 вида (11)–(13), причем $f=2\mu_0(\alpha)\dot\varphi(\alpha,z)+\dot\mu_0(\alpha)\varphi(\alpha,z)$, $\sigma_j=(\partial g_j/\partial\mu)(\mu_0(\alpha),\alpha)\dot\varphi_0(\alpha,z_j)+(^1/_2)(\partial^2 g_j/\partial\mu^2)(\mu_0(\alpha),\alpha)\varphi_0(z_j)$, $j=1,2$, $z_1=0$, $z_2=h$.

Непосредственно проверяется, что

$$\langle T\varphi_0,F\rangle=-\langle T\varphi_0,R_1\varphi_0\rangle=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left\langle\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\mu}(\mu_0(\alpha),\alpha)\varphi_0,T\varphi_0\right\rangle.$$

Таким образом, условие разрешимости (7.1) может быть записано в виде

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left\langle T\varphi_0,\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\mu}(\mu_0(\alpha),\alpha)\varphi_0\right\rangle=0, \tag{15}$$

что эквивалентно условию нормировки собственной функции $\langle(\partial\mathcal{H}/\partial\mu)\times\times(\mu_0(\alpha),\alpha)\varphi_0, T\varphi_0\rangle=c_1(=\mathrm{const}\neq 0)$.

Из (7.1) φ_1 определяется не однозначно, а с точностью до слагаемого $b(\alpha)\varphi_0(\alpha,z)$. Положим $\varphi_1=\psi_1+b\varphi_0$, где ψ_1 — такое решение (7.1), что $\langle T\varphi_0, R_1\psi_1\rangle=0$.

Запишем условие разрешимости (7.2): $\langle T\varphi_0, R_1\varphi_1+R_2\varphi_2\rangle=0$. Преобразуя левую часть, имеем

$$\langle T\varphi_0, R_1 b\varphi_0\rangle+\langle T\varphi_0, R_2\varphi_0\rangle=b\langle T\varphi_0, R_1\varphi_0\rangle+$$
$$+\dot{b}\langle T\varphi_0, (\partial\mathcal{H}/\partial\mu)(\mu_0(\alpha),\alpha)\varphi_0\rangle+\langle T\varphi_0, R_2\varphi_0\rangle.$$

Значение билинейной формы в первом слагаемом равно 0 в силу условия разрешимости для (7.1). Получаем дифференциальное уравнение

$$c_1\dot{b}+\langle T\varphi_0, R_2\varphi_0\rangle=0, \tag{16}$$

из которого $b(\alpha)$ находится с точностью до аддитивной константы c_2.

Аналогично можно определить и другие члены разложения (5). Неопределенность в выборе констант при решении дифференциальных уравнений (15), (16) (и аналогичных уравнений переноса, возникающих при определении последующих членов) обусловлена тем, что ищется произвольное решение однородной задачи (1)—(3). Однозначности решения можно добиться заданием в какой-либо точке α_0 величины $\langle TP(\alpha_0), (\partial\mathcal{H}/\partial\mu)(\mu_0(\alpha),\alpha)\varphi_0^0\rangle$, где φ_0^0 — собственная функция задачи (8)—(10), отвечающая $\mu_0(\alpha)$ нормированная условием $\langle(\partial\mathcal{H}/\partial\mu)\varphi_0^0, T\varphi_0^0\rangle=1$.

Итак, пусть для всех $x\in(-\infty,\infty)$ поперечная спектральная задача

$$y''(z)+(a(\xi x,z)-\lambda^2)y(z)=0; \tag{17}$$

$$y'(0)=g_1(\lambda)y(0); \tag{18}$$

$$y'(h)=g_2(\lambda)y(h); \tag{19}$$

имеет простое собственное значение $\lambda_m(x)$, и $y_m(x,z)$ — собственная функция задачи, нормированная условием

$$2\lambda_m(x)\int_0^h (y_m(x,z))^2\,dz+(\partial g_1/\partial\lambda)(\lambda_m(x))[y_m(x,0)]^2-$$
$$-(\partial g_2/\partial\lambda)(\lambda_m(x))[y_m(x,h)]^2=1. \tag{20}$$

Тогда у задачи (1)—(3) существует формальное асимптотическое решение, аналогичное m-й моде слоистого волновода. Главный член асимптотики имеет вид

$$P_m(x,z)=\exp\left(i\int_{x_0}^{x}\lambda_m(t)\,dt\right)(y_m(x,z)+O(\xi)). \tag{21}$$

Если бы решалась задача с точечным источником, т. е. в правой части (1) вместо 0 стояло бы $\delta(x-x_0)\delta(z-z_0)$, то вклад мод описывался бы линейной комбинацией слагаемых вида (21) с коэффициентами — $iy_m(z_0)$.

Изложенная выше схема построения ФАР применима (с тривиальными модификациями) и в случае, когда плотность $\rho(\xi x,z)$ среды в слое зависит от z и слабо меняется по x. В этом случае краевая задача аналогична (1)—(3), но в уравнении вместо $\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial z^2$ используется оператор $\rho(\xi x,z)\operatorname{div}\rho^{-1}(\xi x,z)\operatorname{grad}$. Главный член по-прежнему имеет вид (21), где $\lambda_m(x)$, $y_m(x,z))$ — решение спектральной задачи, аналогичной (17)—(19). Однако в (17) y'' следует заменить на $\rho(\xi x,z)(\rho^{-1}(\xi x,z)y')'$, а в условие нормировки (20) следует добавить множитель $\rho^{-1}(\xi x,z)$ в подынтегральное выражение.

Автор признателен Л. Л. Ваксману за обсуждение результатов работы. Это обсуждение, в частности, дало возможность выяснить, что в случае, когда слой граничит с однородными упругими средами, полученные формулы сводятся к вытекающим из [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
2. *Исакович М. А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973. 495 с.
3. *Каценеленбаум Б. З.* Теория нерегулярных волноводов с плавно меняющимися параметрами. М.: Изд-во АН СССР, 1961. 265 с.
4. *Шевченко В. В.* Плавные переходы в открытых волноводах. Введение в теорию. М.: Наука, 1969. 192 с.
5. *Булдырев В. С., Буслаев В. С.* Асимптотические методы в задачах распространения звука в океанических волноводах и их численная реализация // Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. Т. 117. Л.: Наука, 1981. С. 39–77.
6. *Woodhause J. H.* Surface waves in a laterally varying layered structure // Geophys. J. Ray. Astron. Soc. 1974. V. 37. № 3. P. 461–490.
7. *Бабич В. М., Чихачев Б. А.* Распространение волн Лява и Рэлея в слабо неоднородной слоистой среде // Вестн. ЛГУ. 1975. № 1. С. 32–38.
8. *Эдельштейн С. Л.* Априорные оценки полей в открытых двумерных почти стратифицированных волноводах. Метод параболического уравнения, асимптотика. I. Ростов н/Д, 1988. 51 с.– Деп. в ВИНИТИ 19.04.88, № 2957–В88.
9. *Маслов В. П., Федорюк М. В.* Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976. 296 с.

Ростовский государственный университет

Поступила в редакцию 06.10.88

S. L. Èdel'shtein

MODE ASYMPTOTICS OF A SLOWLY VARYING WAVEGUIDE WITH PERMEABLE BOUNDARIES

A two-dimensional waveguide which consists of a layer of an almost stratified liquid bounded with stratified media, is considered. An adiabatic approximation of the cross-section method for a normal waves field is obtained.