АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 36 1990 Вып. 3

УДК 532.529.6
© 1990 г.

А. А. Дойников, С. Т. Завтрак

РАДИАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ ГАЗОВЫХ ПУЗЫРЬКОВ В СЖИМАЕМОЙ НЕИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Получено наиболее общее выражение для сил взаимодействия газовых пузырьков в поле плоской звуковой волны с учетом сжимаемости жидкости и диссипации энергии.

Взаимодействие газовых пузырьков в жидкости под действием акустической волны рассматривалось в многочисленных работах (см. например, [1–4]). Сжимаемость жидкости, насколько нам известно, впервые была учтена в статье [1]. В этой работе было установлено, что помимо классических сил Бьеркнеса на газовые пузырьки в сжимаемой жидкости действуют дальнодействующие силы, которые, как и силы Бьеркнеса, направлены по линии, соединяющей центры пузырьков, но в отличие от них убывают обратно пропорционально не квадрату, а первой степени расстояния между пузырьками. Однако в [1] в результате допущенной погрешности была утеряна важная составляющая дальнодействующей силы, направленная по волновому вектору $\mathbf{k}$ падающей волны. Эта дополнительная сила впервые была обнаружена в работах [5, 6] и названа тангенциальной составляющей силы Бьеркнеса. К сожалению, в работах [5, 6] тоже была допущена погрешность. Не было учтено одно принципиальное обстоятельство, а именно учет сжимаемости жидкости приводит к нарушению замкнутости системы двух взаимодействующих пузырьков. В итоге выражение для тангенциальной силы было вычислено некорректно. В настоящей статье устранены недостатки работ [1, 5, 6] и получено правильное выражение для сил радиационного взаимодействия газовых пузырьков в сжимаемой жидкости. Кроме того, в данной работе учтена неидеальность колебаний пузырьков.

Вынужденные пульсации газовых пузырьков, возбуждаемые, например, плоской звуковой волной давления $P_{ac}=A\cos(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$, формируют рассеянное поле в жидкости:

$$\varphi_s=\varphi_{s1}+\varphi_{s2}=-\frac{R_1^2\cdot\Delta\dot{R}_1\left(t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}-\frac{R_2^2\cdot\Delta\dot{R}_2\left(t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|}, \quad (1)$$

где φ_{s1} и φ_{s2} – запаздывающие потенциалы скоростей жидкости, создаваемые соответственно пульсациями первого и второго пузырьков; $R_{1,2}$ – равновесные радиусы пузырьков, $\Delta R_{1,2}$ – их изменения; $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки жидкости; $\mathbf{r}_{1,2}$ – радиусы-векторы центров пузырьков; c – скорость звука в чистой жидкости. Точкой здесь и далее обозначено дифференцирование по времени. Зависимость $\Delta R_{1,2}$ от времени представим в виде

$$\Delta R_{1,2}=a_{1,2}\cos(\omega t-\mathbf{k}\mathbf{r}_{1,2}-\chi_{1,2}). \quad (2)$$

Если пузырьки считать изолированными, а жидкость идеальной и несжимаемой, то $\chi_{1,2}=0$. Выражения для $a_{1,2}$ и $\chi_{1,2}$ приведены ниже.

Силу, действующую на первый пузырек, автор работы [1] вычислял следующим образом:

$$\mathbf{F}_{1l}=4\pi R_1^2\rho\langle\Delta R_1\cdot\nabla\cdot\dot{\varphi}_{s2}\rangle=\frac{2\pi\rho R_1^2R_2^2\omega^2a_1a_2\mathbf{l}}{l^3}[\cos(kl+\mathbf{kl}+\chi_2-\chi_1)+$$

$$+(kl)\sin(kl+\mathbf{kl}+\chi_2-\chi_1)], \quad (3)$$

где $\mathbf{l}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$ индекс l у силы означает, что она направлена по $\mathbf{l}$. Сила, действующая на второй пузырек, отличается от $\mathbf{F}_{1l}$ заменой $\mathbf{l}$ на $-\mathbf{l}$. Из (3) видно, что силы $\mathbf{F}_{1,\,2l}$ содержат короткодействующий и дальнодействующий члены. Кроме того, сумма сил $\mathbf{F}_{1l}+\mathbf{F}_{2l}\neq 0$.

Однако вычисление силы радиационного давления, действующей на пузырек, должно вестись, как показано в работах [2–4], по формуле

$$\mathbf{F}_1=-4\pi R_1^2\langle\Delta R_1\nabla P\rangle, \tag{4}$$

где P – результирующее давление внешней волны, падающей на первый пузырек, которое равно сумме $P=P_{ac}+P_{s2}$, где $P_{s2}=-\rho\dot{\varphi}_{s2}$ – давление рассеянной вторым пузырьком волны. Учет этого фактора приводит к дополнительной силе

$$\mathbf{F}_{1k}=-2\pi R_1^2 a_1\mathbf{k}A\sin\chi_1, \tag{5}$$

которая, на первый взгляд, представляет собой обычную силу радиационного давления [2–4] (индекс k означает, что сила (5) направлена по $\mathbf{k}$). Но, как показано ниже, взаимодействие пузырьков приводит к тому, что амплитуды $a_{1,2}$ и фазы $\chi_{1,2}$ начинают зависеть от расстояния l между пузырьками. Амплитуда a_1 как бы состоит из двух частей. Одна часть определяется внешним полем и не зависит от $\mathbf{l}$. А другая определяется пульсациями второго пузырька и поэтому зависит от параметра R_2/l. Аналогичную структуру имеет фаза χ_1. Это приводит к дополнительным силам взаимодействия пузырьков, которые являются дальнодействующими. Эти силы, как сказано выше, впервые были обнаружены в работах [5, 6]. Они приводят к вращению пузырьков друг относительно друга даже в том случае, если пузырьки одинаковы (в этом случае под действием обычной силы радиационного давления пузырьки сносятся как одно целое). Таким образом, основной недостаток работы [1] состоит в том, что ее автор вместо полного давления $P=P_{ac}+P_{s2}$ использовал в формуле (4) только давление, создаваемое вторым пузырьком, т. е. P_{s2}.

Для определения амплитуд $a_{1,2}$ и фаз $\chi_{1,2}$ составим уравнения радиальных пульсаций пузырьков [2–4]:

$$\Delta\ddot{R}_1+\omega_1^2\Delta R_1+\omega\delta_1\Delta\dot{R}_1=-\frac{A}{\rho R_1}\cos(\omega t-\mathbf{kr}_1)-\frac{R_2^2}{R_1 l}\Delta\ddot{R}_2(t-l/c),$$

$$\Delta\ddot{R}_2+\omega_2^2\Delta R_2+\omega\delta_2\Delta\dot{R}_2=-\frac{A}{\rho R_2}\cos(\omega t-\mathbf{kr}_2)-\frac{R_1^2}{R_2 l}\Delta\ddot{R}_1(t-l/c), \tag{6}$$

в которым учтем, что на каждый из пузырьков, помимо падающей волны, действует и давление, создаваемое пульсациями другого пузырька $P_{s1,\,2}=-\rho\dot{\varphi}_{s1,\,2}$ в запаздывающие моменты времени [5, 6]. Кроме того, в этих уравнениях феноменологически учтено поглощение. Постоянные затухания представляют собой сумму $\delta_{1,\,2}=\delta_{r1,\,2}+\delta_{t1,\,2}+\delta_{v1,\,2}$, где каждый из членов отвечает соответственно за переизлучение, тепловые потери и вязкость жидкости, $\omega_{1,\,2}$ – резонансные круговые частоты пузырьков.

Решение уравнений (6) будем искать в виде (2). В результате приходим к системе четырех трансцендентных уравнений, которые не будем выписывать ввиду громоздкости. Решение этой системы может быть найдено в виде разложения по степеням параметров $R_{1,\,2}/l$. В первом приближении имеем [5]

$$a_1=a_{10}+a_{11}=-\frac{A}{\rho\omega^2 R_1\sqrt{(\omega_1^2/\omega^2-1)^2+\delta_1^2}}\left[1+\frac{R_2}{l}\frac{\cos(kl+\mathbf{kl})}{\sqrt{(\omega_2^2/\omega^2-1)^2+\delta_2^2}}\right],$$

$$a_2=a_{20}+a_{21}=-\frac{A}{\rho\omega^2 R_2\sqrt{(\omega_2^2/\omega^2-1)^2+\delta_2^2}}\left[1+\frac{R_1}{l}\frac{\cos(kl-\mathbf{kl})}{\sqrt{(\omega_1^2/\omega^2-1)^2+\delta_1^2}}\right],$$

$$\chi_1=\chi_{10}+\chi_{11}=\operatorname{arctg}\left(\frac{\delta_1}{\omega_1^2/\omega^2-1}\right)+\frac{R_2}{l}\frac{\sin(kl+\mathbf{kl})}{\sqrt{(\omega_2^2/\omega^2-1)^2+\delta_2^2}}, \tag{7}$$

$$\chi_2=\chi_{20}+\chi_{21}=\operatorname{arctg}\left(\frac{\delta_2}{\omega_2^2/\omega^2-1}\right)+\frac{R_1}{l}\frac{\sin(kl-\mathbf{kl})}{\sqrt{(\omega_1^2/\omega^2-1)^2+\delta_1^2}},$$

где a_{10}, a_{20}, χ_{10} и χ_{20} — значения соответствующих величин, получающихся в пределе $R_{1,2}/l \to 0$, т. е. в случае изолированных пузырьков.

Подставляя (7) в (4) и используя (3) и (5), получаем общее выражение для сил, действующих на пузырьки, с учетом диссипации энергии и в первом приближении по $kR_{1,2} \ll 1$:

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{1l} + \mathbf{F}_{1k}, \quad \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_{2l} + \mathbf{F}_{2k}, \tag{8}$$

где

$$\mathbf{F}_{1l} = \frac{2\pi R_1 R_2 A^2}{\rho\omega^2 \sqrt{(\omega_1^2/\omega^2-1)^2+\delta_1^2}\sqrt{(\omega_2^2/\omega^2-1)^2+\delta_2^2}} \frac{\mathbf{l}}{l^3} [\cos(kl+\mathbf{kl}+\chi_{20}-\chi_{10}) + kl\sin(kl+\mathbf{kl}+\chi_{20}-\chi_{10})], \tag{9}$$

$$\mathbf{F}_{2l} = -\frac{2\pi R_1 R_2 A^2}{\rho\omega^2 \sqrt{(\omega_1^2/\omega^2-1)^2+\delta_1^2}\sqrt{(\omega_2^2/\omega^2-1)^2+\delta_2^2}} \frac{\mathbf{l}}{l^3} [\cos(kl-\mathbf{kl}+\chi_{20}-\chi_{10}) + kl\sin(kl-\mathbf{kl}+\chi_{20}-\chi_{10})], \tag{10}$$

$$\mathbf{F}_{1k} = \frac{2\pi R_1 A^2 \delta_1 \mathbf{k}}{\rho\omega^2[(\omega_1^2/\omega^2-1)^2+\delta_1^2]} + \frac{2\pi R_1 R_2 A^2 \mathbf{k}\sin(kl+\mathbf{kl}+\chi_{10})}{\rho\omega^2 l \sqrt{(\omega_1^2/\omega^2-1)^2+\delta_1^2}\sqrt{(\omega_2^2/\omega^2-1)^2+\delta_2^2}}, \tag{11}$$

$$\mathbf{F}_{2k} = \frac{2\pi R_2 A^2 \delta_2 \mathbf{k}}{\rho\omega^2[(\omega_2^2/\omega^2-1)^2+\delta_2^2]} + \frac{2\pi R_1 R_2 A^2 \mathbf{k}\sin(kl-\mathbf{kl}+\chi_{20})}{\rho\omega^2 l \sqrt{(\omega_1^2/\omega^2-1)^2+\delta_1^2}\sqrt{(\omega_2^2/\omega^2-1)^2+\delta_2^2}}. \tag{12}$$

В первых двух членах соотношений (11), (12) узнаем обычные силы радиационного давления [2–4, 7]. Составляющие сил взаимодействия (9), (10), направленные по $\mathbf{l}$, содержат в себе как короткодействующие, так и дальнодействующие члены [1, 5, 6]. Составляющие сил взаимодействия (11), (12), зависящие от $\mathbf{l}$ и направленные по $\mathbf{k}$, являются дальнодействующими. В пределе $kl \ll 1$ силы (9), (10) переходят в обычные силы Бьеркнеса для несжимаемой жидкости [2–6]. Сумма сил взаимодействия, зависящих от $\mathbf{l}$ в общем случае не равна нулю. Объяснение этого факта дано в [1] для составляющих, направленных по $\mathbf{l}$.

Вычислим полный импульс, переносимый результирующей волной давления через сферу большого радиуса r, центр которой совпадает, например, с центром первого пузырька. Этот импульс запишем в тензорном виде [8]:

$$P_i = \int_{(S_r)} [P\delta_{ij} + \rho_0 \nabla_i\varphi \nabla_j\varphi] ds_j, \tag{13}$$

где P — давление жидкости, которое запишем с точностью до квадратичных по полю членов $P = P_0 - \rho_0\dot{\varphi} - \rho_0(\nabla\varphi)^2/2 + \rho_0\dot{\varphi}^2/2c^2$. Здесь P_0 — статическое давление, ρ_0 — невозмущенная плотность жидкости, φ — суммарный потенциал скоростей, равный $\varphi_{ac}+\varphi_{s1}+\varphi_{s2}$ ($\varphi_{ac} = -(A/\rho\omega)\sin(\omega t - \mathbf{kr})$. При вычислении (13) устремим $r \to \infty$ и усредним получившееся выражение по времени. При этом оказывается, что каждый из членов (13) по отдельности зависит от r (на это указано в [8]), но суммарный результат от r не зависит.

Выражение (13) можно рассматривать как взятую с обратным знаком разницу между втекающим в замкнутую поверхность количеством движения и вытекающим из нее. Образующийся дефицит равен суммарной силе. Прямое вычисление (13) показывает, что действительно $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = -\mathbf{P}$.

Теперь рассмотрим погрешности, допущенные в работах [5, 6]. Напомним, что в этих работах использовался метод лагранжева формализма. Он заключается в следующем. Вычислялся полный лагранжиан системы, включающий в себя кинетическую и потенциальную энергию жидкости и потенциальную энергию газа, содержащегося в пузырьках. После

усреднения по периоду волны он оказался равным

$$\langle L\rangle = \frac{m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2}{2} + \frac{2\pi A^2 R_1 R_2 \cos(kl)\cos(\mathbf{kl})}{\rho\omega^2 l(\omega_1^2/\omega^2-1)(\omega_2^2/\omega^2-1)}. \qquad (14)$$

Диссипация энергии при этом не учитывалась, т. е. $\delta_{1,2}=0$. В выражении (14) включены дополнительные члены, соответствующие кинетической энергии поступательного движения пузырьков. Массы $m_{1,2}=2\pi\rho R_{1,2}^3/3$, т. е. равны присоединенным массам.

Выражение (14) можно интерпретировать как некий эффективный лагранжиан двух медленно движущихся пузырьков, взаимодействие которых обусловлено падающей высокочастотной волной. Слово медленно означает, что $|\dot{\mathbf{r}}_{1,2}| \ll |\Delta\dot{R}_{1,2}|$. Силы Бьеркнеса могут быть вычислены как $\mathbf{F}_{B12}=\partial\langle L\rangle/\partial\mathbf{r}_{1,2}$. Если проделать указанные вычисления (в [5] они проделаны для случая $R_1=R_2$), то окажется, что силы $\mathbf{F}_{B1,2}$, вычисленные через лагранжиан, не равны силам $\mathbf{F}_{1,2}$, рассчитанным по формуле (4) (здесь и ниже под силами $\mathbf{F}_{1,2}$ понимаются силы, задаваемые формулами (8)—(12) за вычетом обычных сил радиационного давления, которые являются первыми членами выражений (11), (12)). Наиболее ярко это проявляется в том, что сумма сил $\mathbf{F}_{B1}+\mathbf{F}_{B2}\equiv 0$, в то время как сумма сил $\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2\neq 0$. Вместе с тем интересно отметить что разности $\mathbf{F}_{B1}-\mathbf{F}_{B2}=\mathbf{F}_1-\mathbf{F}_2$. С нашей точки зрения, дело заключается в следующем. Учет сжимаемости жидкости приводит к тому, что скорость распространения возмущений, т. е. скорость звука в жидкости становится конечной. Вследствие этого система двух пузырьков перестает быть замкнутой и часть количества движения уносится рассеянной волной на бесконечность (эта часть определяется интегралом (13)). Таким образом, метод лагранжева формализма в данном случае неприменим. Для корректного вычисления сил радиационного взаимодействия газовых пузырьков необходимо пользоваться формулой (4), что и было сделано в настоящей работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Немцов Б. Е.* Эффекты радиационного взаимодействия пузырьков в жидкости // Письма в ЖТФ. 1983. Т. 9. № 14. С. 858–861.
2. *Красильников В. А., Крылов В. В.* Введение в физическую акустику. М.: Наука, 1984. 400 с.
3. *Акуличев В. А., Алексеев В. Н., Буланов В. А.* Периодические фазовые превращения в жидкостях. М.: Наука, 1986. С. 181–228.
4. *Алексеев В. Н.* К вопросу о радиационной силе давления звука на сферу // Акуст. журн. 1983. Т. 29. № 2. С. 129–136.
5. *Дойников А. А., Завтрак С. Т.* Учет сжимаемости жидкости в задаче о взаимодействии газовых пузырьков в поле звуковой волны // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 2. С. 246–250.
6. *Дойников А. А., Завтрак С. Т.* Взаимодействие газовых пузырьков в сжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. Сер. МЖГ. 1988. № 6. С. 99–103.
7. *Завтрак С. Т.* К вопросу о поведении облака газовых пузырьков в жидкости в поле звуковой волны давления // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 1. С. 31–36.
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

Научно-исследовательский институт
прикладных физических проблем
им. А. Н. Сенченко при Белгосуниверситете
им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию
09.03.89

A. A. Doinikov, S. T. Zavtrak

RADIATION EFFECTS OF AN INTERACTION BETWEEN TWO GAS BUBBLES IN COMPRESSIBLE NONIDEAL FLUID

The most general expression describing interaction forces between two gas bubbles in the field of plane sound wave is obtained. The fluid compressibility and energy dissipation are taken into account.