Том 36

1990

Вып. 4

УДК 534.23:519.63

© 1990 r.

#### А.В. Гладкий

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В НЕОДНОРОДНЫХ ОБЛАСТЯХ

Рассматривается задача численного моделирования волновых процессов в неоднордных областях, заполненных средами с потерями. Для расчета полей, описываемых параболическим волновым уравнением, предложены разностные схемы второго и повышенного порядка точности. Доказана абсолютная устойчивость разностных задач и проиллюстрирована их эффективность на численных примерах.

Решение задач моделирования распространения акустической энергии в неоднородных областях приводит к необходимости разработки эффективных методов решения краевых задач для эллиптических и параболических волновых уравнений [1—9]. Широкое применение при моделировании акустических полей получили численные методы с использованием разностных схем второго порядка точности. Однако в целях повышения эффективности вычислительного процесса представляет интерес вопрос разработки и исследования разностных схем повышенного порядка аппроксимации. Такие схемы позволяют получить решение с заданной точностью на более грубой сетке и, кроме того, меньше искажают фазу, поскольку имеют дисперсионность значительно меньшую, чем схемы второго порядка.

В данной работе для решения волнового параболического уравнения в неоднородных областях предлагается двухслойная разностная схема с весами, которая в зависимости от значения параметра аппроксимирует дифференциальную задачу со вторым или повышенным порядком точности. Показана устойчивость этих схем и проиллюстрирована их эффективность на численном примере.

Рассмотрим в области  $G = \{r > r_0, 0 < z < L\}$ , где (r, z) — цилиндрические координаты, следующую краевую задачу:

$$2ik_0\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k_0^2(n^2(r,z) - 1 + iv(r,z))u = 0, \tag{1}$$

$$u(r_0, z) = u_0(z), u_0(r, 0) = u(r, L) = 0.$$
 (2)

Здесь i — мнимая единица,  $u_0(z)$  — заданная функция,  $n(r, z) = c_0/c(r, z)$  — коэффициент преломления, c(r, z) — скорость звука  $(c_0$  — ее значение в точке излучения),  $k_0 = \omega/c_0$  — волновое число,  $\omega$  — частота, v(r, z) — коэф-

фициент объемного поглощения.

Задача (1), (2) является базовой при определении акустического давления p(r, z), создаваемого точечным гармоническим источником в точке с координатами (0,  $z_s$ ). Это давление удовлетворяет приведенному уравнению Гельмгольца  $\Delta p + k_0^2 n^2 (r, z) p = 0$  и при  $k_0 r \gg 1$  представляется, следуя [2], в виде  $p(r, z) = H_0^{(1)}(k_0 r) u(r, z)$ , где  $H_0^{(1)}(\cdot) -$  функция Ханкеля первого рода нулевого порядка. Отметим, что область эффективного использования уравнения (1) для описания распространяющейся акустической энергии ограничена углами распространения к горизонтали, не превышающими  $10^\circ$ .

Для численного решения задачи (1), (2) введем в G сетку  $\Omega = \Omega_{\tau} \times \Omega_{h}$ ,  $\Omega_{\tau} = \{r = r_{n} = r_{0} + n\tau, n = 1, 2, \ldots,\}$ ,  $\Omega_{h} = \{z = z_{h} = kh, k = 1, N-1, h = L/N\}$ . На сетке  $\Omega$  задаче (1), (2) поставим в соответствие разностную схему с

$$2ik_{0}v_{r} + \Lambda(\sigma \hat{v} + (1-\sigma)v) + \varphi = 0,$$

$$v^{0} = u_{0}(z), \ v(r, 0) = v(r, L) = 0,$$
(3)

где о — параметр, ф — подлежит определению из условия аппроксимации и введены обозначения согласно [10]:

$$v=v_h^n=v(r_n, z_h), v^n=v(r_n, z), \hat{v}=v(r_{n+1}, z),$$
  
 $v_r=(\hat{v}-v)/\tau, \quad v_{\bar{z}z}=(v_{k+1}^n-2v_k^n+v_{k-1}^n)/h^2=\Lambda v.$ 

Пусть  $\psi(r, z) = \Lambda(\sigma \hat{u} + (1-\sigma)u) + 2ik_0u_r + \varphi - погрешность аппрокси$ мации схемы (3) на решении дифференциальной задачи (1), (2). Пользуясь разложением в ряд Тейлора в окрестности точки  $(r_{n+0.5}, z_h)$ , можно показать, что

$$\psi = \begin{cases} O(\tau^2 + h^2) & \text{при } \phi = \widetilde{bv}, \quad \sigma = 1/2, \\ O(\tau^2 + h^4) & \text{при } \phi = \widetilde{bv} + \frac{h^2}{12} \Lambda \widetilde{bv}, \quad \sigma = \frac{1}{2} + \frac{ik_0h^2}{\tau 6}, \end{cases}$$

где  $b(r, z) = k_0^2 (n^2(r, z) - 1 + iv(r, z))$ , и для любой сеточной функции f(r, z) обозначено  $\tilde{f} = f(r_{n+0,5}, z)$ . При вычислениях можно, например, пользоваться одной из формул

$$\widetilde{bv} = (\widehat{b}\widehat{v} + bv)/2, \ \widetilde{bv} = \widetilde{b}(\widehat{v} + v)/2.$$

Таким образом, задаче (1), (2) поставим в соответствие двухслойные разностные схемы второго и повышенного порядка аппроксимации соответственно:

$$(2ik_0E+0.5\tau(\tilde{b}E+\Lambda))v_r+\Lambda v+\tilde{b}v=0, \ v^0=u_0(z), \tag{4}$$

$$\left(2ik_0E + \tau\sigma\Lambda + 0.5\tau\left(\tilde{\tau}E + \frac{h^2}{12}\Lambda Q\right)\right)v_r + \Lambda v + \tilde{\tau}v + \frac{h^2}{12}\Lambda Qv = 0, \quad v^0 = u_0(z),$$

$$\sigma = \frac{1}{2} + \frac{ik_0h^2}{\tau 6}.$$
(5)

Здесь E — единичный оператор,  $\Lambda$  — определен на множестве сеточных функций, обращающихся в нуль при z=0, z=L;  $Qv=\tilde{b}v$ .

Перейдем к вопросу устойчивости разностных схем (4), (5) по начальным данным. Для этого введем гильбертово пространство Н комплекснозначных функций, заданных на  $\Omega_h$  и равных нулю при z=0, z=L.

Пусть  $(v,y)=\sum hv\bar{y}, \|v\|=\sqrt{(v,v)}$  — соответственно скалярное произве-

дение и норма в H, черта означает комплексное сопряжение.

Будем исследовать устойчивость в энергетическом пространстве  $H_D$ , т. е. схема устойчива, если  $(\hat{Dv}, \hat{v}) \leq (v, v)$ , где D — некоторый самосопряженный неотрицательный оператор.

Рассмотрим сначала уравнение (4), которое перепишем в виде

$$Bv_r + Av = 0 \tag{6}$$

с операторами  $B=2ik_0E+0.5\tau(\Lambda+\tilde{b}E)$ ,  $A=\Lambda+\tilde{b}E$ . Так как Im(A)= $=(A-A^*)/(2i)=\tilde{v}(r,z)E$ , то  ${\rm Im}(A)>0$  и, следовательно, оператор  $A^{-1}$ существует. Поэтому из (6) следует

$$\widetilde{B}v_r+\widetilde{A}v=0,$$
 (7) где  $\widetilde{B}=2ik_0A^{-1}+0,5\tau E,\ \widetilde{A}=E.$ 

Оператор  $\overline{A}$  самосопряжен и положительно определен. Это свойство позволяет воспользоваться необходимым и достаточным условием устойчивости схемы (7) в  $H_{\overline{A}}$  [10]:

Re 
$$\widetilde{B} \ge 0.5\tau \widetilde{A}$$
, Re  $\widetilde{B} = 0.5(\widetilde{B} + \widetilde{B}^*)$ . (8)

С учетом выражений  $\text{Re } \widetilde{B} = 0.5\tau E - 2k_0 \, \text{Im}(A^{-1}), \, \text{Im}(A^{-1}) = (A^{-1} - A^{-1})/(2i)$  операторное неравенство (8) принимает вид  $-2k_0 \, \text{Im}(A^{-1}) \ge 0$ , которое выполняется. Действительно, используя замену  $w = A^{-1}v$ , имеем

$$((\operatorname{Im} A^{-1})v, v) = -0.5i[(w, Aw) - (Aw, w)] =$$
  
=  $-\operatorname{Im}(Aw, w).$ 

Таким образом, доказана

Теорема 1. Разностная схема (4) безусловно устойчива по начальным данным.

Рассмотрим разностную схему повышенного порядка точности (5), которую запишем в канонической форме:

$$Bv_r + Av = 0, \ v^0 = u_0(z)$$
 (9)

с несамосопряженными операторами

$$A = \Lambda + \left(E + \frac{h^2}{12}\Lambda\right)Q$$
,  $B = 0.5\tau A + 2ik_0\left(E + \frac{h^2}{12}\Lambda\right)$ .

Для этой схемы получим условие устойчивости, исходя из требования выполнения операторного неравенства  $S^*S \leq E$ , означающего, что норма оператора перехода S в уравнении  $\hat{v} = (E - \tau B^{-1}A)v = Sv$  не превосходит единицы.

После преобразований неравенство  $S^*S \leqslant E$  принимает вид

$$AB^* + BA^* \geqslant \tau AA^*. \tag{10}$$

Если учесть, что

$$AB^*=0.5\tau AA^*-2ik_0AD, \quad D=E+\frac{h^2}{12}\Lambda,$$

$$BA^*=0.5\tau AA^*+2ik_0DA^*$$

то из (10) следует  $4k_0 \text{ Im}(AD) \ge 0$ .

Принимая во внимание перестановочность операторов  $\Lambda$  и D, последнее неравенство может быть записано в виде  $4k_0D(\operatorname{Im} \tilde{b}E)D\geqslant 0$ . Это неравенство выполняется, так как D>0,  $\operatorname{Im} \tilde{b}\geqslant 0$ . В результате получим, что  $\|S\|\leqslant 1$ . Тем самым доказана

Теорема 2. Разностная схема (5) является безусловно устойчивой

по начальным данным.

Рассмотрим задачу отыскания акустического поля в неоднородной области с переменной плотностью ρ(r, z), где ρ(r, z) — заданная функция. В этом случае акустическое давление описывается уравнением

$$\rho \operatorname{div}\left(\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p\right) + \left(\frac{\omega}{c(r,z)}\right)^{2} p = 0,$$

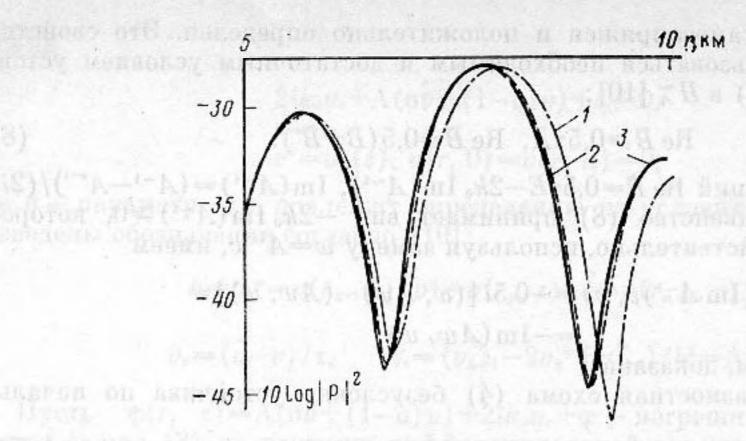
которое с помощью замены  $v\!=\!p/\sqrt{\rho}$  преобразуется в уравнение Гельм-гольца

$$\Delta v + k_0^2 n^2 (r, z) v = 0 \tag{11}$$

с коэффициентом преломления вида

$$n^{2}(r,z) = \left(\frac{c_{0}}{c(r,z)}\right)^{2} + \frac{1}{2k_{0}^{2}} \left[\frac{\Delta \rho}{\rho} - \frac{3}{2} \left(\frac{|\operatorname{grad} \rho|^{2}}{\rho}\right)^{2}\right].$$

Полагая в (11)  $v=H_0^{(1)}(k_0r)u(r,z)$  и используя стандартную методику, приходим к параболическому волновому уравнению для неоднород-



Зависимость интенсивности поля от расстояния: 1 - подсчитанная по схеме (4); 2 - по схеме (5); 3 - точное решение

ной по плотности среды:

$$2ik_0\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+k_0^2(n^2(r,z)-1+iv(r,z))u=0.$$

Это уравнение отличается от уравнения (1) только выражением для коэффициента преломления.

Таким образом, разностные схемы (4), (5) могут быть также использованы и для расчета акустических полей в неоднородных по плот-

пости средах.

Представляет интерес сравнение эффективности разностных схем (4), (5) с помощью численного эксперимента. В качестве модельного примера рассмотрим краевую задачу для уравнения Гельмгольца в однородной области, имеющую точное решение. В этом случае решение уравнения Гельмгольца, удовлетворяющее нулевым граничным условиям при z=0, z=L, представимо в виде суммы нормальных мод [1]:

$$p_{M}(r,z) = \sum_{m=1}^{M} a_{m} \varphi_{m}(z) H_{0}^{(1)}(\xi_{m}r), \qquad (12)$$

где M — количество учитываемых распространяющихся мод,  $\varphi_m(z) = \sin(m\pi z/L)$ ,  $\xi_m = \sqrt{k_0^2 - (m\pi/L)^2}$ . При  $a_m = i\sin(m\pi z_s/L)$  выражение (12) определяет с точностью до постоянного сомножителя поле точечного гармонического источника с координатами в точке  $(0, z_s)$ .

Некоторые результаты численных экспериментов при L=300 м,  $\omega==200\pi$  Гц,  $z_s=200$  м,  $r_0=5000$  м,  $k_0=0.4139$ ,  $u_0(z)=p_M(r_0,z)/H_0^{(1)}(k_0r_0)$  представлены в виде графиков, иллюстрирующих зависимость интенсив-

ности поля  $10 \log |p|^2$  от расстояния на фиксированной глубине.

На рисунке показана зависимость интенсивности поля на глубине 90 м, подсчитанная при h=15 м,  $\tau=22{,}5225$  м и M=5, что соответствует максимальному углу распространения 7,3°. При реализации (4), (5) исполь-

зован метод прогонки.

Анализ результатов показывает, что разностная схема повышенного порядка точности имеет значительное преимущество по сравнению со схемой (4). Особенно отчетливо это преимущество проявляется на грубой сетке по вертикальному направлению, что особенно важно, так как количество узлов по глубине существенно влияет на время вычислений. Для сравнения отметим, что максимальная относительная погрешность приближенного решения по схеме (5) не превосходит 2%. Представление о поведении относительной погрешности решения по схеме (4) можно составить непосредственно из графика. Легко видеть, что в этом случае погрешность решения из-за сдвига фазы растет по мере продвижения по трассе и ее максимальное значение составляет около 20%.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бреховских Л. М., Лысанов Ю. П. Теоретические основы акустики океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1982. 264 с.

2. Тапперт Ф. Д. Метод параболического уравнения // Распространение волн в подводной акустике. М.: Мир, 1980. С. 180-226.

3. Завадский В. Ю. Метод конечных разностей в волновых задачах акустики. М.: Наука, 1982. 272 с.

4. Завадский В. Ю., Поварнина Н. П. Точность разностных схем в волновых задачах // Вопросы судостроения. Сер. Акустика, 1989. Вып. 4.

5. Гладкий А. В. Решение волновых уравнений в неоднородных областях // Докл. АН УССР. Сер. А. 1987. № 1. С. 18—21.

6. Гладкий А. В. О решении волновых уравнений явным разностным методом // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 1. С. 37-42.

7. Lee D., Botseas G., Papadakis J. S. Finite-difference solution to the parabolic wave equation // J. Acoust. Soc. Amer. 1981. V. 70. № 3. P. 795-800.

8. Lee D., McDaniel S. T. Ocean acoustic propagation by finite difference methods. Oxford: Pergamon Press, 1988.

9. Schultz M. H., Lee D. Computational ocean acoustics. Oxford: Pergamon Press, 1985. 10. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973. 416 с.

Институт кибернетики им. В. М. Глушкова Академии наук УССР Поступила в редакцию 24.02.89

### A.V. Gladkii

# NUMERICAL SIMULATION OF ACOUSTIC FIELDS IN INHOMOGENEOUS DOMAINS

The problem of a numerical simulation of acoustic processes in inhomogeneous domains is considered. Second and high orders implicit difference schemes for a solution of wave parabolic equations are suggested. Absolute stability of difference schemes is proved and results of numerical experiments are presented.

вы долинаконовия отомация создання виде отомания виД . (hel-) для здин

(A) Produce place of (a) Discoplant [45] to the consequence of the con

(6) (p-p) soo reg (6, f = 1, 25 ( -1 + 1) (2) soo (p, 3), N = (5) 5 -40 (0)

are of the first of the second of the second

verenus except a spacely to agree of the constitute per sentence of the second states of the second second

MENTAL PRINCE AND AND REPORT AND PROPERTY OF THE PROPERTY OF T

антикова дережнова, в принавания принавания в принавания в принавания в принавания в принавания в принавания в