

УДК 624.07 : 534.1

© 1990 г.

С. А. Рыбак, Ю. И. Скрынников

УЕДИНЕННАЯ ВОЛНА В ТОНКОМ СТЕРЖНЕ
ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

В работе получено уравнение, описывающее распространение нелинейных волн продольной деформации в стержне постоянной кривизны. Найдено его решение в виде уединенной стационарной волны с двумя симметрично расположенными фронтами.

Вопросам распространения нелинейных упругих волн в прямолинейных стержнях посвящен ряд работ (см., например, [1, 2] и цитируемую там литературу). В работе [2] выведено нелинейное уравнение для волны продольной деформации в тонком стержне. Стационарные решения этого уравнения являются следствием баланса между квадратичной нелинейностью гидродинамического типа и дисперсией вида

$$\omega^2 = c_0^2 k^2 - \frac{v^2 a^2}{2} (\omega^2 - c_1^2 k^2) k^2, \quad (1)$$

где c_0 и c_1 — скорости продольной и сдвиговой линейных волн, $v = \lambda(\lambda + 2\mu)^{-1}$; a — радиус поперечного сечения стержня.

В том случае, если стержень не прямой, а изогнут в дугу радиуса R , дисперсионное уравнение (1) следует дополнить еще одним членом [3]

$$\omega^2 = c_0^2 k^2 - \frac{v^2 a^2}{2} (\omega^2 - c_1^2 k^2) k^2 + \frac{c_0^2}{R^2}.$$

Добавка к уравнению (1), обусловленная кривизной стержня, в ряде случаев (например, когда $ak \ll 1$ или $kR \ll 1$) может оказаться определяющей. Поэтому в длинноволновом приближении имеет смысл ограничиться дисперсией Клейна — Гордона

$$\omega^2 = c_0^2 k^2 + \frac{c_0^2}{R^2}. \quad (2)$$

Восстановив по дисперсионному уравнению (2) линейную часть и добавив к ней нелинейный квадратичный член [2], получаем нелинейное уравнение Клейна — Гордона

$$u_{tt} - c_0^2 u_{xx} + \frac{c_0^2}{R^2} u = \frac{\beta}{2\rho_0} (u^2)_{xx}, \quad (3)$$

описывающее распространение волн конечной амплитуды в искривленном стержне. Здесь β и ρ_0 — коэффициент нелинейности и плотность материала, а u — x -производная (ось x направлена вдоль стержня) продольной компоненты вектора смещения, т. е. продольная деформация. Следует отметить, что уравнение (3) было ранее получено в [4] для описания внутренних волн во вращающемся океане и впоследствии использовалось в ряде работ применительно к волнам различной природы.

Цель работы — нахождение стационарных решений в виде уединенных волн, т. е. решений вида $u = u(\eta)$ ($\eta = x - Vt$, $V = \text{const}$ — скорость волны), конечных при всех значениях η и обращающихся в нуль вместе с производной v_η при $\eta \rightarrow \pm\infty$. После однократного интегрирования в классе стационарных решений нетрудно получить

$$\frac{1}{2} (v_\eta)^2 - \frac{1}{2R^2(1 - V^2/c_0^2)} \frac{v^2 - v^3}{(3v - 2)^2} = 0. \quad (4)$$

Здесь введена новая переменная v , связанная с u соотношением

$$u = -\frac{3}{2} \left(1 - \frac{V^2}{c_0^2} \right) \frac{\rho_0 c_0^2}{\beta} v. \quad (5)$$

Постоянная интегрирования в (4) положена равной нулю согласно условию одновременного обращения в нуль v и v_η при $\eta \rightarrow \pm\infty$.

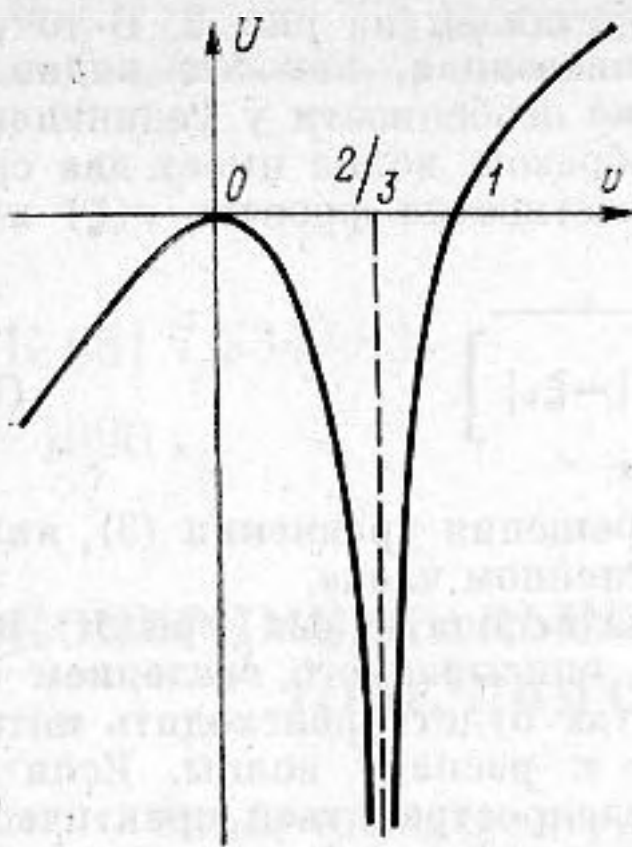


Рис. 1. Вид потенциала $U(v)$ ($V < c_0$)

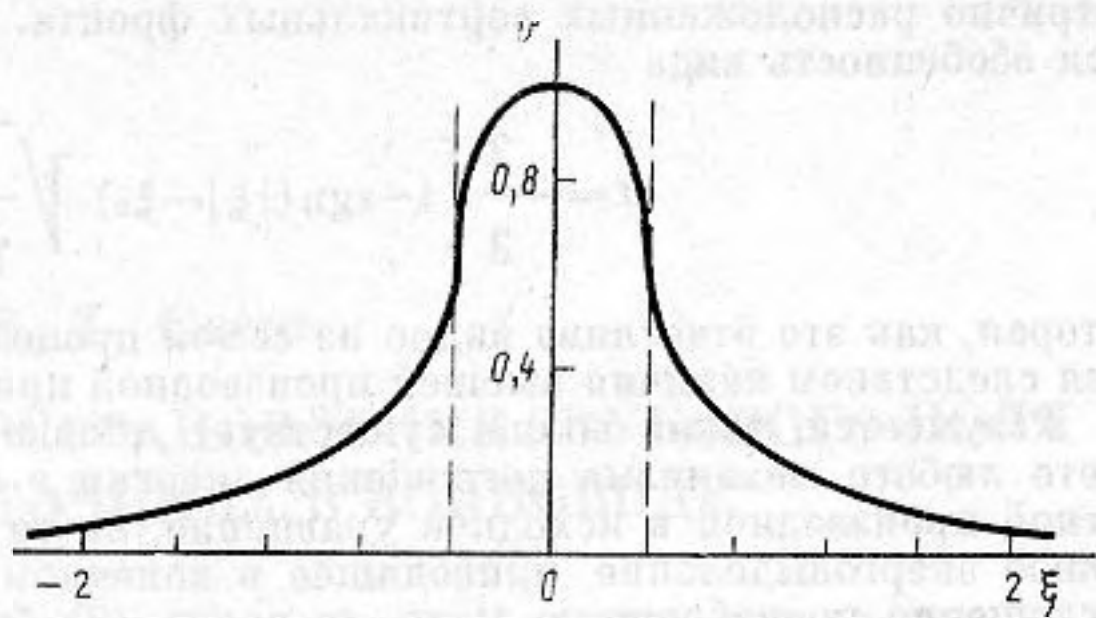


Рис. 2. Профиль уединенной волны (9)

Уравнение (4) допускает наглядную механическую интерпретацию. Это не что иное, как запись закона сохранения энергии при движении частицы единичной массы в потенциале

$$U(v) = - \frac{1}{2R^2(1-V^2/c_0^2)} \frac{v^2 - v^3}{(3v-2)^2}.$$

При этом искомое решение уравнения в виде уединенной волны оказывается траекторией движения частицы с равной нулю полной энергией в потенциальной яме между двумя точками поворота $v=0$ и $v=1$ (см. рис. 1). Действительно, период такого движения [4]

$$H = \sqrt{2} \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{-U(v)}}$$

бесконечен, что соответствует следующей траектории частицы: выйдя в момент $\eta = -\infty$ из точки $v=0$, она через бесконечный промежуток «времени» достигнет точки $v=1$, после чего возвратится в исходное положение $v=0$ при $\eta = +\infty$. Очевидно, эта траектория симметрична: $v(-\eta) = v(\eta)$ (здесь и далее выбран отсчет координаты таким образом, что $v(0) = 1$); кроме того,

$$\frac{dv}{d\eta} = - \left| \frac{dv}{d\eta} \right| \operatorname{sgn} \eta. \quad (6)$$

Привлечение механической аналогии позволило убедиться в существовании и единственности бегущей уединенной волны, описываемой уравнением (3), и наложить ограничение на ее скорость: $V < c_0$ (в противном случае отсутствует потенциальная яма и связанное с ней финитное движение частицы).

Теперь определим профиль искомой уединенной волны. Заменяя независимую переменную на

$$\xi = \eta/R \sqrt{1 - \frac{V^2}{c_0^2}}, \quad (7)$$

представим уравнение (4) в более удобном для его решения виде

$$\left| \frac{dv}{d\xi} \right| = \frac{v\sqrt{1-v}}{\left| \frac{3}{2}v-1 \right|}; \quad 0 \leq v \leq 1. \quad (8)$$

Проинтегрировав (8) с учетом (6), получаем решение:

$$|\xi| = \begin{cases} 3\sqrt{1-v} + \ln \frac{1-\sqrt{1-v}}{1+\sqrt{1-v}}; & |\xi| < \xi_0; \quad \frac{2}{3} < v < 1 \\ 2\xi_0 - 3\sqrt{1-v} - \ln \frac{1-\sqrt{1-v}}{1+\sqrt{1-v}}; & |\xi| > \xi_0; \quad 0 < v < \frac{2}{3}, \end{cases} \quad (9)$$

где $\xi_0 = \sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3}) \approx 0,42$. График функции $v(\xi)$ представлен на рис. 2. В точках $\xi = \pm \xi_0$ функция принимает значение $v = 2/3$, а ее производная, как это видно из уравнения (8), обращается в бесконечность (на наличие особенности у уединенного решения уравнения (3) было указано в [4]). Таким образом, волна имеет два симметрично расположенных вертикальных фронта. В окрестностях фронтов $v(\xi)$ имеется особенность вида

$$v = \frac{2}{3} \left[1 - \operatorname{sgn}(|\xi| - \xi_0) \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} ||\xi| - \xi_0|} \right], \quad (10)$$

которая, как это отчетливо видно из самой процедуры решения уравнения (3), является следствием наличия высшей производной при нелинейном члене.

Разумеется, такая волна существует только в бездиссипативных средах: при учете любого механизма поглощения энергии в среде, описываемого введением нечетной производной в исходное уравнение, на ее фронтах будет происходить интенсивное энерговыделение, приводящее в конечном счете к распаду волны. Если же поглощение пренебрежимо мало, то волна (9) будет распространяться практически без изменения своей формы только в течение конечного промежутка времени, определяемого декрементом затухания возмущений в среде.

Несмотря на то, что профиль волны (9) задан неявно, нетрудно установить характер функциональной зависимости некоторых его участков. В окрестности вершины волны ($|\xi| \ll 1$, $1 - v \ll 1$) ее профиль параболический $v = 1 - \xi^2$. Спадающие на бесконечности хвосты волны имеют ту же структуру, что и хвосты солитона Кортевега — де Фриза [5]

$$v = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{(|\xi| - 2\xi_0 - 3)}{2}}$$

Так же как и у солитона Кортевега — де Фриза, амплитуда A и ширина Δ волны (9) зависят от ее скорости V (см. (5) и (7)). Однако связь между амплитудой и шириной иная: $\Delta \sim A^{1/2}$.

Авторы благодарны Ю. А. Степанянцу за обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Островский Л. А., Сутин А. С.* Нелинейные упругие волны в стержнях // ПММ. 1977. Т. 41. № 3. С. 531–537.
2. *Самсонов А. М.* О существовании солитонов продольной деформации в бесконечном нелинейном упругом стержне // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299. № 5. С. 1083–1086.
3. *Исакович М. А., Комарова Л. Н.* Продольно-изгибные волны в тонком стержне // Акуст. журн. 1967. Т. 13. № 4. С. 579–583.
4. *Островский Л. А.* Нелинейные внутренние волны во вращающемся океане // Океанология. 1978. Т. 18. № 2. С. 181–191.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика. М.: Наука, 1973. 207 с.
6. *Ньюэлл Э.* Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989. 323 с.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
30.08.89

S. A. Rybak, Yu. I. Skrynnikov

A SOLITARY WAVE IN A UNIFORMLY CURVED THIN ROD

An equation describing propagation of nonlinear waves of longitudinal deformation in a uniformly curved rod is obtained. A solution in a form of a solitary wave is found. The characteristic feature of this solution appears to be two symmetric vertical fronts. A structure of the fronts as well as a wave profile vanishing at infinity are evaluated. The found solitary wave is characterized by a following relation between a wave width Δ and its amplitude A : $\Delta \sim A^{1/2}$.