АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 36 1990 Вып. 5

УДК 62-135:534

© 1990 г.

В. Л. Окулов

О ВЛИЯНИИ ФОРМЫ РЕЗОНАТОРА ГЕЛЬМГОЛЬЦА НА ЗНАЧЕНИЕ НИЗШЕЙ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

В точной постановке решена задача о собственных акустических колебаниях в резонаторах Гельмгольца с тонкими стенками. Определены обобщенным методом дискретных особенностей собственные частоты для резонаторов с разными формами резонансных полостей (цилиндр, улитка, прямоугольник). Проведено их сравнение с результатами расчета по приближенным теориям.

Открытые резонаторы (полость с жесткими стенками, сообщающаяся с внешним пространством через отверстие) были впервые рассмотрены Гельмгольцем еще в 1860 г. Впоследствии существенные, хотя и приближенные результаты по определению их собственных частот получил Рэлей [1]. В настоящее время были предприняты попытки более точного исследования резонаторов Гельмгольца. Наиболее полно построена теория для резонаторов в виде жесткой сферы с круглым отверстием [2, 3] и кругового цилиндра со щелью [3, 4], а также рассмотрены предельные случаи, когда характерный размер отверстия является малой величиной [5]. Однако детальное изучение зависимости низшей собственной частоты от формы резонатора, конечного размера отверстия, длины горла пока остается мало изученным. В данной работе исследованы собственные частоты плоских резонаторов с различными формами резонансной полости (дуга окружности, логарифмическая спираль, прямоугольник) (рис. 1). Проведено их сопоставление между собой и с результатами одномерной теории [6], до сих пор широко применяемой в инженерных расчетах. Определены рамки применимости последней.

Рассмотрим точную постановку задачи определения собственных частот для плоского резонатора Гельмгольца с бесконечно тонкими стенками. Пусть Ω — полость резонатора объема V с границей $\partial\Omega$, а $\partial\Sigma^+\cup\partial\Sigma^-$ — стенки горла резонатора постоянной ширины $2d$ и длины L (примеры на рис. 1). Тогда амплитуда потенциала скорости собственных акустических колебаний удовлетворяет [4]: вне $\partial\Omega\cup\partial\Sigma$ — однородному уравнению Гельмгольца $\Delta u+k^2u=0$, $k=\omega R/a$, записанному в безразмерных координатах, где ω — частота, a — скорость звука, R — характерный размер области; на границах области $\partial\Omega\cup\partial\Sigma$ — однородным условиям Неймана (отражения); на бесконечности — обобщенным условиям излучения, гарантирующим отсутствие приходящих из бесконечности волн; на острых кромках резонатора — условию ограниченности энергии. Собственным акустическим колебаниям будут соответствовать такие значения собственного параметра k на всей комплексной плоскости, для которых имеет нетривиальное решение однородная краевая задача. Вещественная часть k будет определять приведенную частоту $k'=\omega R/a$ собственных акустических колебаний около открытого резонатора [4].

В такой строгой постановке задача решалась лишь для областей канонического вида (например, для дуги окружности [3, 4]). Это связано с тем, что примененные к ее решению методы задачи Римана — Гильберта [3] и частичных областей [4] существенно опираются на возможность представления решения в подобластях с помощью метода разделения переменных. Однако наличие горла и неканоничность границы полости зна-

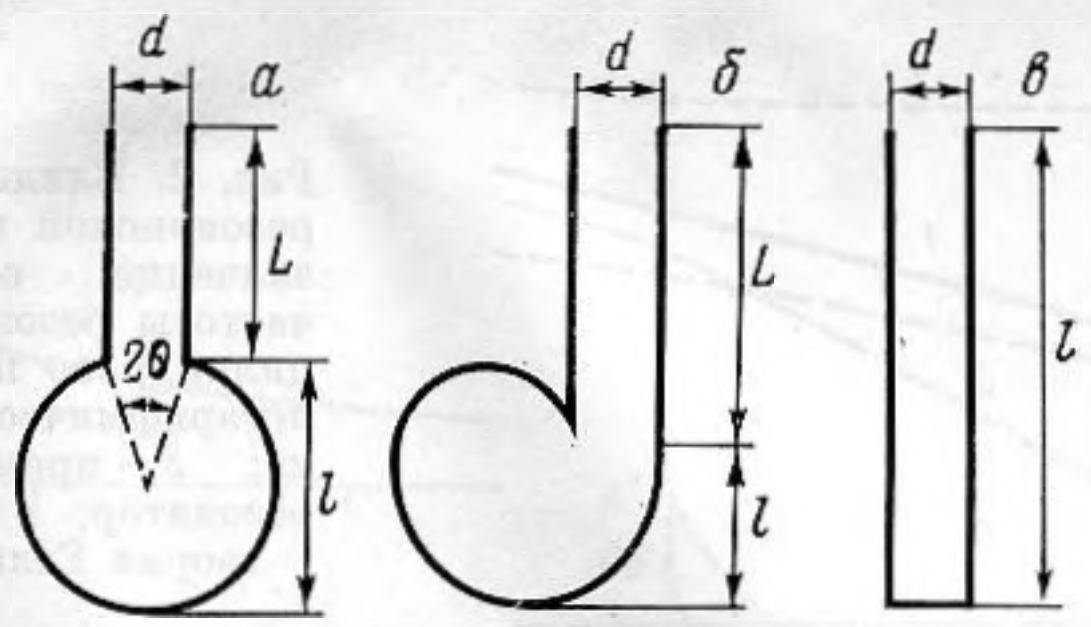

Рис. 1. Формы резонаторов с полостями в виде: *а* – дуги окружности; *б* – логарифмической спирали; *в* – прямоугольника

чительно затрудняет применение указанных методов, делает их мало конструктивными и практически нереализуемыми на ЭВМ. Существенно расширить класс резонаторов, для которых удается получить решение задачи в точной постановке, позволяет метод интегральных уравнений. Он основан на возможности получения сингулярного интегрального уравнения, эквивалентного краевой задаче [7]. В случае достаточно гладкой границы для численного решения интегрального уравнения оказалось весьма эффективным применение обобщенного метода дискретных особенностей, предложенного в [7]. Для рассматриваемых резонаторов отличие постановки заключается в том, что граница области является кусочно-гладкой. Однако в соответствии с хорошо развитой теорией сингулярных интегральных уравнений [8] в силу условий ограниченности энергии на острых кромках может быть получено аналогичное [7] сингулярное интегродифференциальное уравнение

$$\int\limits_{\partial\Omega\cup\partial\Sigma} \{\gamma(\zeta)\mathrm{K}_0(\zeta, z)+\Gamma(\zeta)\mathrm{K}_1(\zeta, z)\}dS_\zeta=0$$

$$\frac{\partial\Gamma(\zeta)}{\partial\tau_\zeta}=\gamma(\zeta); \quad \Gamma(\zeta^*)=0; \quad z\in\partial\Omega\cup\partial\Sigma;$$

(τ_ζ – орт касательной к $\partial\Omega\cup\partial\Sigma$; ζ^* – острая кромка $\partial\Sigma$) с ядром вида

$$\mathrm{K}_0=\sin(\psi-\varphi+\beta(\varphi))\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}+\cos(\psi-\varphi+\beta(\varphi))\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\psi}$$

$$\mathrm{K}_1=\cos(\psi-\beta(\psi)-\varphi+\beta(\varphi))k^2\Phi,$$

где (ρ, ψ) и (r, φ) – полярные координаты точек ζ и $z\in\partial\Omega\cup\partial\Sigma$; β – угол между радиусом-вектором и нормалью точки поверхности; $\Phi=H_0^{(1)}(k|z-\zeta|)/4i$ – фундаментальное решение уравнения Гельмгольца. Таким образом, в отличие от [7] в определение ядра интегрального уравнения входит кусочно-непрерывная функция β, которая терпит разрыв первого рода в точках нарушения гладкости границы. Это обстоятельство накладывает некоторые ограничения на реализацию численного метода исследования интегрального уравнения. Для обеспечения нерегулярного характера поведения решения в окрестности точек, в которых нарушается гладкость границы, разбиение контура проводилось так, чтобы этим точкам соответствовали дискретные особенности, а значение угла β в них определялось своим средним значением. Таким образом, применение метода дискретных особенностей в случае кусочно гладких границ приводит к неоднозначности определения угла β в точках нарушения гладкости.

Было проведено численное исследование влияния выбора угла β. Для рассчитываемых резонансных структур оно оказалось незначительным. Это объясняется тем, что различный выбор угла β соответствует различным способам локального сглаживания контура резонатора. А как извест-

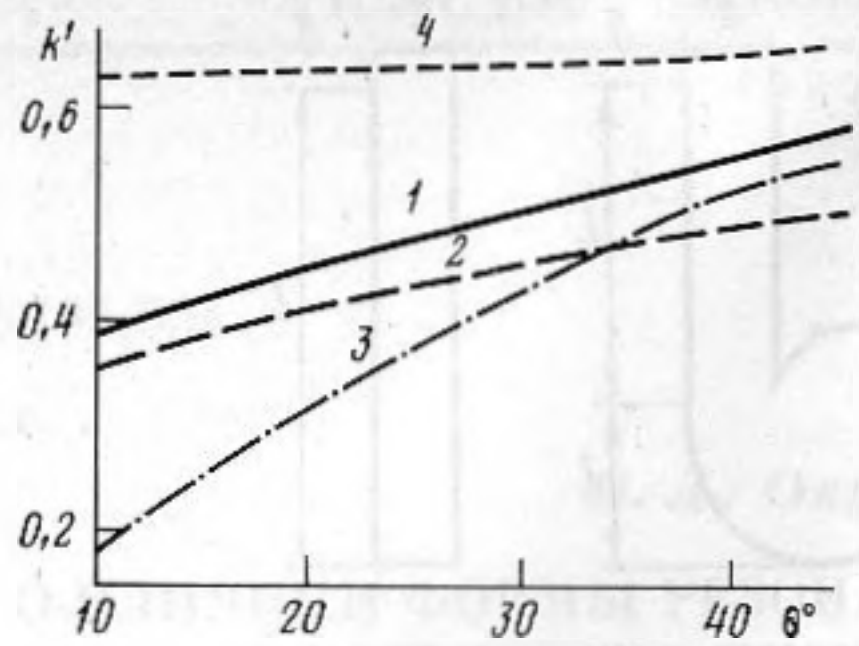

Рис. 2. Влияние формы резонансной полости на значение собственной частоты резонатора: *1* – цилиндр со щелью; *2* – логарифмическая улитка; *3* – прямоугольный резонатор; *4* – расчет по теории Гельмгольца

но, незначительное изменение формы резонатора приводит к малому изменению его собственных частот.

Описанный выше метод расчета позволил исследовать собственные частоты резонаторов с различной формой границы полостей: цилиндра со щелью с образующей по дуге окружности (рис. 1, *а*), улитки с образующей по отрезку логарифмической спирали (рис. 1, *б*) и прямоугольной полости (рис. 1, *в*).

Цель исследования — определение характера влияния формы резонансной полости на значение низшей собственной частоты, поведения собственной частоты резонаторов различной формы при увеличении длины горла, а также определение рамок применимости одномерных теорий.

На рис. 2 приведены значения низшей собственной частоты для резонансных полостей без горла ($L=0$). Резонансные частоты улитки (штриховая линия) и прямоугольной полости (штрихпунктирная линия) сравниваются с частотами цилиндра со щелью в зависимости от ее раствора (угол $2\theta°$). При сопоставлении требовалось равенство объемов полостей V и размеров щелей $2d$. Анализируя результаты, можно сделать вывод, что форма полости существенно влияет на резонансную частоту. Так, при малых щелях, когда цилиндр слабо отличается от улитки, наблюдается минимальное отличие их резонансных частот. Аналогично и для прямоугольной полости: для больших щелей, когда она по форме мало отличается от квадрата, а тем самым и от цилиндра, также наблюдается минимальное различие их резонансных частот. Пунктирной линией на рисунке показано изменение собственной частоты, рассчитанное по теории резонаторов Гельмгольца [6]. Для щелей малых размеров здесь наблюдается не просто большое количественное, но и качественное различие. Действительно, при $d\to 0$ резонансная частота также должна стремиться к нулю, а по приближенной теории ее величина пропорциональна V^{-1}. В этом предельном случае наиболее точно поведение собственной частоты характеризуется асимптотической формулой, полученной в [5].

На рис. 3, *а—в* представлены результаты исследования влияния длины и ширины горла на собственные частоты цилиндра со щелью и улитки при совпадении объемов их резонансных полостей. Интересно отметить, что при увеличении длины горла L различие резонансных частот, связанное с разной формой полостей, исчезает. Наиболее просто этот факт можно объяснить, воспользовавшись электроакустической аналогией [6]. Действительно, пусть резонансная полость в виде цилиндра характеризуется емкостью $C_ц$, а полость в виде улитки — $C_у=C_ц+\delta$. Далее положим, что горло резонатора эквивалентно индуктивности $L_г$, которая пропорциональна его длине L. Записав в соответствии с [6] формулу для определения собственной частоты резонатора, получим

$$\omega_у=(C_у L_г)^{-1/2}=[(C_ц+\delta)L_г]^{-1/2}=\omega_ц(1-O(\delta L^{-1/2})).$$

Таким образом, отличие собственных частот для резонаторов с разной формой резонансной полости исчезает пропорционально $L^{-1/2}$.

В заключение проведено сопоставление значений собственных частот для резонатора с цилиндрической полостью, полученных с помощью различных методов расчета, при разных углах раствора щели. На рис. 4 по-

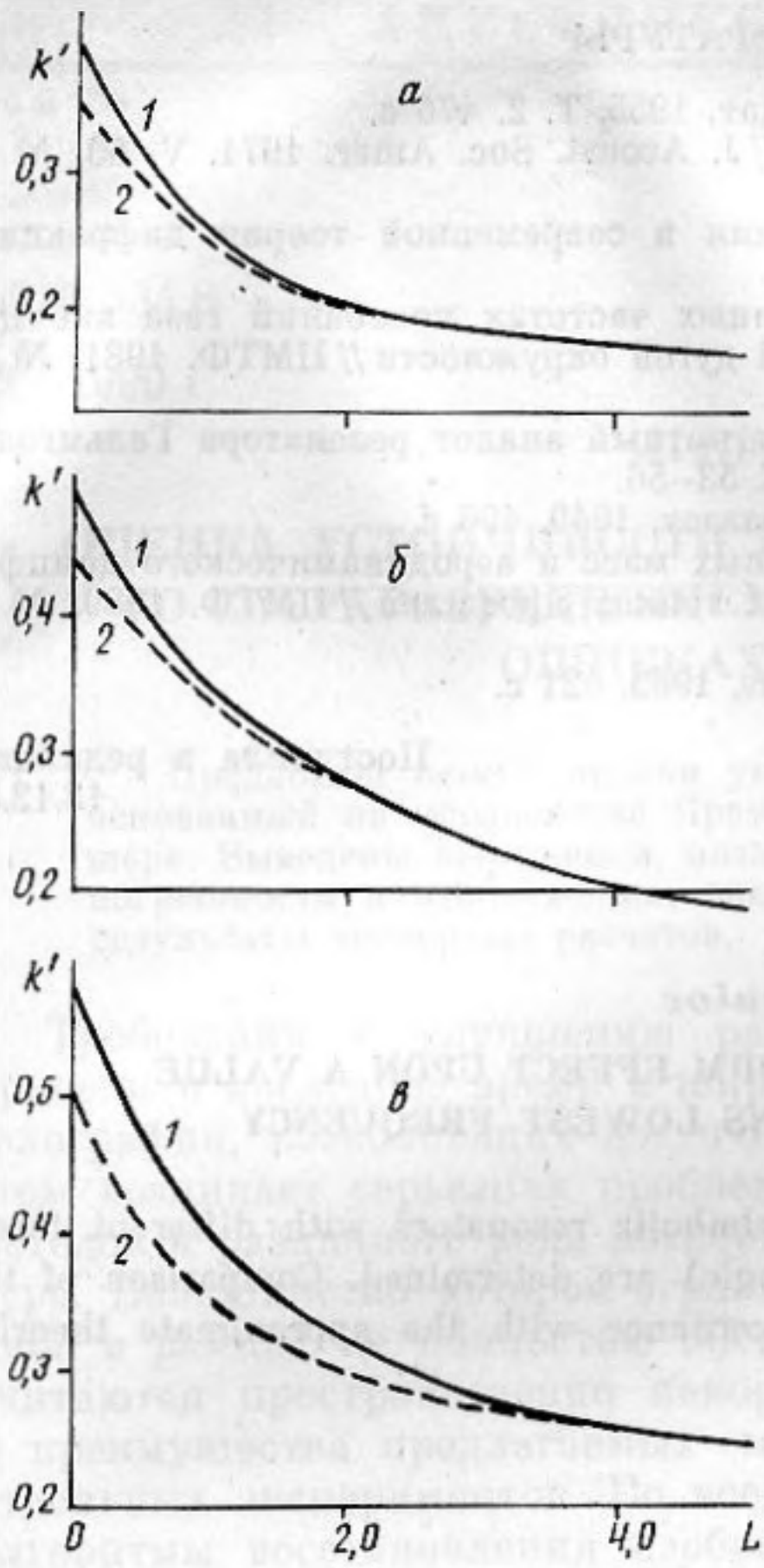

Рис. 3

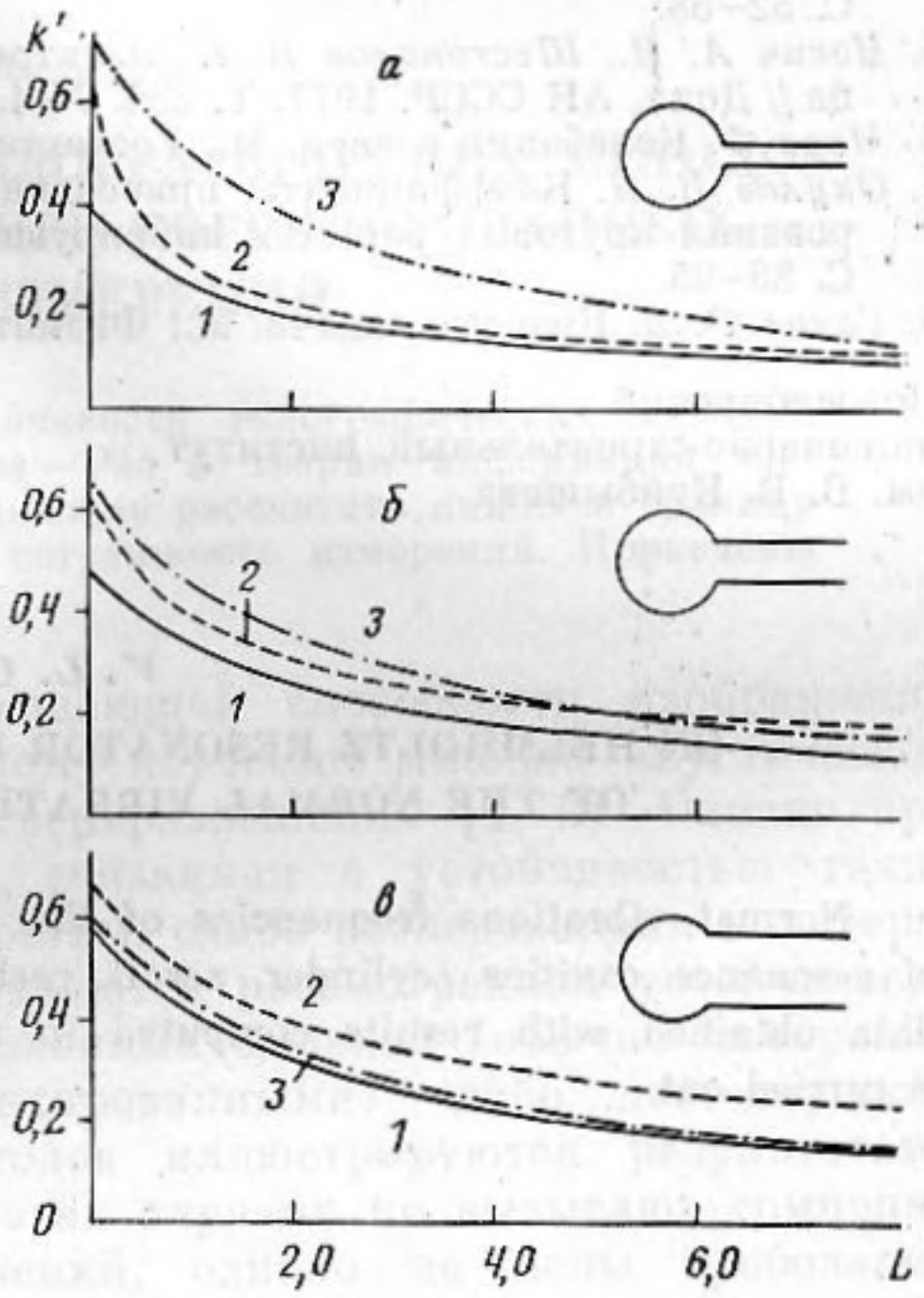

Рис. 4

Рис. 3. Влияние длины горла резонатора для цилиндрической (*1*) и спиральной (*2*) форм резонансной полости на собственные частоты резонаторов при различных размерах ширины горла: *а* – $d=0{,}2$; *б* – $d=0{,}5$; *в* – $d=0{,}7$

Рис. 4. Сравнение расчета собственных частот для резонатора с полостью в виде цилиндра методом дискретных особенностей (*1*), по приближенной теории резонатора Гельмгольца (*2*) и по одномерной теории трубы с открытым концом (*3*) при разных углах раствора щели: *а* – $\theta=9°$; *б* – $\theta=22{,}5°$; *в* – $\theta=45°$

казаны изменения собственных частот, рассчитанные методом дискретных особенностей, по приближенной теории резонатора Гельмгольца и по одномерной теории трубы с открытым концом [6]. В последнем случае за размер трубы $L_т$ принимается суммарный размер горла и резонансной полости $L+l$. Результаты показали, что в случае узкого горла (рис. 4, *а*) для достаточно широкого диапазона изменения параметра L (длины горла) результаты расчета собственных частот в точной постановке хорошо согласуются с результатами по приближенной теории Гельмгольца. В случае широкого горла (рис. 4, *в*) наоборот: лучшее соответствие дает приближенная теория для трубы с открытым концом. Для средних значений d (ширины горла, рис. 4, *б*) можно наблюдать переход, когда одна приближенная теория начинает предсказывать собственную частоту лучше другой. Фактически это означает, что для резонаторов с очень длинным горлом «гельмгольцевский» резонанс полностью описывается хорошо представляемым резонансом, соответствующим первой резонансной частоте в трубе с открытым концом.

Из проведенного анализа результатов можно сделать вывод, что наилучшее соответствие к точному значению дает расчет по той приближенной теории, которая дает меньшее значение собственной частоты. Это замечание и определяет критерий выбора приближенной теории для расчетов собственных частот резонаторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рэлей Дж.* Теория звука. М.; Л.: Гостехиздат, 1955. Т. 2. 476 с.
2. *Miles I. W.* Scattering by a spherical cap // J. Acoust. Soc. Amer. 1971. V. 50. № 3. Pt 2. P. 892–903.
3. *Шестопалов В. П.* Сумматорные уравнения в современной теории дифракции. Киев: Наук. думка, 1983. 252 с.
4. *Курзин В. Б., Сухинин С. В.* О собственных частотах колебаний газа вне цилиндрической поверхности, образованной дугой окружности // ПМТФ. 1981. № 1. С. 52–58.
5. *Носич А. И., Шестопалов В. П.* Электромагнитный аналог резонатора Гельмгольца // Докл. АН СССР. 1977. Т. 234. № 1. С. 53–56.
6. *Морз Ф.* Колебания и звук. М.: Гостехтеориздат, 1949. 496 с.
7. *Окулов В. Л.* Коэффициенты присоединенных масс и аэродинамического демпфирования круговых решеток вибрирующих тонких профилей // ПМТФ. 1989. № 3. С. 88–95.
8. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963. 421 с.

Новосибирский
инженерно-строительный институт
им. В. В. Куйбышева

Поступила в редакцию
13.12.89

V. L. Okulov

ON HELMHOLTZ RESONATOR FORM EFFECT UPON A VALUE OF THE NORMAL VIBRATIONS LOWEST FREQUENCY

Normal vibrations frequencies of the Helmholtz resonators with different forms of resonance cavities (cylinder, scroll, rectangle) are determined. Comparison of the data obtained with results computed in accordance with the approximate theories is carried out.