АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 37 1991 Вып. 1

УДК 534.26

© 1991 г.

В. В. Крылов, А. В. Шанин

ВЛИЯНИЕ УПРУГОЙ АНИЗОТРОПИИ НА СКОРОСТИ КЛИНОВЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН

В рамках геометро-акустического подхода проанализировано распространение антисимметричных клиновых акустических волн в остроугольном твердом клине, выполненном из анизотропного материала. Получено аналитическое выражение для скоростей клиновых волн.

Локализованные квазиизгибные моды, распространяющиеся вдоль ребер твердых клиньев, или антисимметричные клиновые акустические волны [1, 2], представляют значительный интерес для акустоэлектроники [3, 4], а также для неразрушающего контроля изделий специфической формы [5] — турбинных лопаток, гребных винтов, рулей, высоты самолетов и т. д. В общем случае произвольных углов раскрыва клина θ эти волны могут быть рассчитаны лишь численными методами даже для клиньев, изготовленных из изотропных материалов [3, 6]. Однако при малых углах раскрыва клина θ возможно приближенное аналитическое описание характеристик клиновых волн, основанное, в частности, на методах геометрической акустики [5, 7—9]. Как отмечалось в работе [8], геометро-акустический, или лучевой, подход может быть легко распространен и на случай клиньев из анизотропных материалов, если известны зависимости фазовых скоростей изгибных волн в тонких кристаллических пластинках от направления распространения вдоль поверхности (см., например, [10]).

В настоящей работе с помощью этого подхода проанализируем влияние слабой упругой анизотропии на скорости антисимметричных клиновых волн. Заметим, что до настоящего времени численные расчеты характеристик клиновых волн в анизотропных кристаллах проводились лишь в отдельных кристаллографических направлениях [4, 11] и для двух низших мод [4], что не позволяет установить какие-либо общие закономерности, связанные с влиянием анизотропии. В отличие от упомянутых работ, рассмотрим случай произвольной кристаллической анизотропии и произвольное число распространяющихся клиновых мод.

Согласно работе [8], скорости антисимметричных клиновых волн $c=\omega/\beta$ в анизотропных материалах могут быть определены из условия типа Бора — Зоммерфельда, которое в случае произвольной ориентации ребра клина относительно кристаллографических осей следует записать в общем виде

$$\Phi=\left(\int_0^{x_\text{п}}+\int_{x_\text{п}}^0\right)[k_a^2(x,\alpha)-\beta^2]^{1/2}\,dx=2\pi n, \qquad (1)$$

учитывающем возможное неравенство друг другу интегралов, соответствующих ходу луча от ребра ($x=0$) до точки поворота ($x=x_\text{п}$) и обратно. Здесь $k_a(x,\alpha)$ — локальное волновое число изгибной волны в кристаллической пластинке переменной толщины $h=x\theta$, зависящее от угла между вектором волновой нормали распространяющейся квазиплоской изгибной волны и ребром клина (см. рисунок), β — искомое волновое число клино-

вой волны, ω — круговая частота, $n=1, 2, 3\ldots$ Условие (1), очевидно, должно быть дополнено соотношением, связывающим угол α с β и k_a:

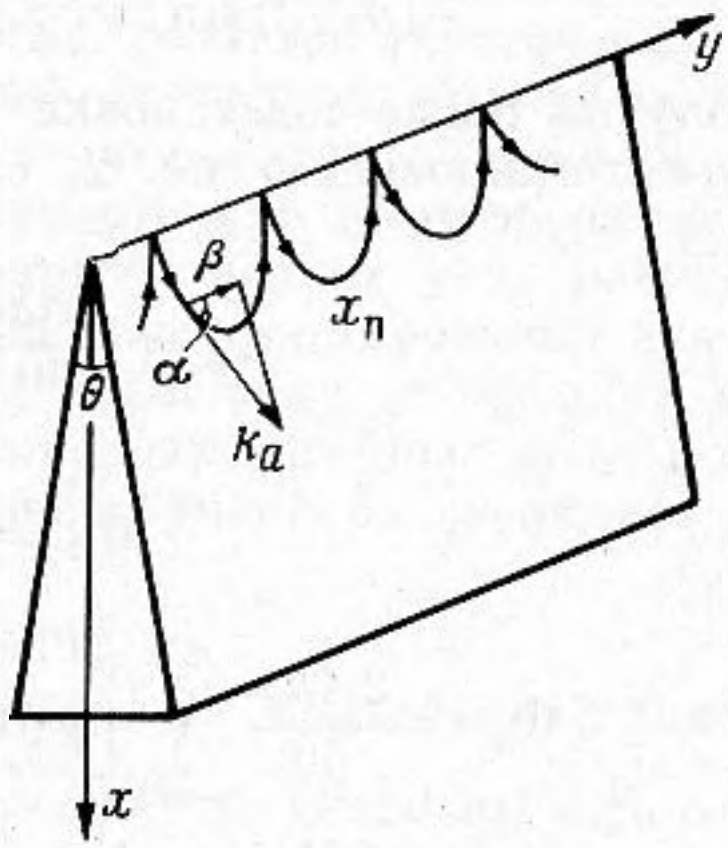
$$\beta=k_a(x, \alpha)\cos\alpha. \qquad (2)$$

Если известна зависимость $k_a(x, \alpha)$, то выражения (1) и (2) полностью определяют задачу нахождения скоростей антисимметричных клиновых волн в анизотропном клине в рамках геометро-акустического подхода.

Будем считать, что величина, обратная фазовой скорости изгибной волны в тонкой кристаллической пластинке, $c_a^{-1}(h, \alpha)$ (в дальнейшем для краткости будем называть ее обратной фазовой скоростью) описывается выражением

$$c_a^{-1}(h, \alpha)=c_a^{-1}(h, 0)\,[1+\varepsilon g(\alpha)], \qquad (3)$$

где $c_a(h, 0)=(c_p h\omega/A)^{1/2}$ — фазовая скорость плоской изгибной волны в направлении ребра клина ($\alpha=0$), $g(\alpha)$ — функция, описывающая угловую зависимость фазовой скорости изгибной волны и обладающая свойствами $g(0)=0$ и $|g(\alpha)|\leqslant 1$, ε — безразмерный положительный параметр, c_p — скорость квазипродольной плоской волны в тонкой пластинке в направлении $\alpha=0$, A — безразмерная константа, зависящая от типа симметрии кристалла (в изотропном случае $A=2\sqrt{3}$). Методика расчета зависимостей $g(\alpha)$ для конкретных кристаллов приведена, например, в работе [10]. В дальнейшем будем считать анизотропию слабой, т. е. будем полагать, что $\varepsilon\ll 1$. Такая ситуация является достаточно широко распространенной. В частности, условию $\varepsilon\ll 1$ удовлетворяют скорости изгибных волн в тонкой пластинке из ортотропного (ромбического) кристалла фторида магния-бария, вырезанной в плоскости, перпендикулярной одной из осей симметрии кристалла [10]. С учетом (3) и соотношения $h=x\theta$ выражение для локального волнового числа изгибных волн в пластине переменной толщины запишем в виде



Геометрия задачи

$$k_a(x, \alpha)=k_a(x, 0)\,[1+\varepsilon g(\alpha)], \qquad (4)$$

где $k_a(x, 0)=(Ak_p/\theta x)^{1/2}$ — волновое число изгибной волны в направлении $\alpha=0$, $k_p=\omega/c_p$ — волновое число квазипродольной волны в том же направлении.

Систему (1), (2), (4) будем решать методом возмущений, представляя входящие в нее величины в виде

$$\begin{gathered}\alpha=\alpha_0+\varepsilon\alpha_1+\varepsilon^2\alpha_2+\ldots,\\ g(\alpha)=g(\alpha_0)+\varepsilon g'(\alpha_0)\alpha_1\ldots,\\ k_a(x, \alpha)=k_a(x, 0)\,[1+\varepsilon g(\alpha_0)+\varepsilon^2 g'(\alpha_0)\alpha_1+\ldots],\\ \cos\alpha=\cos\alpha_0-\varepsilon\alpha_1\sin\alpha_0-\varepsilon^2(\alpha_2\sin\alpha_0+(\alpha_1^2/2)\cos\alpha_0)-\ldots,\\ \Phi=\Phi_0+\varepsilon\Phi_1+\varepsilon^2\Phi_2+\ldots\end{gathered} \qquad (5)$$

Подставляя (5) в (2) и (4), получим

$$\begin{gathered}k_a(x, 0)\,[\cos\alpha_0+\varepsilon(g(\alpha_0)\cos\alpha_0-\alpha_1\sin\alpha_0)+\varepsilon^2(\alpha_1 g'(\alpha_0)\cos\alpha_0-\\ -\alpha_1 g(\alpha_0)\sin\alpha_0-\alpha_2\sin\alpha_0-(\alpha_1^2/2)\cos\alpha_0)+\ldots]=\beta,\end{gathered} \qquad (6)$$

откуда после приравнивания членов при одинаковых степенях (соответственно при ε^0, ε^1, $\varepsilon^2\ldots$) следует

$$k_a(x,\ 0)\cos\alpha_0=\beta, \tag{7}$$
$$g(\alpha_0)\cos\alpha_0=\alpha_1\sin\alpha_0,$$
$$\alpha_1 g'(\alpha_0)\cos\alpha_0-\alpha_1 g(\alpha_0)\sin\alpha_0-\alpha_2\sin\alpha_0-(\alpha_1^2/2)\cos\alpha_0=0,$$
. . . . . .

Учитывая, что в формуле (1) $[k_a^2(x,\ \alpha)-\beta^2]^{1/2}=k_a(x,\ \alpha)\sin\alpha$, и представляя $k_a(x,\ \alpha)\sin\alpha$ в виде

$$k_a(x,\ \alpha)\sin\alpha=k_a(x,\ 0)[\sin\alpha_0+\varepsilon(g(\alpha_0)\sin\alpha_0+\alpha_1\cos\alpha_0)+\varepsilon^2(\alpha_2\cos\alpha_0-$$
$$-(\alpha_1^2/2)\sin\alpha_0+\alpha_1\cos\alpha_0 g(\alpha_0)+g'(\alpha_0)\alpha_1\sin\alpha_0)+\ldots], \tag{8}$$

получим после подстановки (8) в (1) и перехода от интегрирования по x к интегрированию по α_0 следующие выражения для Φ_0, Φ_1, $\Phi_2\ldots$:

$$\Phi_0=\frac{2Ak_p}{\beta\theta}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2\alpha_0\,d\alpha_0=\frac{Ak_p\pi}{\beta\theta},$$
$$\Phi_1=\frac{2Ak_p}{\beta\theta}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}g(\alpha_0)\,d\alpha_0, \tag{9}$$
$$\Phi_2=\frac{2Ak_p}{\beta\theta}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[g(\alpha_0)g'(\alpha_0)-\frac{1}{2}g^2(\alpha_0)\operatorname{ctg}\alpha_0\right]\operatorname{ctg}\alpha_0\,d\alpha_0,$$
. . . . . .

Учитывая, что $g(\alpha_0+\pi)=g(\alpha_0)$, представим $g(\alpha_0)$ в виде разложения в ряд Фурье:

$$g(\alpha_0)=a_0/2+a_1\cos 2\alpha_0+b_1\sin 2\alpha_0+a_2\cos 4\alpha_0+b_2\sin 4\alpha_0+\ldots \tag{10}$$

Подставляя (10) в (9), (5) и (1), получим

$$\Phi=\frac{Ak_p\pi}{\beta\theta}(1+a_0\varepsilon+d\varepsilon^2+\ldots)=2\pi n, \tag{11}$$

где

$$d=2\sum_{n=1}^{\infty}\Big[-na_0a_n+\sum_{i+j=n}j(b_ib_j-a_ia_j)+\sum_{i-j=n}j(a_ia_j+b_ib_j)-$$
$$-\sum_{j-i=n}j(a_ia_j+b_ib_j)\Big]+\frac{1}{2}(a_0a_1)+\frac{1}{2}\sum_{|i-j|=1}(a_ia_j+b_ib_j)+$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\Big[a_0a_n+\frac{1}{2}\sum_{i+j=n}(a_ia_j-b_ib_j)+\frac{1}{2}\sum_{|i-j|=n}(a_ia_j+b_ib_j)\Big],\quad i,j=1,2\ldots$$

Выражения для коэффициентов при степенях ε более высокого порядка не приводятся из-за их громоздкости.

Из (11) следует, что для скоростей клиновых волн имеет место соотношение

$$c=\frac{2n\theta c_p}{A}(1+a_0\varepsilon+d\varepsilon^2+\ldots)^{-1}. \tag{12}$$

В частном случае изотропной пластины ($g(\alpha_0)=0$, $A=2\sqrt{3}$), выражение (12) совпадает с полученной ранее формулой [7, 8] $c=n\theta c_p/\sqrt{3}$. Учет ани-

зотропии приводит к не зависящим от θ и n поправкам. Причем, поправка, пропорциональная ε, отражает среднее значение $g(\alpha_0)$, а поправка, пропорциональная ε^2, описывает влияние формы поверхности обратной фазовой скорости. В частности, для $g(\alpha_0) = \sin^2 \alpha_0$ получаем

$$c = \frac{2n\theta c_p}{A}\left(1+\varepsilon+\frac{3}{8}\varepsilon^2+\ldots\right)^{-1}. \qquad (13)$$

Отметим, что разложение (12) является равномерным, что указывает на правомерность применения метода возмущений в рассматриваемом случае.

Таким образом, в работе получено простое геометро-акустическое решение задачи о распространении локализованных антисимметричных волн в клине из анизотропного материала. Полученные аналитические соотношения показывают, что влияние упругой анизотропии не приводит к изменению вида зависимости скоростей клиновых мод от угла раскрыва клина θ и номера моды n, а сказывается лишь на формировании некоторых эффективных значений этих скоростей, зависящих от среднего значения и формы кривой обратной скорости плоских изгибных волн в тонкой пластине, вырезанной в плоскости, совпадающей со срединной поверхностью клина.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lagasse P. E.* Analysis of a dispersionfree guides for elastic waves // Electron. Letters. 1972. V. 8. № 15. P. 372–373.
2. *Maradudin A. A., Wallis R. F., Mills D. L., Ballard R. L.* Vibrational edge modes in finite crystals // Phys. Rev. B. 1972. V. 6. № 4. P. 1106–1111.
3. *Lagasse P. E., Mason I. M., Ash E. A.* Acoustic surface waveguides – analysis and assessment // IEEE Trans. on Sonics and Ultrasonics. 1973. V. 20. № 2. P. 143–154.
4. *Lagasse P. E.* Finite element analysis of piezoelectric elastic waveguides // IEEE Trans. on Sonics and Ultrasonics. 1973. V. 20. № 4. P. 354–359.
5. *Krylov V. V.* Wedge acoustic waves: new theoretical and experimental results // Proc. II International Symp. «Surface Waves in Solids and Layered Structures». Varna, Bulgaria, 1989.– Singapore: World Scientific Publishing, 1990. P. 174–189.
6. *Moss S. L., Maradudin A. A., Cunningham S. L.* Vibrational edge modes for wedges of arbitrary interior angles // Phys. Rev. B. 1973. V. 8. № 6. P. 2999–3008.
7. *Крылов В. В.* Об условиях применимости приближения геометрической акустики для волн в остроугольном твердом клине // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 2. С. 294–301.
8. *Крылов В. В.* Геометро-акустический подход к описанию локализованных мод колебаний упругого твердого клина // ЖТФ. 1990. Т. 60. № 2. С. 1–7.
9. *Можаев В. Г.* Лучевая теория клиновых акустических волн // Вестн. МГУ. Сер. 3. Физ. Астрон. 1989. Т. 30. № 5. С. 40–45.
10. *Маркус С. А.* Низкочастотные приближения для нулевых мод нормальных волн в анизотропных пластинах // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 6. С. 1091–1095.
11. *Datta S., Hunsinger B. J.* Analysis of line acoustic waves in general piezoelectric crystals // Phys. Rev. B. 1977. V. 16. № 10. P. 4224–4229.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова, физический факультет

Поступила в редакцию
24.04.90

V. V. Krylov, A. V. Shanin

EFFECT OF AN ELASTIC ANISOTROPY ON VELOCITIES OF WEDGE ACOUSTIC WAVES

The propagation of antisymmetric wedge acoustic waves in a sharp – angle wedge of an anisotropic solid is analyzed theoretically in the limits of the geometric – acoustic approach. The anisotropy is supposed to be arbitrary, but small enough. It makes possible to solve the problem by means of the perturbation theory technique. The analytical expression for wedge modes velocities is derived. The analysis of this expression shows, that the effect of the anisotropy restricts only to an appearance of a common normalizing factor, which depends on the mean value and the form of the inverse phase velocity curve of flexural plane waves in a thin crystalline plate cutted out in a plane coinciding with a middle one of the wedge.