АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 37 1991 Вып. 1

УДК 534

© 1991 г.

М. Ю. Тэтюхин, М. В. Федорюк

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ НА ВЫТЯНУТОЙ ЖИДКОЙ ОБОЛОЧКЕ ВРАЩЕНИЯ

Рассматривается задача дифракции плоской звуковой волны на вытянутой жидкой оболочке вращения, помещенной в жидкость. Получена асимптотическая формула для рассеянного поля. Проведены численные расчеты.

Ранее в работах [1—3] были рассмотрены задачи дифракции плоской звуковой волны на вытянутых телах с идеальными границами, жидком и упругом теле. В настоящей работе асимптотические методы применяются для исследования оболочечных конструкций на примере «жидкой» оболочки.

Пусть S_1, S_2 — замкнутые гладкие поверхности вращения, заданные уравнениями $r=d_jF_j(z/l_j)$, $-l_j\leqslant z\leqslant l_j$, $j=1, 2$ в цилиндрических координатах r, φ, z. Поверхность S_2 лежит внутри S_1, $0<F_j(t)\leqslant 1$ при $|t|<1$. Области D (внешность S_1), D_1 (слой между S_1 и S_2), D_2 (внутренность S_2) заполнены однородными жидкостями с плотностями и скоростями звука соответственно ρ, c; ρ_1, c_1; ρ_2, c_2.

Из бесконечности падает плоская волна $P_0=\exp[i(\mathbf{k}, \mathbf{r})]$, где $\mathbf{k}=(k, \theta_0, \varphi_0)$ в сферических координатах. Рассеянное поле обозначим P в D, P_1 в D_1, P_2 в D_2. Эти поля удовлетворяют уравнениям Гельмгольца с волновыми числами k, k_1, k_2 и граничным условиям

$$P+P_0=P_1, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial n}(P+P_0)=\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial P_1}{\partial n}, \quad \mathbf{r}\in S_1, \tag{1}$$

$$P_1=P_2, \quad \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial P_1}{\partial n}=\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial P_2}{\partial n}, \quad \mathbf{r}\in S_2.$$

Задача исследуется в предположении, что S_1 и S_2 — вытянутые поверхности, т. е.

$$kd_1\cong 1, \ k_jd_j\cong 1, \ kl_1\gg 1, \ k_jl_j\gg 1, \ j=1, 2. \tag{2}$$

Рассеянное поле ищется в виде волновых потенциалов простого слоя, сосредоточенных на S_1 и S_2:

$$P(\mathbf{r})=\iint\limits_{S_1} G(\mathbf{r}-\mathbf{r}, k)\,\mu(\mathbf{r})\,dS, \quad P_1(\mathbf{r})=P_{11}+P_{12},$$

$$P_{1j}(\mathbf{r})=\iint\limits_{S_j} G(\mathbf{r}-\tilde{\mathbf{r}}_1, k_1)\,\mu_{ij}(\tilde{\mathbf{r}})\,dS, \tag{3}$$

$$P_2(\mathbf{r})=\iint\limits_{S_2} G(\mathbf{r}-\tilde{\mathbf{r}}, k_2)\,\mu_2(\tilde{\mathbf{r}})\,dS.$$

Здесь $G(\mathbf{r}, k)=\exp(ik|\mathbf{r}|)/|\mathbf{r}|$ и μ, μ_{11}, μ_{12}, μ_2 — неизвестные плотности. Используя известные свойства волновых потенциалов [4], можно полу-

чить для плотностей систему из четырех двумерных интегральных уравнений (интегралы берутся по поверхностям S_1, S_2) с полярными ядрами. Попытка численного решения этой системы приводит к системе линейных алгебраических уравнений порядка 10^3-10^4, к тому же элементы матрицы системы есть быстро осциллирующие функции. Нам неизвестны какие-либо численные расчеты, проведенные для этой задачи при условиях (2).

Применим асимптотические методы [3, 5]. Будем искать неизвестную плотность μ в виде произведения следа плоской волны P_0 на оси z на медленно меняющуюся функцию:

$$\mu(\tilde{\mathbf{r}}) = \exp(ik\tilde{z}\cos\theta_0)\sum_{-\infty}^{\infty}\nu_n(\tilde{z}_1')\,e^{in\tilde{\varphi}}. \tag{4}$$

Введем обозначения:

$$\begin{gathered} z_j'=z/l_j,\quad \varepsilon_j=d_j/l_j,\quad b_j=\sqrt{k_j^2-k^2\cos^2\theta_0},\\ b=k\sin\theta_0,\quad r_j=d_jF_j(z_j'),\\ A=2\pi^2 i\exp(ikz\cos\theta_0). \end{gathered} \tag{5}$$

Асимптотика поля P в области D имеет вид [3] при $\sin\theta_0\neq 0$:

$$\begin{gathered} P(\mathbf{r})=\frac{A}{2\pi}r_1\int_0^{2\pi}H_0^{(1)}(b\Phi)\nu(z_1',\tilde{\varphi})\,d\tilde{\varphi},\\ \Phi^2=r^2+r_1^2-2rr_1\cos(\varphi-\tilde{\varphi}). \end{gathered} \tag{6}$$

Вычислим асимптотику P на S_1. Применяя теорему сложения для бесселевых функций при $r>r_1$, получаем, что на S_1

$$\begin{gathered} P(\mathbf{r})=Ar_1\sum_{-\infty}^{\infty}e^{in\varphi}J_n(br_1)H_n^{(1)}(br_1)\nu_n(z_1'),\\ \frac{\partial P(\mathbf{r})}{\partial n}=Ar_1b\sum_{-\infty}^{\infty}e^{in\varphi}J_n(br_1)\left(H_n^{(1)}(br_1)\right)'\nu_n(z_1'). \end{gathered} \tag{7}$$

Для плоской волны P_0 на S_1 имеем

$$\begin{gathered} P_0(\mathbf{r})=\exp(ikz\cos\theta_0)\sum_{-\infty}^{\infty}\exp\left[in\left(\varphi-\varphi_0+\frac{\pi}{2}\right)\right]J_n(br_1),\\ \frac{\partial P_0(\mathbf{r})}{\partial n}=b\exp(ikz\cos\theta_0)\sum_{-\infty}^{\infty}\exp\left[in\left(\varphi-\varphi_0+\frac{\pi}{2}\right)\right]J_n'(br_1). \end{gathered} \tag{8}$$

Поле P_{11} в области D_1 имеет вид (6), с той лишь разницей, что b, ν заменяются на b_1, ν_{11}. При вычислении поля P_{11} на S_1 теорему сложения следует применить при $r<r_1$, так что на S_1

$$\begin{gathered} P_{11}(\mathbf{r})=Ar_1\sum_{-\infty}^{\infty}e^{in\varphi}J_n(b_1r_1)H_n^{(1)}(b_1r_1)\nu_{11,n}(z_1'),\\ \frac{\partial P_{11}(\mathbf{r})}{\partial n}=Ab_1r_1\sum_{-\infty}^{\infty}e^{in\varphi}J_n'(b_1r_1)H_n^{(1)}(b_1r_1)\nu_{11,n}(z_1') \end{gathered} \tag{9}$$

Поле P_{12} в D_1 имеет вид (6), с той лишь разницей, что b, ν, r заменяются на b_1, ν_{12}, r_2. Поэтому на S_1

$$P_{12}(\mathbf{r})=Ar_2\sum_{-\infty}^{\infty}e^{in\varphi}J_n(b_1r_2)H_n^{(1)}(b_1r_1)\nu_{12,n}(z_2'), \tag{10}$$

$$\frac{\partial P_{12}(\mathbf{r})}{\partial n}=Ab_1r_2\sum_{-\infty}^{\infty}e^{in\varphi}J_n(b_1r_2)(H_n^{(1)}(b_1r_1))'\nu_{12,n}(z_2').$$

Из граничных условий (1) на S_1 и из (7)—(10) получаем уравнения для коэффициентов Фурье ν_n, $\nu_{11,n}$, $\nu_{12,n}$:

$$\begin{gathered}r_1J_n(br_1)H_n^{(1)}(br_1)\nu_{1n}(z_1')-r_1J_n(b_1r_1)H_n^{(1)}(b_1r_1)\nu_{11,n}(z_1')-\\-r_2J_n(b_1r_2)H_n^{(1)}(b_1r_1)\nu_{12,n}(z_2')=\frac{i}{2\pi^2}\exp\left[in\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_0\right)\right]J_n(br_1),\end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered}\rho_1br_1J_n(br_1)(H_n^{(1)}(br_1))'\nu_{1n}(z_1')-\rho b_1r_1J_n'(b_1r_1)H_n^{(1)}(b_1r_1)\nu_{11,n}(z_1')-\\-\rho b_1r_2J_n(b_1r_2)(H_n^{(1)}(b_1r_1))'\nu_{12,n}(z_2')=\frac{ib\rho_1}{2\pi^2}\exp\left[in\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_0\right)\right]J_n'(br_1).\end{gathered} \tag{12}$$

Из граничных условий (1) на S_2 тем же способом получаем систему

$$\begin{gathered}r_1J_n(b_1r_2)H_n^{(1)}(b_1r_1)\nu_{11,n}(z_1')+r_2J_n(b_1r_2)H_n^{(1)}(b_1r_2)\nu_{12,n}(z_2')=\\=r_2J_n(b_2r_2)H_n^{(1)}(b_2r_2)\nu_{2n}(z_2'),\end{gathered} \tag{13}$$

$$\begin{gathered}\rho_2r_1b_1J_n'(b_1r_2)H_n^{(1)}(b_1r_1)\nu_{11,n}(z_1')+\rho_2r_2b_1J_n(b_1r_2)(H_n^{(1)}(b_1r_2))'\nu_{12,n}(z_2')=\\=\rho_1r_2b_2J_n'(b_2r_2)H_n^{(1)}(b_2r_2)\nu_{2n}(z_2').\end{gathered} \tag{14}$$

Таким образом, при каждом фиксированном n имеем систему из четырех линейных алгебраических уравнений (11)—(14) для четырех неизвестных $\nu_{1n}(z_1')$, $\nu_{11,n}(z_1')$, $\nu_{12,n}(z_2')$, $\nu_{2n}(z_2')$.

Решая полученную систему, находим главный член асимптотики амплитуды рассеяния:

$$\begin{gathered}f(\theta,\theta_0,\varphi-\varphi_0)=\frac{il}{\pi}\int_{-1}^{1}\exp(iklt(\cos\theta_0-\cos\theta))\times\\\times\sum_{-\infty}^{\infty}e^{in(\varphi-\varphi_0)}\frac{J_n(kr_1\sin\theta)}{J_n(br_1)}\frac{\rho b_1J_n(br_1)X+\rho_1bJ_n'(br_1)Y}{\rho b_1H_n^{(1)}(br_1)X+\rho_1b(H_n^{(1)}(br_1))'Y}dt,\end{gathered} \tag{15}$$

где

$$\begin{gathered}X=J_n(b_2r_2)\rho_2b_1[J_n'(b_1r_2)(H_n^{(1)}(b_1r_1))'-J_n'(b_1r_1)(H_n(b_1r_2))']+\\+J_n'(b_2r_2)\rho_1b_2[J_n'(b_1r_1)H_n^{(1)}(b_1r_2)-J_n'(b_1r_2)(H_n^{(1)}(b_1r_1))'],\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}Y=J_n(b_2r_2)\rho_2b_1[J_n(b_1r_1)(H_n^{(1)}(b_1r_2))'-J_n'(b_1r_2)(H_n^{(1)}(b_1r_1))]+\\+J_n'(b_2r_2)\rho_1b_2[J_n'(b_1r_2)H_n^{(1)}(b_1r_1)-J_n(b_1r_1)H_n^{(1)}(b_1r_2)].\end{gathered}$$

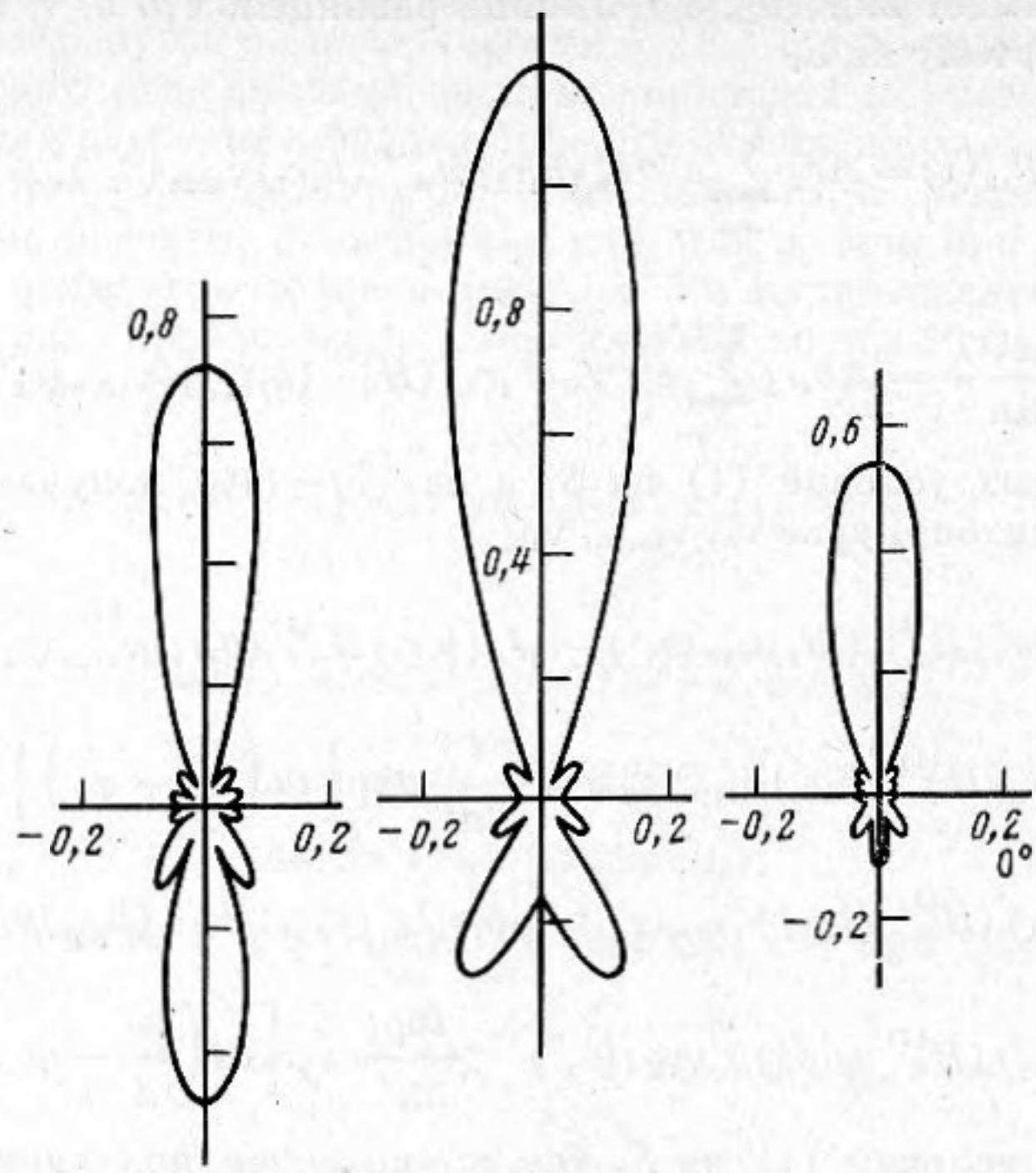

Рис.1 Рис.2 Рис.3

Рис. 1. Диаграмма рассеяния: $k_1l_1=3$, $\rho_1=7$, $k_2l_1=20$

Рис. 2. Диаграмма рассеяния: $k_1l_1=30$, $\rho_1=0{,}5$, $k_2l_1=20$

Рис. 3. Диаграмма рассеяния: $k_1l_1=30$, $\rho_1=0{,}5$, $k_2l_1=10$

В качестве иллюстрации были проведены расчеты диаграмм рассеяния для оболочки, внутренняя и внешняя поверхности которой являются сфероидами ($kl_1=10$, $kd_1=1$, $l_2/l_1=0{,}95$, $d_2/d_1=0{,}95$) при $\varphi=\varphi_0$, $\theta_0=90°$, $\rho=1$, $\rho_2=1$. Значения $|f(\theta)/l_1|$ представлены на рис. 1–3. Большие оси сфероидов расположены горизонтально.

Результаты расчетов показывают увеличение теневого лепестка с ростом сжимаемости (см. [2]). При этом можно получить значительное уменьшение амплитуды рассеяния в локационном направлении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тэтюхин М. Ю., Федорюк М. В.* Рассеяние плоской звуковой волны на протяженном теле произвольной формы // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 6. С. 811–815.
2. *Тэтюхин М. Ю.* Рассеяние плоской звуковой волны на протяженном жидком теле произвольной формы // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 2. С. 348–352.
3. *Тэтюхин М. Ю., Федорюк М. В.* Дифракция плоской звуковой волны на вытянутом твердом теле вращения в жидкости // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 1. С. 126–131.
4. *Купрадзе Д. В.* Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963. 472 с.
5. *Федорюк И. В.* Асимптотика волнового потенциала, сосредоточенного на прямой // Матем. заметки. 1984. Т. 36. № 5. С. 673–679.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
02.02.90

M. Yu. Tetyukhin, M. V. Fedoryuk

DIFFRACTION OF A PLANE ACOUSTIC WAVE ON A STRETCHED LIQUID SHELL OF REVOLUTION

The liquid stretched thin shell of revolution bounded by smooth surfaces S_1 and S_2 with the axis of revolution Z is considered. There are three kinds of liquids: outside S_2, between S_1 and S_2 and inside of S_1. The lengthes of S_j is greater than the wave length, the maximum diameter d of cross-sections of S_j is compatible with the wave length and $h/d \ll 1$, where h is the thickness of the shell. The scattered field is seeked in the form of wave surface potentials with unknown densities. With the help of asymptotic methods this problem is reduced to the system of four one-dimensional integral equations. The kernels of them don't contain large parameters, have weak singularities and may be reduced to an infinite system of independent (4×4) – systems. Asymptotics of a scattered amplitude and some numerical results are obtained.