АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 37 1991 Вып. 2

УДК 534.1/.2

© 1991 г.

Л. М. Барковский, Фо Тхи Нгует Ханг

ОПЕРАТОРЫ ЭЙКОНАЛА И ЛУЧЕЙ В ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ КРИСТАЛЛОАКУСТИКЕ

Получено тензорное уравнение эйконала и уравнения переноса «амплитуды» вектора смещения в неоднородных анизотропных упругих средах с произвольной зависимостью плотности и тензора модулей упругости от координат. Найдены решения этих уравнений для сферически-слоистой и плоско-слоистой сред. Введен лучевой тензор третьего ранга, характеризующий направление лучей нормальных волн в зависимости от поляризации.

Хорошо известно, что динамическая анизотропия упругих свойств кристаллов ярко проявляется через поляризационные эффекты. Если в некоторой начальной точке задано какое-то исходное состояние поляризации, то ответ на вопрос будет ли оно переноситься или распадется, зависит от ориентации исходного вектора состояния (вектора смещений) в кристалле. В общем случае в однородных средах поле смещений разлагается в дискретный спектр некоторого оператора пространственной эволюции [1—4]. Веса, с которыми входят компоненты исходного вектора, определяются углами между этим вектором и векторами, входящими в поляризационные проекторы (диады) изонормальных волн. В отсутствие частотной дисперсии в однородном кристалле эволюционный оператор (оператор Коши [5, 6]) определяет решение операторного уравнения Гельмгольца [2, 7] с постоянными тензорными коэффициентами и имеет экспоненциальную форму [2, 4, 7]. При этом в показателе экспоненты находится тензорная функция, называемая обобщенной фазой. В отличие от скалярных фаз, она является тензором, зависящим от вектора волновой нормали и тензоров материальных констант, фигурирующих в известных обобщениях закона Гука.

Тензорная фаза как и весь экспоненциал является оператором матричного типа и может для большинства направлений распространения быть представлена в виде спектрального разложения по трем поляризационным проекторам собственных волн (одной квазипродольной и двух квазипоперечных [1]). Таким образом, операторная фаза наряду со скоростями описывает с помощью проекторов и поляризации волн. С другой стороны, в современной геометроакустике широкое распространение получили склярные функции эйконала [8—13]. Наша цель состоит в том, чтобы произвести обобщение эйконала и с учетом сказанного выше сделать естественным переход от волновой кристаллоакустики к геометрической (квазиакустике). Это оказывается возможным с помощью операторов эйконала и лучевых операторов. При этом поляризация волн как их важнейшая динамическая характеристика органично входит в соотношения предлагаемого подхода. Здесь более подробно обсуждаются вопросы, намеченные в [14]: получаются тензорные уравнения эйконала и переноса «амплитуды» в случае неоднородных анизотропных сред, с произвольной зависимостью плотностей и тензоров модулей упругости от координат; Находятся решения этих уравнений в случаях плоской и сферической

стратификации; Вводятся лучевые операторы, являющиеся тензорами третьего ранга и определяющими направления лучей в указанных средах.

Рассмотрим линейную неоднородную анизотропную упругую среду, характеризуемую плотностью $\rho(r)$ и тензором модулей упругости $C_{abcd}(\mathbf{r})$. Уравнение движения среды имеет вид [1]

$$\rho \frac{\partial^2 u_a}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial r_b}\left(C_{abcd}\frac{\partial}{\partial r_c} u_d\right). \tag{1}$$

Здесь a, b, c, d принимают значения 1, 2, 3, а по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Решение уравнения (1) ищут в виде разложения

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = e^{i\omega\psi(\mathbf{r})} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{\omega}\right)^n \mathbf{A}^{(n)}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \tag{2}$$

где $\psi(\mathbf{r})$ — оператор эйконала, а $\mathbf{A}^{(n)}(\mathbf{r})$ — вектор амплитуды n-го приближения. Подставив (2) в (1) и приравняв нулю коэффициенты при одинаковых степенях $\frac{i}{\omega}$, в нулевом приближении получим уравнение

$$\left(C_{abcd}\frac{\partial\psi_{dl}}{\partial r_c}\frac{\partial\psi_{lf}}{\partial r_b} - \rho\delta_{af}\right) u_f(\mathbf{r}) = 0. \tag{3}$$

Для последующих приближений имеем рекуррентные соотношения

$$\frac{\partial C_{abcd}}{\partial r_b}\frac{\partial\psi_{dl}}{\partial r_c} e^{i\omega\psi_{lf}} A_f^{(n)} + C_{abcd}\left[\frac{\partial^2\psi_{dl}}{\partial r_b\,\partial r_c} e^{i\omega\psi_{lf}} A_f^{(n)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial\psi_{dl}}{\partial r_c} e^{i\omega\psi_{lf}} \frac{\partial A_f^{(n)}}{\partial r_b} + \frac{\partial\psi_{dl}}{\partial r_b} e^{i\omega\psi_{lf}} \frac{\partial A_f^{(n)}}{\partial r_c}\right] =$$

$$= \frac{\partial C_{abcd}}{\partial r_b} e^{i\omega\psi_{al}} \frac{\partial A_l^{(n-1)}}{\partial r_c} + C_{abcd} e^{i\omega\psi_{al}} \frac{\partial^2 A_l^{(n-1)}}{\partial r_b\,\partial r_c}. \tag{4}$$

$n=0, 1, 2, 3, \ldots, \mathbf{A}^{(n)}=0$ при $n<0$.

Заметим, что равенство (3) должно выполняться при любых r. Поэтому из (3) следует тензорное уравнение эйконала

$$C_{abcd}\frac{\partial\psi_{dl}}{\partial r_c}\frac{\partial\psi_{lf}}{\partial r_b} - \rho\delta_{ad} = 0. \tag{5}$$

Уравнение (5) является системой девяти нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с тремя переменными. Будем искать решения уравнений (3), (4) в частных случаях сферически-слоистых и плоско-слоистых сред.

В сферических координатах r, θ, φ, решение уравнения движения найдем в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = e^{i\omega\psi(r)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{\omega}\right)^n \mathbf{A}^{(n)}(r) e^{i\omega\theta a}. \tag{6}$$

Здесь a — постоянный скаляр, зависящий от начального значения эйконала. Для поля (6) уравнение эйконала (5) принимает вид

$$AN^2 + BN + D = 0, \quad N = \frac{d\psi(r)}{dr}, \tag{7}$$

где

$$A_{ad}=C_{abcd}e_c{}^r e_b{}^r,$$

$$B_{ad}=aC_{abcd}(e_c{}^r e_b{}^\theta+e_b{}^r e_c{}^\theta),$$

$$D_{ab}=a^2C_{abcd}e_b{}^\theta e_c{}^\theta-\rho\delta_{ad}.$$

Здесь $e_b{}^r$, $e_b{}^\theta$, $e_b{}^\varphi$ — единичные базисные векторы в сферической системе координат. Процедура нахождения решения квадратных матричных уравнений типа (7) изложена в [15, 16]. Подставив (6) в (4), учитывая, что в сферической системе координат справедливы соотношения

$$\frac{\partial \mathbf{e}^r}{\partial\theta}=\mathbf{e}^\theta,\quad \frac{\partial \mathbf{e}^\theta}{\partial\theta}=-\mathbf{e}^r,\quad \frac{\partial \mathbf{e}^\theta}{\partial\varphi}=\mathbf{e}^\varphi\cos\theta,$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}^r}{\partial\varphi}=\mathbf{e}^\varphi\sin\theta,\quad \frac{\partial \mathbf{e}^\varphi}{\partial\varphi}=-\mathbf{e}^r\sin\theta-\mathbf{e}^\theta\cos\theta,$$

получим уравнение переноса

$$\frac{d\mathbf{A}^{(n)}(r)}{dr}=Q(r)\mathbf{A}^{(n)}(r)+G(r)\mathbf{A}^{(n-1)}(r), \tag{8}$$

где

$$Q_{hf}=-F_{ha}^{-1}\Big\{e_b{}^r\frac{dC_{abcd}}{dr}(e_c{}^rN_{dl}+ae_c{}^\theta\delta_{dl})+C_{abcd}\Big[e_b{}^re_c{}^r\frac{dN_{dl}}{dr}+$$

$$+e_b{}^\theta(e_c{}^\theta N_{dl}-ae_c{}^r\delta_{dl})+e_b{}^\varphi e_c{}^\varphi(N_{dl}\sin\theta+a\cos\theta\delta_{dl})\Big]\Big\}e^{i\omega\psi_{lf}},$$

$$G_{hf}=F_{ha}^{-1}e_b{}^re_c{}^r\left(\frac{dC_{abcd}}{dr}e^{i\omega\psi_{df}}\frac{d}{dr}+C_{abcd}e^{i\omega\psi_{df}}\frac{d^2}{dr^2}\right),$$

$$F=(2AN+B)e^{i\omega\psi}.$$

Решение уравнения (8) выражает через мультипликативные интегралы [14, 15]

$$\mathbf{A}_{(r)}^{(n)}=\Omega_{r_0}{}^r(G)\mathbf{A}^{(n)}(r)+\int_{r_0}^{r}K(r,r')G(r')\mathbf{A}^{(n-1)}(r')dr', \tag{9}$$

где

$$K(r,r')=\Omega_{r_0}{}^r[G(r)]\Omega_{r'}{}^{r_0}[G(r')].$$

$K(r, r')$ — матрица Коши.

В плоско-слоистой среде при ее стратификации в направлении z найдем решение уравнения движения в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{r})=e^{i\omega\psi(z)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{\omega}\right)^n\mathbf{A}^{(n)}(z)e^{i\omega(a_1x+a_2y)}, \tag{10}$$

где a_1, a_2 — постоянные скаляры. Подставим (10) в (4), (5) получим уравнение эйконала

$$AN^2+BN+D=0,\quad N=\frac{d\psi(z)}{dz}. \tag{11}$$

Теперь, в отличие от (7), имеем

$$A_{ad}=C_{abcd}k_bk_c,$$

$$B_{ad}=C_{abcd}[k_c(a_1i_b+a_2j_b)+k_b(a_1i_c+a_2j_c)],$$

$$D_{ad}=C_{abcd}(a_1i_c+a_2j_c)(a_1i_b+a_2j_b)-\rho\delta_{ad},$$

и уравнение переноса

$$\frac{d\mathbf{A}^{(n)}(z)}{dz}=Q(z)\mathbf{A}^{(n)}(z)+G(z)\mathbf{A}^{(n-1)}(z), \tag{12}$$

где

$$Q_{hf}=-F_{ha}^{-1}\left\{\frac{dC_{abcd}}{dz}k_b[k_cN_{dl}+(a_1i_c+a_2j_c)\delta_{dl}]+C_{abcd}k_bk_c\frac{dN_{dl}}{dz}\right\}e^{i\omega\psi_{lf}},$$

$$G_{hf}=F_{ha}^{-1}k_bk_c\left\{\frac{dC_{abcd}}{dz}e^{i\omega\psi_{df}}\frac{d}{dz}+C_{abcd}e^{i\omega\psi_{df}}\frac{d^2}{dz^2}\right\},$$

$$F=(2AN+B)e^{i\omega\psi}.$$

Здесь **i**, **j**, **k** — единичные базисные векторы в системе декартовых координат. Для однородных сред тензоры N (7), (11) совпадают с тензором нормальной рефракции [4]. Поэтому по аналогии будем называть N оператором нормальной рефракции в геометроакустике.

При нормальном падении плоской волны на систему ($a_1=a_2=0$), уравнение эйконала (11) принимает вид [14]

$$\Lambda N^2-1=0, \tag{13}$$

где

$$\Lambda=(\Lambda_{ad})=\frac{1}{\rho}C_{abcd}n_bn_c.$$

Здесь 1 — единичная 3×3 матрица, $\mathbf{n}=\mathbf{k}$ — единичный вектор фазовой нормали. Заметим, что для гармонических по времени волн

$$\mathbf{u}(z)=e^{i\omega\varphi(z)}\mathbf{A}(z),\qquad \varphi(z)=\int_{z_0}^{z}\frac{1}{v}dz, \tag{14}$$

из уравнения (3) получим

$$(\Lambda-v^2)\mathbf{u}(z)=0,\qquad \Lambda=N^{-2}. \tag{15}$$

Здесь v^2 — квадрат фазовой скорости волны. Отсюда следует, что v^2 является собственным значением оператора N^{-2}, а **u** — собственным вектором. Вектор **u** также является собственным для оператора N^{-1} с собственным значением v [17]. Квадраты фазовых скоростей являются корнями характеристического уравнения $|\Lambda-v^2|=0$.

С помощью теоремы Гамильтона — Кэли [1] применительно к тензору N получим решение уравнения (13)

$$N=(\Lambda^{-1}+\overline{N}_t)^{-1}(|N|+N_t\Lambda^{-1}), \tag{16}$$

где N_t — след тензора N, $\overline{N}_t$ — след взаимного тензора $\overline{N}$, $|N|$ — детерминант N.

По определению [1], лучевые векторы связаны со скоростями изонормальных волн v

$$\mathbf{s}=\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}, \tag{17}$$

где **n** — единичный вектор фазовой нормали.

Учитывая аналогию со скалярным случаем, вместо (17) можем написать

$$S_{abg}=\frac{\partial N_{ab}^{-1}}{\partial n_g}, \tag{18}$$

где S_{abg} — лучевой тензор третьего ранга. Так как **u** является собственным

вектором оператора N^{-1}, то лучевой вектор получается путем свертки тензора луча (18) с вектором u по индексам a и b. Получим теперь тензор лучей для случая нормального падения волн на плоско-слоистую среду. Для этого исходим из следующего соотношения [1]:

$$s_a^{(l)} = \frac{C_{abcd}(\overline{\Lambda - v^{(l)2}})_{bd} n_c}{\rho v^{(l)} (\overline{\Lambda - v^{(l)2}})_t} = \frac{\partial v^{(l)}}{\partial n_a}, \tag{19}$$

где $l=1, 2, 3$. Тогда из (14), (18), (19), находим

$$S_{abg} = \frac{\partial N_{ab}^{-1}}{\partial n_g} = A_{ac}(B_{cbg} + D_{cbg}), \tag{20}$$

где

$$A_{ac} = [(N^{-1})_t \delta_{ac} + |N^{-1}| \Lambda_{ac}^{-1}]^{-1},$$

$$B_{cbg} = 2\Lambda_{cb} n_g + |N^{-1}| \delta_{cb} \sum_{l=1}^{3} \frac{s_g^{(l)}}{v^{(l)}} \left(N_t - \frac{1}{v^{(l)}} \right),$$

$$D_{cbg} = -\left\{ \sum_{l=1}^{3} s_g^{(l)} \delta_{cd} + |N^{-1}| \Lambda_{cd}^{-1} \left(\sum_{l=1}^{3} \frac{s_g^{(l)}}{v^{(l)}} - 2n_g \right) \right\} N_{db}^{-1}.$$

После свертки S_{abg} (20) с u_a и u_b получаем

$$s_g = S_{abg} u_a u_b = \frac{C_{gabc} u_a u_c n_b}{\rho v}. \tag{21}$$

Для однородных анизотропных сред (21) сводится к приведенному в [1] результату. В этом случае лучевой тензор совпадает с тензором групповой скорости [18].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Федоров Ф. И.* Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965. 386 с.
2. *Барковский Л. М., Федоров Ф. И.* Импедансный тензор и прохождение упругих волн через плоскослоистые анизотропные среды // Докл. АН СССР. 1974. Т. 218. № 6. С. 1313–1316.
3. *Барковский Л. М., Федоров Ф. И.* Одномерное волновое уравнение кристаллоакустики и его операторное решение // Весці АН БССР. Сер. фіз-мат. навук. 1975. № 2. С. 34–39.
4. *Барковский Л. М., Борздов Г. Н., Лавриненко А. В.* Операторы нормальной рефракции и поверхностного импеданса в граничных задачах кристаллоакустики // Докл. АН БССР. 1987. Т. 31. № 5. С. 424–426.
5. *Барковский Л. М., Фо Тхи Нгует Ханг.* Операторы Коши и лучевые операторы в геометрооптике анизотропных сред // Оптика и спектроскопия. (в печати).
6. Математическая энциклопедия/Под ред. Виноградова И. М. М.: Советская энциклопедия. Т. 3. 1982. 1183 с.
7. *Барковский Л. М., Борздов Г. Н., Лавриненко А. В.* Френелевские тензоры отражения и пропускания акустически-анизотропных стратифицированных сред // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 5. С. 798–804.
8. *Левин М. Л., Рытов С. М.* О переходе к геометрическому приближению в теории упругости // Акуст. журн. 1956. Т. 2. № 2. С. 173–176.
9. *Бабич В. М.* Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов // Докл. АН СССР. 1956. Т. 110. № 3. С. 355–357.
10. *Бабич В. М.* Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов в случае упругой неоднородной анизотропной среды // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Л.: ЛГУ, 1961. Сб. 5. С. 313.
11. *Бабич В. М.* О пространственно-временном лучевом методе в теории упругих волн // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. 1979. № 2. С. 3–13.
12. *Бабич В. М., Булдырев В. С., Молотков И. А.* Пространственно-временной лучевой метод. Линейные и нелинейные волны. Л.: ЛГУ, 1985. 270 с.
13. *Петрашень Г. И.* Распространение волн в анизотропных упругих средах. Л.: Наука, 1980. 280 с.

14. *Барковский Л. М., Фо Тхи Нгует Ханг.* Тензорный эйконал в геометроакустике кристаллов // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 3. С. 550–552.
15. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988. 546 с.
16. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 709 с.
17. *Ильин В. А., Позняк З. Г.* Линейная алгебра. М.: Наука, 1984. 294 с.
18. *Барковский Л. М., Федоров Ф. И.* Принципы операторного синтеза негармонических ультразвуковых полей в кристаллах // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1979. № 2. С. 43–48.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию
18.06.90

L. M. Barkovskii, Fo Tkhi Nguet Khang

OPERATORS OF EIKONAL AND RAYS IN GEOMETRIC CRYSTALLOACOUSTICS

Tensor equations of eikonal and shift vector «amplitude» transfer in the case of an homogeneous anisotropic elastic medium with arbitrary coordinate dependence of its density and elastic modulus tensor are derived. Solutions of these equations for the cases of plane and spherically stratified media are obtained. A third-rank ray tensor characterizing directions of normal wave rays in dependence of polarization is proposed.