

УДК 534.21

© 1991 г.

А. С. Белогорцев, В. В. Музыченко

ВЛИЯНИЕ ОГРАНИЧЕННОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ НА АМПЛИТУДУ ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ

В работе проведено вычисление импеданса излучения ограниченной цилиндрической области. Показано, что применение импеданса излучения бесконечной цилиндрической области для определения амплитуды обратного рассеяния плоской звуковой волны на ограниченной оболочке в ряде случаев приводит к большим погрешностям. Полученное выражение для импеданса излучения лишено этих недостатков.

Рассмотрим рассеяние плоской звуковой волны на упругой, вытянутой ($L \gg R$) цилиндрической оболочке, ограниченной двумя абсолютно твердыми полусферами [1]. Пусть концы цилиндрической оболочки закреплены, например, шарнирно. При этом

$$W = W_{mp} e^{im\varphi} \sin \left[q_p \left(z + \frac{L}{2} \right) \right], \quad q_p = \frac{\pi p}{L}, \quad (1)$$

где W и W_{mp} — нормальное смещение оболочки и его амплитуда соответственно, m — номер моды по φ ($m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), p — номер моды по z ($p=1, 2, \dots$), L — длина оболочки, R — радиус оболочки.

С учетом (1) для p -й компоненты амплитуды рассеяния имеем следующее выражение (см. [1]):

$$f_p = \frac{R}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^{m+1} e^{im(\psi_1 - \psi_0)} k_0 \sin \theta_0 J_m'(k_0 R \sin \theta_0) \left[J_m(k_0 R \sin \theta_1) + \left(-\frac{Z_s^{mp}}{i\rho\omega} \right) k_0 \sin \theta_1 J_m'(k_0 R \sin \theta_1) \right] \left[1 + \left(\frac{Z_0^m - Z_s^{mp}}{Z_y^{mp} + Z_s^{mp}} \right) \right] \frac{(-1)^{p-1}}{2L} f_L^{(0)} f_L^{(1)}, \quad (2)$$

где

$$f_L^{(0,1)} = \left\{ \frac{2 \sin \left[(k_z^{(0,1)} + q_p) \frac{L}{2} \right]}{(k_z^{(0,1)} + q_p)} - (-1)^p \frac{2 \sin \left[(k_z^{(0,1)} - q_p) \frac{L}{2} \right]}{(k_z^{(0,1)} - q_p)} \right\},$$

$k_z^{(0,1)} = -k_0 \cos \theta_{(0,1)}$; $k_0 = \omega/c_0$ — волновое число в среде; Z_s^{mp} — импеданс mp -й компоненты излучения бесконечной цилиндрической области:

$$Z_s^{mp} = i\rho\omega R \frac{H_m^{(1)}(\chi_p R)}{(\chi_p R) H_m^{(1)' }(\chi_p R)}, \quad \chi_p = \sqrt{k_0^2 - q_p^2}, \quad (3)$$

Z_y^{mp} — механический импеданс упругих колебаний оболочки; Z_0^m — импеданс m -й компоненты падающей волны

$$Z_0^m = i\rho\omega R \frac{J_m(k_0 R \sin \theta_0)}{(k_0 R \sin \theta_0) J_m'(k_0 R \sin \theta_0)}, \quad (4)$$

ω — круговая частота; c_0 и ρ — скорость звука в среде и ее плотность соответственно; θ_0 и ψ_0 — углы, определяющие направление падения плоской звуковой волны; θ_1 и ψ_1 — углы, определяющие направление в точку наблюдения; $H_m^{(1)}(\kappa_p R)$, $J_m(k_0 R \sin \theta_0)$ и $H_m^{(1)' }(\kappa_p R)$, $J_m'(k_0 R \sin \theta_0)$ — функция Ханкеля первого рода, функция Бесселя и их первые производные соответственно.

В работе [1] показано, что модуль амплитуды рассеяния (2) по сути определяется следующим выражением:

$$|f| \sim \frac{1}{|Z_y^{mp} + Z_s^{mp}|}. \quad (5)$$

Резонансные зависимости вида аналогичного (5) были впервые исследованы Л. М. Лямшевым [2] в задаче рассеяния звука на ограниченной пластине.

Здесь следует отметить, что применение выражения для импеданса излучения Z_s^{mp} в форме (3) наталкивается в ряде случаев на определенные трудности. Так, в частности, знаменатель в формуле (5) обращается в нуль в случае частотного резонанса [1] при отсутствии потерь в материале, из которого изготовлена оболочка. Это обстоятельство приводит к невозможности расчета амплитуды рассеяния на оболочках с такими параметрами с помощью выписанных формул. Обращение в нуль знаменателя в формуле (5) происходит из-за того, что реальная часть импеданса излучения бесконечной цилиндрической области при $q > k_0$ равна нулю.

В работе [3] проведено вычисление импеданса излучения с учетом ограниченности оболочки, причем расчет проведен для форм колебаний поверхности вида

$$W = W_{mp} e^{im\varphi} e^{iq_p z}.$$

Проведем аналогичные вычисления для форм колебаний поверхности оболочки вида (1). Пусть на внутренней поверхности бесконечной цилиндрической полости радиуса R , находящейся в безграничной среде, задано распределение нормальных скоростей вида

$$V = \begin{cases} V_0 e^{im\varphi} \sin \left[q \left(z + \frac{L}{2} \right) \right], & |Z| \leq L/2, \\ 0, & |Z| > L/2. \end{cases} \quad (6)$$

Как известно, если на поверхности цилиндра задано распределение нормальных скоростей в виде

$$V = V_0 e^{im\varphi} \delta(z - \xi) = \frac{V_0}{2\pi} e^{im\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(z - \xi)} dk,$$

то в пространстве будет существовать звуковое давление

$$P = \frac{V_0}{2\pi} e^{im\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} Z_s^m(k) e^{ik(z - \xi)} dk,$$

где

$$Z_s^m(k) = i\rho\omega R \frac{H_m^{(1)}(\kappa R)}{(\kappa R) H_m^{(1)' }(\kappa R)}, \quad \kappa = \sqrt{k_0^2 - k^2}. \quad (7)$$

Представим (6) в виде

$$V = V_0 e^{im\varphi} \int_{-L/2}^{L/2} \sin \left[q \left(\xi + \frac{L}{2} \right) \right] \delta(z - \xi) d\xi, \quad (8)$$

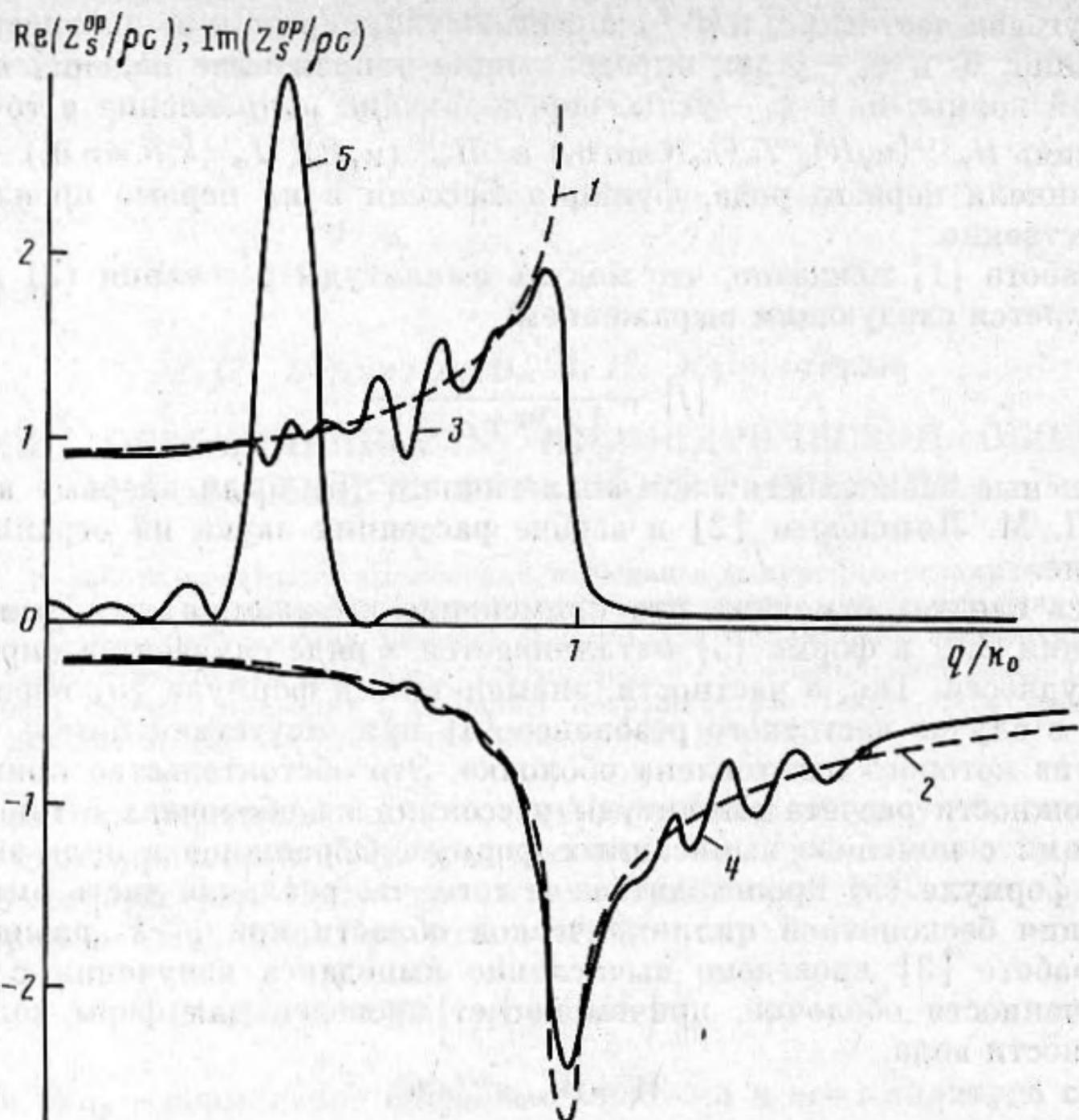


Рис. 1. Зависимости реальной и мнимой частей импедансов излучения бесконечной и ограниченной цилиндрических областей, а также весовой функции от q/k_0 при $k_0 R = 1$, $L/R = 48$, $\Omega_{\text{пр}} = 0,282$ в случае $m = 0$: 1 и 3 — реальная часть импеданса излучения бесконечной и ограниченной областей соответственно, 2 и 4 — мнимые части соответствующих импедансов, 5 — график весовой функции $F^2(k)$ при $q = k_0/2$, $k_0 L = 48$

тогда выражение для давления в окружающем оболочку пространстве примет следующий вид:

$$P = \frac{V_0}{2\pi} e^{im\varphi} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-\infty}^{\infty} Z_s^m(k) \sin \left[q \left(\xi + \frac{L}{2} \right) \right] e^{ik(z-\xi)} dk d\xi. \quad (9)$$

Если в (6) $q = \pi p/L$, то $V = V_0 \Psi_p$, где $\Psi_p = \sin [(\pi p/L)(\xi + L/2)]$ — p -я собственная функция шарнирно закрепленной на концах ограниченной цилиндрической оболочки. Представив (9) в виде разложения по полной ортогональной системе собственных функций Ψ_p , для импеданса излучения ограниченной цилиндрической области аналогично [3] можно получить выражение:

$$Z_{s,\text{огр}}^{mp}(q) = \frac{P_p}{V_0} = \frac{2}{\pi L} \int_0^{\infty} Z_s^m(k) F^2(k) dk, \quad (10)$$

где

$$F(k) = \left\{ \frac{\sin[(k+q)L/2]}{(k+q)} - (-1)^p \frac{\sin[(k-q)L/2]}{(k-q)} \right\}.$$

Для оценки влияния конечности оболочки на вид выражения для им-

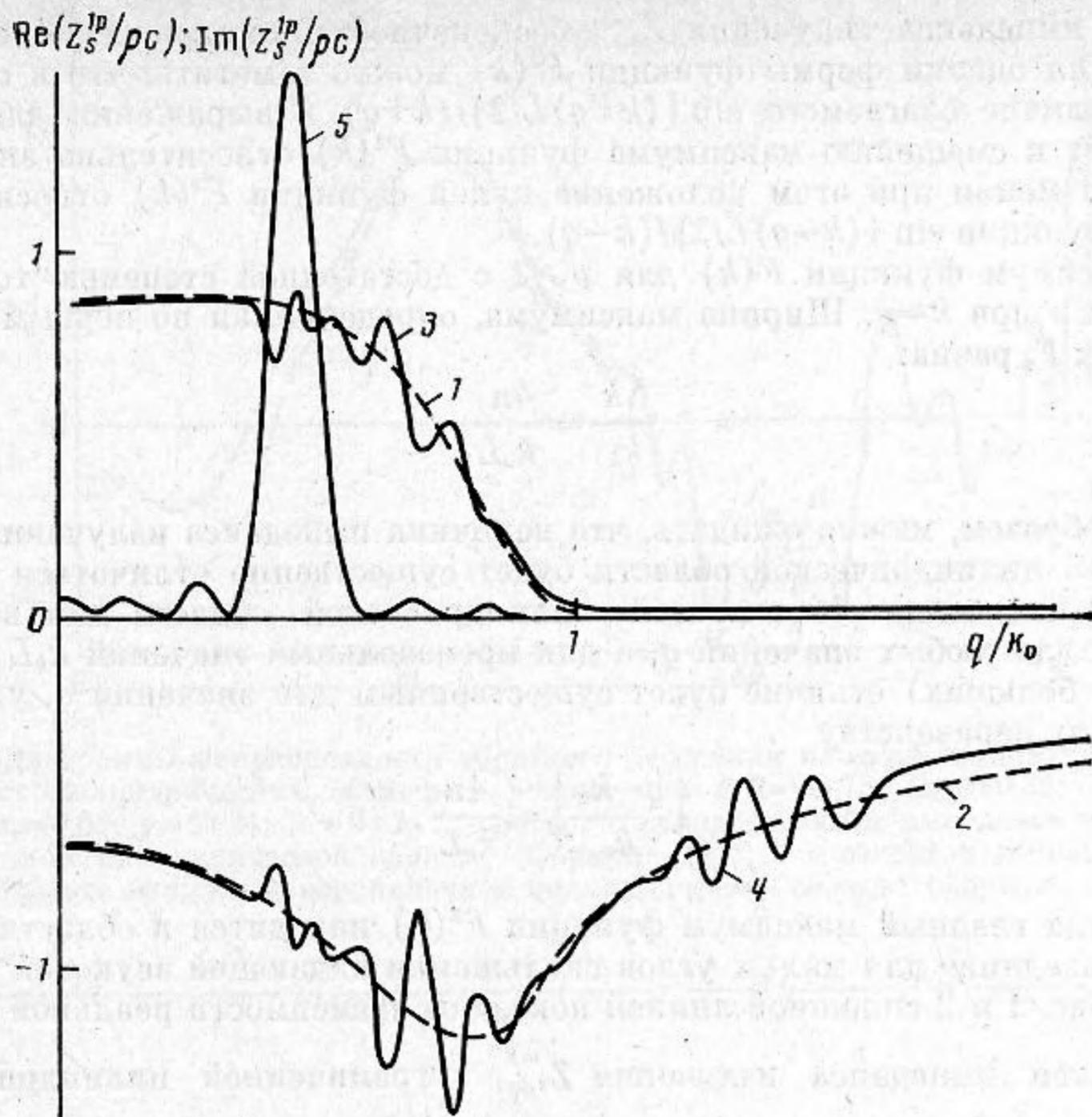


Рис. 2. Подпись аналогична подписи к рис. 1 в случае $m=1$

педанса излучения $Z_{s,огр}^{mp}$ рассмотрим поведение подынтегрального выражения в (10) при фиксированных значениях параметров k_0L и L/R в зависимости от q/k_0 .

На рис. 1 и 2 пунктиром представлены зависимости реальной и мнимой частей импеданса излучения бесконечной цилиндрической области от q/k_0 при $m=0$ и $m=1$ соответственно. Кривые рассчитаны при $k_0R=1$, $L/R=48$, $\Omega_{пр}=0,282$. Отметим, что были проведены расчеты при различных значениях параметра k_0R . Они показали, что при изменении параметра k_0R зависимости импедансов излучения бесконечной цилиндрической области от q/k_0 варьируются по форме незначительно, причем, как и следует из формулы (3), $\text{Re } Z_s^{mp}(q)=0$ при $q/k_0 > 1$.

Рассмотрим теперь зависимость от q/k_0 весовой функции F в выражении (10). На рис. 1, 2 кривыми 5 показаны зависимости функции $F^2(k)$ для $q=k_0/2$; $k_0L=48$ или, что то же самое, $q=\pi p/L$ при $p=7$. Соответствующее значение импеданса излучения ограниченной цилиндрической области $Z_{s,огр}^{mp}$ при $q=k_0/2$ согласно формуле (10) есть интеграл от произведения соответствующей зависимости 1,2 (см. рис. 1, 2) на квадрат весовой функции 5. Поэтому отличие $Z_{s,огр}^{mp}$ от импеданса Z_s^{mp} для бесконечной цилиндрической области при фиксированном значении q определяется отличием свойств весовой функции $F^2(k)$ от свойств δ -функции: $\delta(k-q)$. Как показывает анализ выражения (10) для F , это отличие определяется: во-первых, шириной главного максимума и, во-вторых, близостью максимума функции к значению $q=k_0$, где велика вторая произ-

водная импеданса излучения Z_s^{mp} бесконечной цилиндрической области по k . Для оценки формы функции $F^2(k)$ можно заметить, что в области $k > 0$ наличие слагаемого $\sin [(k+q)L/2]/(k+q)$ в выражении для $F(k)$ приводит к смещению максимума функции $F^2(k)$ относительно значения $k=q$, не меняя при этом положение нулей функции $F^2(k)$ относительно нулей функции $\sin [(k-q)L/2]/(k-q)$.

Максимум функции $F(k)$ для $p \geq 2$ с достаточной степенью точности находится при $k=q$. Ширина максимума, определяемая по первым нулям функции F , равна:

$$\frac{\Delta k}{k_0} = \frac{4\pi}{k_0 L}$$

Таким образом, можно ожидать, что величина импеданса излучения ограниченной цилиндрической области будет существенно отличаться от импеданса излучения бесконечной цилиндрической области для величин $k_0 L \lesssim 4\pi$ для любых значений q , а для произвольных значений $k_0 L$ (в том числе и больших) отличие будет существенным для значений q , удовлетворяющих неравенству

$$\left| \frac{q-k_0}{k_0} \right| \leq \frac{4\pi}{k_0 L}, \quad (11)$$

т. е. когда главный максимум функции $F^2(k)$ находится в области $k \simeq k_0$, что справедливо для малых углов скольжения падающей звуковой волны.

На рис. 1 и 2 сплошной линией показаны зависимости реальной и мнимой частей импеданса излучения $Z_{s,огр}^{mp}$ ограниченной цилиндрической области от q/k_0 , рассчитанные по формуле (10) при $m=0$ $m=1$ соответственно. Видно, что основное отличие в импедансах излучения бесконечной и ограниченной цилиндрической области наблюдается при $q \simeq k_0$, причем, как следует из (10), для любых значений $q > k_0$: $\text{Re } Z_{s,огр} \neq 0$.

Неравенство (11) задает диапазон углов скольжения, близких к нулевым. Таким образом, из него следует, что при расчете характеристик обратного рассеяния максимальное различие в диаграммах направленности, вычисленных с использованием Z_s^{mp} и $Z_{s,огр}^{mp}$, будет наблюдаться при малых углах скольжения.

На рис. 3 и 4 приведены диаграммы направленности обратного рассеяния плоской звуковой волны на стальных цилиндрических оболочках в воде. Суммирование рядов при вычислении диаграмм направленности, приведенных на рис. 3, проводилось для p от 1 до 21, для m от 0 до 2; при вычислении диаграмм направленности, приведенных на рис. 4, — для p от 1 до 36, для m от 0 до 4. Из рис. 3 и 4 видно, что отличие в диаграммах направленности, вычисленных с помощью разных формул (3) и (10), может достигать 10 Дб.

Как уже отмечалось, применение для расчета диаграмм направленности обратного рассеяния импеданса излучения Z_s^{mp} бесконечной цилиндрической области становится невозможным в случае $Z_y^{mp} + Z_s^{mp} = 0$ при $q > k_0$, т. е. когда наблюдается частотный резонанс [1]. Так, для цилиндрической оболочки с параметрами: $L/R=13,95$; $h/R=0,063$; $\nu=0,3$ на частоте $\Omega_{np}=0,5$ ($k_0 R=1,77$) в случае $m=1$ для продольной формы колебаний $p=9$ ($qR=2,02$, $q/k_0=1,44$) наблюдается частотный резонанс. На рис. 5 приведены диаграммы направленности обратного рассеяния, рассчитанные с использованием как импеданса излучения ограниченной цилиндрической области (формула (10)), так и импеданса излучения беско-

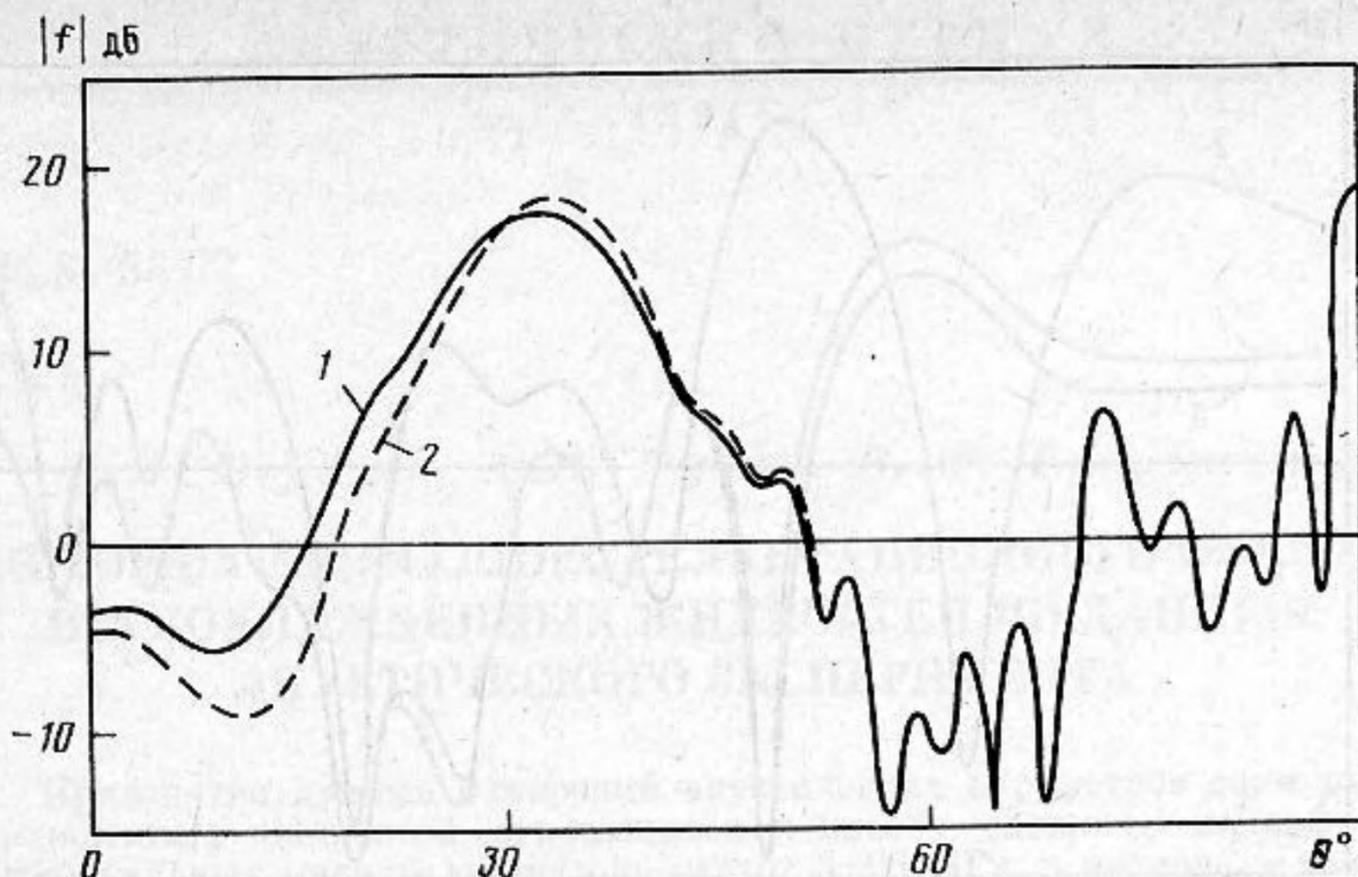


Рис. 3. Диаграммы направленности обратного рассеяния плоской звуковой волны на стальных цилиндрических оболочках в воде при $L/R=38,75$; $\Omega_{пр}=0,39$; $h/R=0,25$; $\nu=0,3$; $\eta=0,01$; $p=1\div 21$; $m=0\div 2$: 1 — расчет с использованием импеданса излучения бесконечной цилиндрической области (формула (3)), 2 — расчет с использованием импеданса излучения ограниченной цилиндрической области (формула (10))

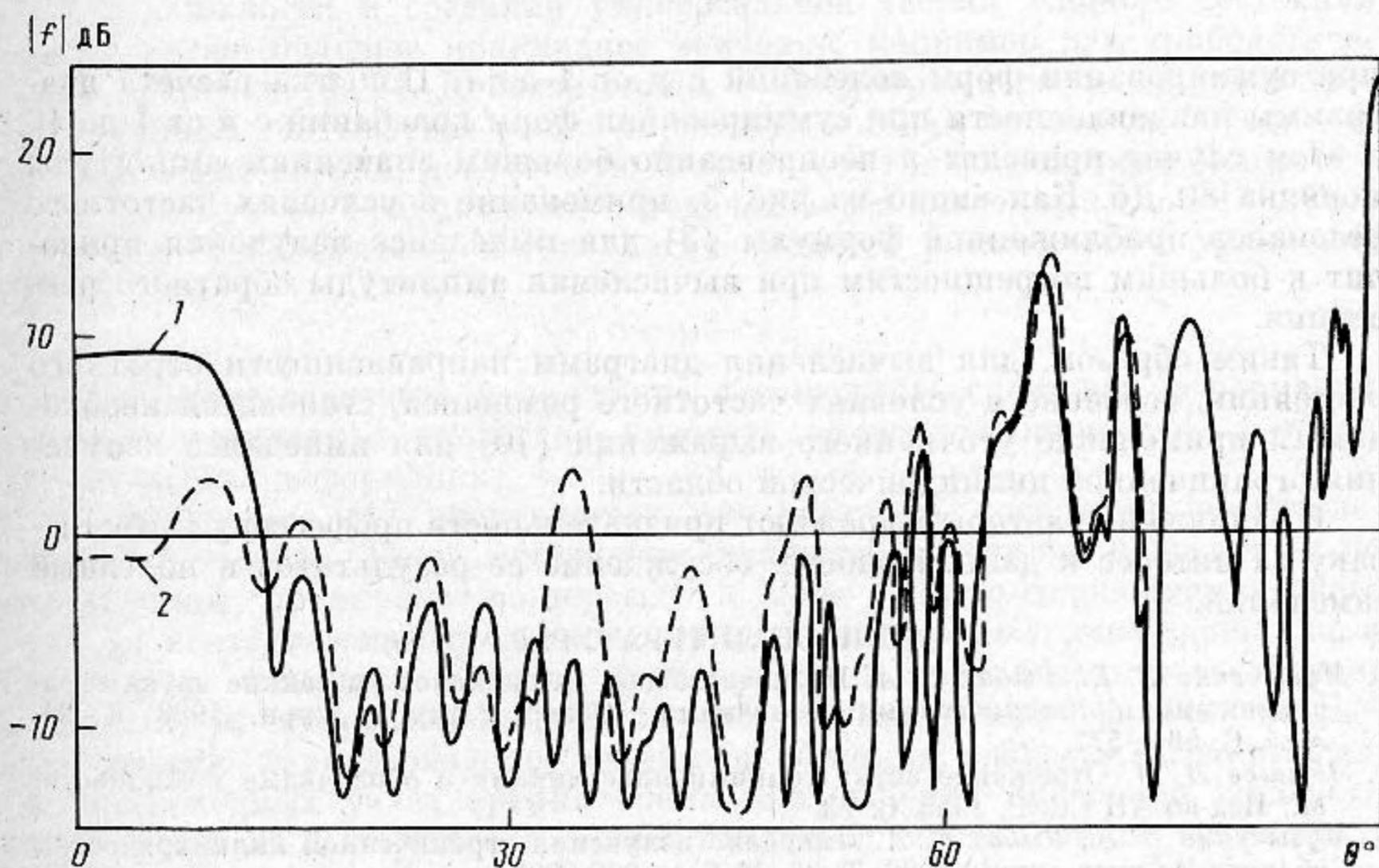


Рис. 4. Подпись аналогична подписи к рис. 3 при $L/R=22,2$; $\Omega_{пр}=1,4$; $h/R=0,0627$; $\nu=0,3$; $\eta=0,01$; $p=1\div 36$; $m=0\div 4$

нечной цилиндрической области (формула (3)). Кривая 1 на рис. 5 получена при учете форм колебаний, для которых возможны лишь пространственные и пространственно-частотные резонансы, т. е. $qR < k_0R$ (суммирование по p проводилось от 1 до 7), при расчете кривой 2 проводилось суммирование для форм колебаний с p от 1 до 16, что позволило учесть и форму колебаний, для которой происходит частотный резонанс. Для сравнения, кривой 3 показана диаграмма направленности, рассчитанная с использованием импеданса излучения бесконечной цилиндрической области Z_s^{mp}

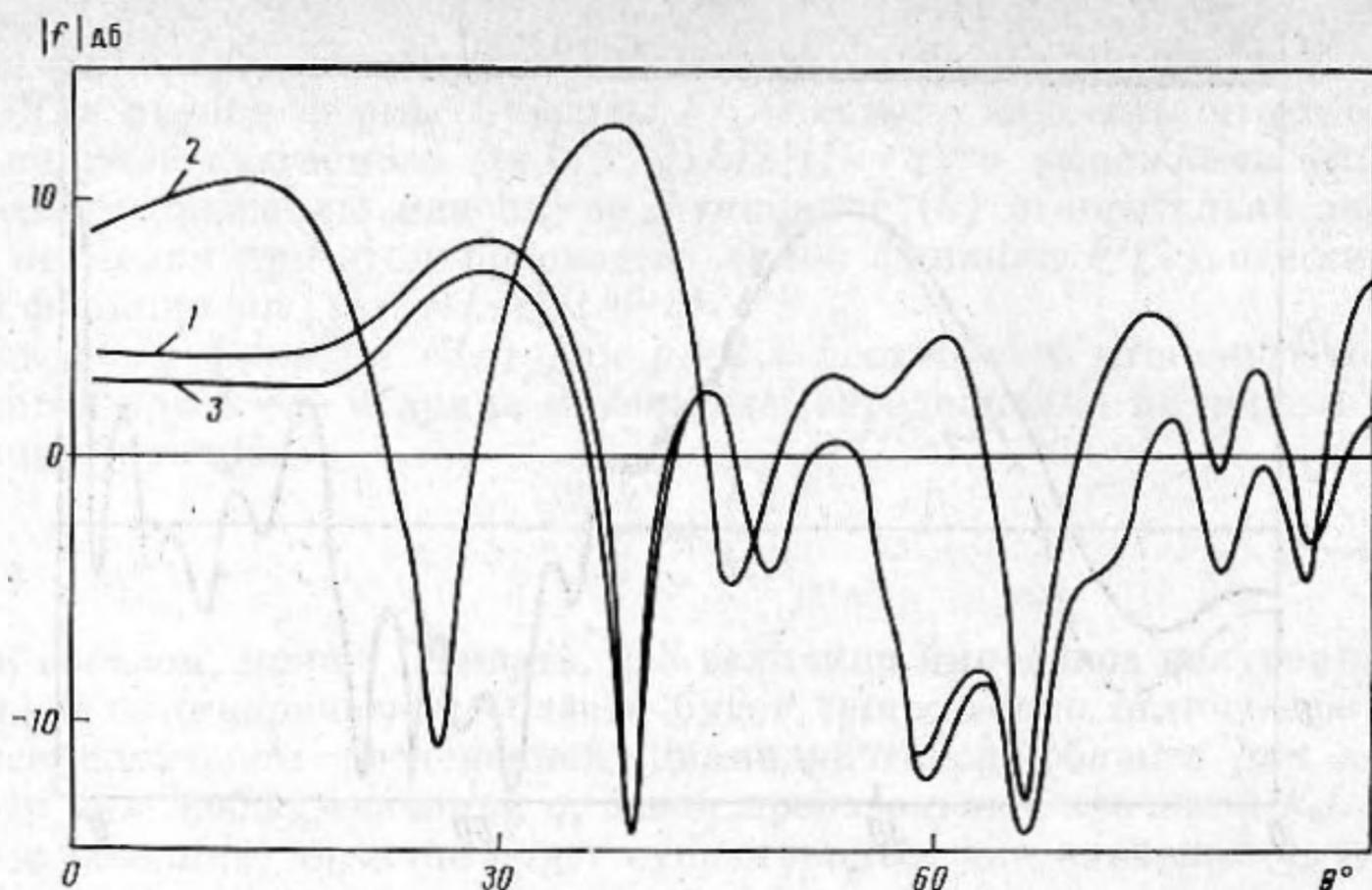


Рис. 5. Диаграмма направленности обратного рассеяния плоской звуковой волны на стальной цилиндрической оболочке в воде при $L/R=13,95$; $\Omega_{пр}=0,5$; $h/R=0,063$; $\nu=0,3$; $\eta=0,01$; $m=0\div 5$: 1 — расчет с использованием формулы (10) при $p=1\div 7$; 2 — аналогично 1 при $p=1\div 16$; 3 — расчет с использованием формулы (3) при $p=1\div 7$.

при суммировании форм колебаний с p от 1 до 7. Попытка расчета диаграммы направленности при суммировании форм колебаний с p от 1 до 16 в этом случае приводит к неоправданно большим значениям амплитуды порядка 80 Дб. Как видно из рис. 5, применение в условиях частотного резонанса приближенной формулы (3) для импеданса излучения приводит к большим погрешностям при вычислении амплитуды обратного рассеяния.

Таким образом, для вычисления диаграмм направленности обратного рассеяния, особенно в условиях частотного резонанса, становится необходимым применение уточненного выражения (10) для импеданса излучения ограниченной цилиндрической области.

В заключение авторы выражают признательность профессору С. А. Рыбаку за интерес к данной работе, обсуждение ее результатов и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Музыченко В. В., Рыбак С. А. Низкочастотное резонансное рассеяние звука ограниченными цилиндрическими оболочками (Обзор) // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 4. С. 561—577.
2. Лямшев Л. М. Отражение звука тонкими пластинками и оболочками в жидкости. М.: Изд-во АН СССР, 1955. С. 73.
3. Музыченко В. В., Рыбак С. А. Импеданс излучения ограниченной цилиндрической области // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 5. С. 898—902.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
18.05.90

A. S. Belogortsev, V. V. Muzychenko

INFLUENCE OF A RESTRICTION OF A CYLINDRICAL SHELL ON A BACKSCATTERING AMPLITUDE

Radiation impedance of a limited cylindrical area is calculated. It is shown that use of the radiation impedance of an infinite cylindrical area for a determination of a backscattering amplitude in some cases results in large errors. The expression obtained for the radiation impedance is free of these shortcomings.