

УДК 534.222

© 1991 г.

*В. В. Зосимов, А. В. Панасюк*

## НЕЛИНЕЙНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В ЗАЖАТОЙ ПРУЖИНЕ

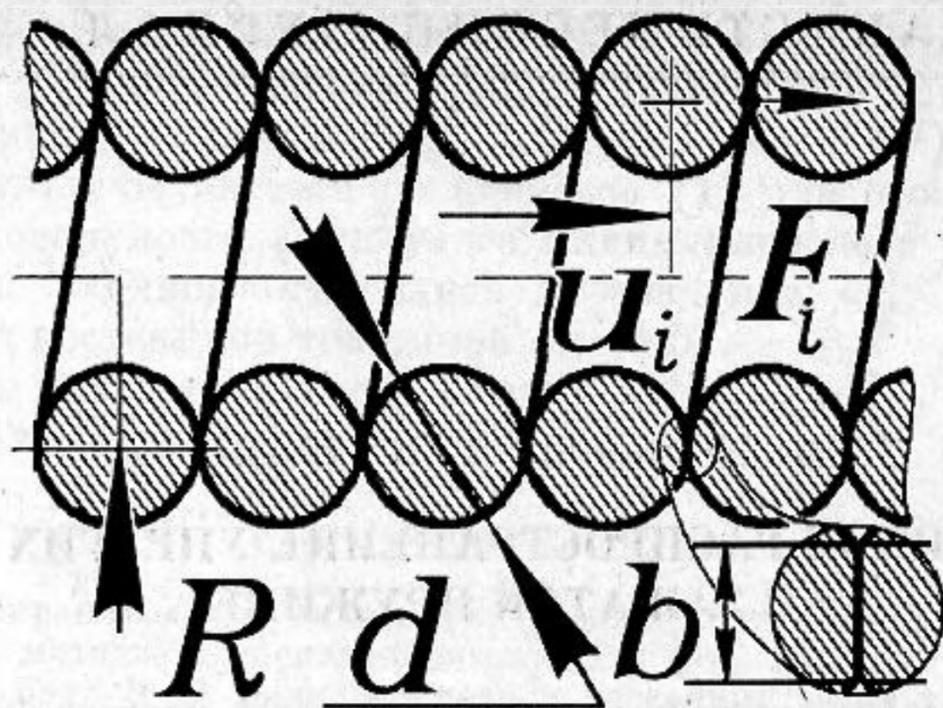
Рассматриваются особенности распространения упругих волн в искусственно созданной одномерной среде с контактной нелинейностью и возможности применения такой среды для решения прикладных задач, в частности в системах параметрического усиления.

Развитие идей и методов нелинейной акустики повышает интерес к средам и системам, обладающим высокой акустической нелинейностью. Это может быть, в частности, контактная нелинейность, которая обуславливается двумя существенно различными механизмами. Первый из них заключается в периодическом нарушении контакта между поверхностями, что приводит к разномодульности [1] системы. Это явление, которое может вызываться, в частности, появлением микротрещин в исследуемой среде, рассмотрено как теоретически [2], так и экспериментально [3]. Исследован также процесс нелинейного распространения акустических волн в подобных средах [4]. Контактная нелинейность этого типа в данной работе не рассматривается.

При рассмотрении второго механизма предполагается, что внешнее давление, приложенное к системе, достаточно велико, чтобы предотвратить нарушение контакта между поверхностями, и нелинейность в данном случае обуславливается зависимостью площади контакта от приложенной к контакту нагрузки [5]. Этот механизм наиболее изучен для упругих волн в зернистых средах, где взаимодействие между гранулами описывается законом Герца [6]. В данной работе изучаются аналогичные эффекты в зажатой пружине — искусственной одномерной среде с другими соотношениями нелинейности, характеризующейся большим эффективным параметром нелинейности и технологичностью. Подобная система может служить исследовательской моделью одномерной нелинейной акустической среды, а также элементом нелинейно-акустических устройств.

Исследование распространения акустических сигналов в зажатой пружине будем проводить исходя из следующих предположений: толщина витка пружины  $d$  мала по сравнению с длиной распространяющейся волны; максимальные напряжения, возникающие в точках контакта, много меньше предела упругости материала пружины; внешняя сжимающая сила достаточна для того, чтобы предотвратить нарушение контакта между витками пружины. Начнем с дискретного описания. Пусть  $u_i$  — смещение  $i$ -го витка пружины,  $F_i$  — сила, действующая между  $i$ -м и  $i+1$ -м витками (см. рисунок). Тогда  $u_i - u_{i-1} = df(F_i)$ , где  $f$  — функция, характеризующая механизм контакта, а уравнение движения записывается в виде  $\partial^2 u_i / \partial t^2 m = F_i - F_{i+1}$ , где  $m$  — масса одного витка пружины.

В предположении, что радиус пружины много больше ширины полосы контакта между витками, которое заведомо выполняется, рассматриваемая контактная задача аналогична задаче о сдавливании бесконечного цилиндра двумя абсолютно жесткими плоскостями. Согласно [7], вели-



Схематическое изображение нелинейного элемента

чина деформации в такой системе дается выражением  $\Delta d = 2F(1-\sigma^2) \times (2 \ln(4d/b) - 1) / (\pi E)$ , где  $\sigma$ ,  $E$  — соответственно коэффициент Пуассона и модуль упругости материала цилиндра;  $d$  — диаметр цилиндра;  $b$  — ширина полосы контакта [5] (см. рисунок):  $b = 2((1-\sigma^2)Fd / (2\pi E))^{1/2}$ .

Обозначим  $F_0 = 8\pi Ed / ((1-\sigma^2)e)$  (здесь и далее  $e$  — основание натуральных логарифмов), тогда для пружины из этих выражений получаем  $f(F_i) = -\xi \ln(F_i/F_0) F_i/F_0$ , где  $\xi = 16/e \approx 6$ .

Перейдем теперь от дискретного к непрерывному описанию элемента, сохраняя производные второго порядка по продольной координате, чтобы учесть дисперсию системы. Введем непрерывные функции  $u(x)$  и  $F(x)$ , соответствующие  $u_i$  и  $F_i$  для дискретного случая. Раскладывая разности в левых частях уравнений в ряд Тейлора до второго порядка, получаем систему уравнений, описывающих динамику системы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{d}{2} &= \xi \frac{F}{F_0} \ln\left(\frac{F}{F_0}\right) = f(F); \\ -\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{d}{2} &= \frac{m}{Ld} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $L$  — длина витка пружины.

Введем безразмерную переменную  $q = F/F_0 - q_s$ , где  $q_s$  характеризует начальное сжатие пружины, «плотность»  $\rho = m/Ld$  и коэффициент нелинейности  $\varepsilon = -1/(q_s(1 + \ln(q_s)))$ . Тогда из (1) получим волновое уравнение для  $q$ :

$$-\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 q}{\partial x^4} \frac{d^2}{4} = \frac{\rho}{F_0} \frac{\partial^2 f(q+q_s)}{\partial t^2}. \quad (2)$$

В пренебрежении нелинейными эффектами и дисперсией приведенное уравнение описывает распространение волновых возмущений со скоростью, которую можно определить из соотношения  $v_0 = (\varepsilon q_s F_0 / (\rho \xi))^{1/2}$ . Скорость  $v_0$  следующим образом связана со скоростью продольных волн в материале пружины  $v_p$ :

$$v_0 = v_p \left( \frac{2(1-2\sigma)\varepsilon q_s}{(1-\sigma)^2} \right)^{1/2} \approx v_p (2\varepsilon q_s)^{1/2}. \quad (3)$$

Заметим, что зависимость от величины начального сжатия пружины  $q_s$  теоретически дает возможность варьировать скорость импульсов в широких пределах.

Рассмотрим теперь акустические импульсы, распространяющиеся в положительном направлении оси  $x$ . Введем безразмерную «бегущую» координату  $z = (x - v_0 t)/d$  и безразмерное время  $\tau = t v_0/d$ . При преобразовании к новым координатам в соответствии с методом медленно меняющихся амплитуд пренебрежем старшими производными по  $\tau$ . Таким образом, после интегрирования по  $z$  получаем

$$-\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial^3 q}{\partial z^3} \frac{1}{4} = -\frac{(1 - \ln(q - q_s))}{(1 + \ln(q_s))} \left( -2 \frac{\partial q}{\partial \tau} + \frac{\partial q}{\partial z} \right). \quad (4)$$

Исходя из условия  $q \ll q_s$ , пренебрежем степенями  $q$  выше второй. В результате получим уравнение вида

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} - \varepsilon \frac{q}{2} \frac{\partial q}{\partial z} - \frac{1}{4} \frac{\partial^3 q}{\partial z^3} = 0,$$

которое только коэффициентами отличается от уравнения КдФ и имеет односолитонные решения вида

$$q = -\frac{12\kappa^2}{\varepsilon \operatorname{ch}^2(2\kappa(z + 2\kappa^2\tau - \Phi))}, \quad (5)$$

где  $\Phi$  соответствует начальному положению вершины солитона, а  $\kappa$  — произвольный коэффициент, определяющий форму солитона. Такой вид импульса может быть практически реализован заданием соответствующих краевых условий на торцах пружины. Отметим также, что  $q$  всегда меньше нуля, т. е. импульс представляет собой импульс растяжения.

При оценке достижимых параметров системы, в частности ее коэффициента нелинейности, необходимо учитывать возможность достижения напряжениями в точках контакта предела упругости. Оценить предельную величину  $q$ , при которой напряжение в точке контакта достигает максимально допустимого значения, не сложно. В работе [8] приведена следующая формула для зависимости максимального напряжения в цилиндре от действующей на него сдвигивающей силы:  $P = 2(\pi E F / ((1 - \sigma^2)r))^{1/2}$ . Считая, что коэффициент Пуассона  $\sigma$  приблизительно равен  $1/3$ , что справедливо для большинства металлов, это соотношение можно привести к виду  $P \approx 16E q^{1/2}$ . Отсюда можно найти максимально допустимую величину  $q$ :  $q_{\max} = (S/(16E))^2$ . Здесь  $S$  — предел упругости. Отношение  $S/E$  для большинства представляющих интерес материалов приблизительно равно  $10^{-3}$ , что дает величину  $q_{\max}$  порядка  $10^{-8}$ . Соответственно величина  $\ln(q_{\max})$  мало отличается от  $-15$ , а эффективный параметр нелинейности  $\varepsilon$  достигает величины  $10^7$ . Этими числами и будем руководствоваться в дальнейшем для определения интересующих параметров системы.

Поскольку амплитуда импульса растяжения не может быть больше начального сжатия пружины  $q_s$ , следует выбрать последнюю величину возможно большей  $q_s = q_{\max}$ ,  $\ln(q_s) \approx -15$ . Тогда согласно (3) максимальная скорость  $v_{\max}$  линейных волн в пружине  $v_{\max} \approx v_p/3$ .

Оценим теперь параметры солитона (5). Из соотношения  $q \ll q_s$  следует, что  $\kappa \leq 0,075$ . Это ограничение дает минимальную ширину солитона  $\lambda_{\min} = 1/(2\kappa) \approx 7$ , что при переходе к размерным величинам определяет характерную длину импульса равной  $7d$ . Это соотношение доказывает, что допущения, принятые при выводе системы (1), справедливы. Максимальная скорость солитона относительно движущейся системы отсчета равна  $v_{\text{rel}} = 2\kappa^2 v_0 \leq 0,01 v_0$ , что доказывает применимость метода медленно меняющихся амплитуд.

В качестве другого примера нелинейных процессов рассмотрим параметрическое усиление, представляющее интерес для прикладных задач.

В большинстве нелинейных сред этот эффект ограничивается конкурирующими процессами, в частности генерацией гармоник. Наличие в рассматриваемой системе высокой дисперсии позволяет предположить, что генерация гармоник в ней происходит слабо и можно достичь достаточно высокого коэффициента параметрического усиления.

Рассмотрим два параллельно протекающих процесса — генерацию второй гармоники и усиление сигнала с частотой, в 2 раза меньшей, чем частота опорной волны. Высокая дисперсия позволяет пренебречь эффектом генерации высших гармоник. Процессы будем рассматривать в установившемся режиме в приближении медленно меняющихся амплитуд (ММА).

В нелинейной части уравнения (2) оставим лишь члены не выше второго порядка по  $q$ . Сделаем замену переменных  $\psi = q/q_s$ ,  $y = x/d$ ,  $\tau = v_0 t/d$ . Теперь уравнение будет иметь следующий вид:

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \frac{1}{4} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} = \frac{\epsilon^2}{2} \frac{\partial^2 \psi^2}{\partial \tau^2}.$$

В соответствии с ММА гармоническую волну представим в виде  $\psi = \varphi(y) \exp(-i\omega\tau +iky)$ , ( $|\partial\varphi/\partial y| \ll |k\varphi|$ ), тогда дисперсионное соотношение в линейном приближении будет выражаться формулой  $k^2 + k^4/4 - \omega^2 = 0$ .

Будем учитывать взаимодействие трех волн: опорной волны  $\psi_0 = \varphi_0(y) \exp(-i\omega\tau + ik_0 y)$ , ее второй гармоники  $\psi_g = \varphi_g(y) \exp(-2i\omega\tau + ik_g y)$  и волны сигнала  $\psi_s = \varphi_s(y) \exp(-i\omega\tau/2 + ik_s y)$ . Предположим, что для малой амплитуды волны сигнала перетеканием в нее энергии из опорной волны можно пренебречь. В этом случае система уравнений для медленно меняющихся амплитуд имеет вид:

$$\varphi_g' = -i\alpha_g \varphi_0^2 \exp(i\delta_g y), \quad (6)$$

$$\varphi_0' = -i\alpha_0 \varphi_g \varphi_0^* \exp(-i\delta_g y), \quad (7)$$

$$\varphi_s' = -i\alpha_s \varphi_0 \varphi_s^* \exp(-i\delta_s y), \quad (8)$$

где  $\alpha_g = 2\omega^2 \epsilon^2 / (2k_g + k_g^3)$ ;  $\alpha_0 = \omega^2 \epsilon^2 / (4k_0 + 2k_0^3)$ ;  $\alpha_s = \omega^2 \epsilon^2 / (16k_0 + 8k_0^3)$ ;  $\delta_g = 2k_0 - k_g$ ;  $\delta_s = 2k_s - k_0$ .

Звездочка означает комплексное сопряжение. Система из первых двух уравнений может быть решена независимо от третьего. Заметим, что для нее справедлив «закон сохранения»:  $\alpha_g I_0' + \alpha_0 I_g' = 0$ , где  $I_i = \varphi_i \varphi_i^*$ . Здесь и далее штрих означает дифференцирование по  $y$ . Приняв, что во входном сечении пружины (при  $y=0$ ) гармоника отсутствует, а амплитуда опорной волны равна  $J$ , получим следующее выражение для «интенсивностей»:  $\alpha_g (J - I_0) = \alpha_0 I_g$ .

Дальнейшее рассмотрение будем проводить отдельно для случая относительно высоких  $\omega \approx 1$  и низких  $\omega \ll 1$  частот. Во втором случае дисперсия невелика и нелинейные эффекты приводят к быстрому распаду и затуханию опорной волны. Для рассматриваемого случая характерный пространственный масштаб этого процесса:  $\lambda_a = (\alpha_g \alpha_0 J)^{-1/2} \approx \lambda_0 / (2\epsilon^2 J^{1/2})$ , где  $\lambda_0$  — длина волны опорных колебаний. Коэффициент параметрического усиления в этом случае ограничивается сверху величиной:  $K_y \leq \exp(\pi \alpha_s / (4\alpha_0 \alpha_g)^{1/2})$ .

В первом случае из уравнений (6) и (7) получаем, что максимальное значение амплитуды гармоники ограничено величиной  $r_g \approx 2\alpha_g J / \delta_g \ll J^{1/2}$ . Последнее соотношение говорит о том, что эффективность генерации второй гармоники очень мала и, следовательно, эффект перекачки опорной волны в гармонику можно не учитывать. Решая в этом приближении уравнение (8), получаем систему уравнений для действительной амплитуды и фазы

усиливаемой волны  $\varphi_s = r_s \exp(i\theta_s)$ :

$$\begin{aligned} r_s' / r_s &= \alpha_s J^{1/2} \sin(\delta_s y - 2\theta_s), \\ \theta_s' &= -\alpha_s J^{1/2} \cos(\delta_s y - 2\theta_s). \end{aligned} \quad (9)$$

Второе уравнение решается без особенных сложностей, приводя к следующим выражениям:  $\sin(\delta_s y - 2\theta_s) = 2\eta / (1 - \eta^2)$ ,  $\eta = ((\gamma + 1) / (\gamma - 1))^{1/2} \operatorname{tg}((\gamma^2 - 1)^{1/2} (y - y_0) \alpha_s J^{1/2})$ , где  $\gamma = \delta_s / (2\alpha_s J^{1/2}) > 1$ , а  $y_0$  — произвольная константа.

Проинтегрировав уравнение (9), получим выражение

$$r_s = r_0 \left( \frac{1 + v(\gamma + 1) / (\gamma - 1)}{1 + v} \right)^{1/2},$$

где

$$v = \operatorname{tg}^2((\gamma^2 - 1)^{1/2} y \alpha_s J^{1/2}).$$

Как видно, амплитуда усиливаемой волны изменяется периодически с пространственным периодом  $\lambda_s = \pi / (\delta_s^2 / 4 - \alpha_s^2 J)^{1/2}$ , достигая минимального значения  $r_0$  и максимального

$$r_{\max} = r_0 \left( \frac{(\delta_s^2 / 4 + \alpha_s^2 J)}{(\delta_s^2 / 4 - \alpha_s^2 J)} \right)^{1/2} \approx r_0 \frac{\alpha_s}{\pi} (2J)^{1/2} \lambda_s,$$

где последнее приближенное равенство справедливо для коэффициентов усиления, существенно превосходящих единицу. Следовательно, коэффициент усиления на толщине витка проволоки достигает величины  $1 + \alpha_s (2J)^{1/2} / \pi \approx 1,01$ .

Таким образом показано, что контактная нелинейность проявляется в разнообразных нелинейных эффектах при распространении одномерных упругих волн в специальной среде — зажатой пружине. В отличие от рассмотренных ранее [6] нелинейных эффектов в зернистых одномерных средах приведенные выше результаты могут иметь перспективные приложения в ультразвуковой технике в силу простоты реализации нелинейной среды.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амбарцумян С. А. Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982.
2. Buck O., Morris W. L., Richardson J. M. Acoustic harmonic generation at unbonded interfaces and fatigue cracks // Appl. Phys. Lett. 1978. V. 33. № 5. P. 371–375.
3. Morris W. L., Buck O., Inman R. V. Acoustic harmonic generation due to fatigue damage in high-strength aluminium // J. Appl. Phys. 1979. V. 50. № 11. P. 6737–6741.
4. Назаров В. Е., Сугин А. М. Генерация гармоник при распространении упругих волн в твердых нелинейных средах. // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 4. С. 711–716.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М.: Наука, 1987.
6. Нестеренко В. Ф. Распространение импульсов сжатия в зернистых средах // ЖПМТФ. 1983. № 5. С. 136–148.
7. Johnson K. L. Contact mechanics. N. Y.: Cambridge University Press, 1987.
8. Тимошенко С. П. Теория упругости. М.: Гостехиздат, 1937.

Акустический институт  
им. Н. Н. Андреева  
Академии наук СССР

Поступила в редакцию  
08.02.90

*V. V. Zosimov, A. V. Panasyuk*

#### NONLINEAR PROPAGATION OF ELASTIC WAVES IN A SQUEEZED SPRING

Features of an elastic wave propagation in an artificial one-dimensional medium with a contact nonlinearity are considered. Possible applications of such media for the solution of applied problems, particularly, problems of a parametric amplifier are discussed.