АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 37 1991 Вып. 2

УДК 517.9 : 534+539.55

© 1991 г.

В. Н. Крутин, М. В. Федорюк

СМЕШАННЫЕ КОРОТКО-ДЛИННОВОЛНОВЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ И КОЛЕБАНИЙ ТЕЛ В ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ

Построены процедуры получения асимптотических разложений решений двумерных задач дифракции и колебаний произвольного гладкого выпуклого бесконечного цилиндра в безграничной однородной изотропной вязкоупругой жидкости для случая, когда длина продольной волны значительно больше, а поперечной – значительно меньше характерного размера тела. На примере эллиптического цилиндра охарактеризовано влияние формы тела на тензор импеданса окружающей его жидкости, поперечники поглощения и рассеяния.

Пусть ограниченное тело $\bar{D}$ с гладкой выпуклой границей Г окружено безграничной изотропной однородной вязкоупругой сжимаемой жидкостью. Рассматриваются малые гармонические колебания; фактор $\exp(-i\omega t)$ далее опущен. Поле $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ комплексных амплитуд скорости жидкости удовлетворяет системе

$$[k_t^{-2}\Delta+(k_l^{-2}-k_t^{-2})\operatorname{grad}\operatorname{div}+I]\,\mathbf{v}(\mathbf{r})=0 \tag{1}$$

во внешности D тела $\bar{D}$. Здесь $k_l=\omega/c_l$, $k_t=\sqrt{i\omega/\nu}$ – волновые числа продольных и поперечных волн в жидкости, c_l – комплексная скорость распространения продольных волн, ν – комплексная частотно-зависимая кинематическая вязкость жидкости с плотностью ρ [1, 9].

В широком диапазоне частот выполняются условия $|k_l|d\ll 1$, $|k_t|d\gg 1$ (где d – характерный размер тела), позволяющие использовать смешанные коротко-длинноволновые приближения [2]. Положим

$$\mathbf{v}(\mathbf{r})=\nabla\varphi(\mathbf{r})+(\partial\psi(\mathbf{r})/\partial x_2,\ -\partial\psi(\mathbf{r})/\partial x_1)^T, \tag{2}$$

где x_1, x_2 – декартовы координаты, $(0,\ 0)\in\bar{D}$, ^{T} – оператор транспонирования. Тогда из (1) следует, что

$$(\Delta+k_l^2)\varphi(\mathbf{r})=0,\ (\Delta+k_t^2)\psi(\mathbf{r})=0,\ \mathbf{r}\in D. \tag{3}$$

Скалярный потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ ищем методом сращивания асимптотических разложений [4–6], представив поля в ближней и дальней зонах в виде следующих асимптотических рядов:

$$\varphi(\mathbf{r})=\sum_{m,n=0}^{\infty}\varepsilon_1^m\varepsilon_2^n[\varphi_{mn}(\mathbf{r})+\ln\varepsilon_1\varphi_{mn}^1(\mathbf{r})], \tag{4}$$

$$\varphi(\mathbf{r})=\sum_{m,n=0}^{\infty}\varepsilon_1^m\varepsilon_2^n\chi_{mn}(\mathbf{r}),\qquad \mathbf{r}\in D \tag{5}$$

где $\varepsilon_1=k_l$, $\varepsilon_2=k_t^{-1}$ – малые параметры. Подставив (4) в первое урав-

нение (3), приходим к рекуррентной последовательности уравнений Лапласа и Пуассона для внутренних приближений различного порядка:

$$\Delta\varphi_{0n}=0,\ \Delta\varphi_{1n}=0,\ \Delta\varphi_{mn}=-\varphi_{m-2,\,n},\ (m\geqslant 2),$$
$$\Delta\varphi_{0n}^{1}=0,\quad \Delta\varphi_{1n}^{1}=0,\quad \Delta\varphi_{mn}^{1}=-\varphi_{m-2,n}^{1}\quad (m\geqslant 2). \tag{6}$$

Члены внутреннего разложения φ_{mn} должны удовлетворять соответствующим условиям на Г и совпадать с внешними разложениями в промежуточной зоне $r/d\gg 1$, $|k_l|r\ll 1$. Члены внешнего разложения χ_{mn} удовлетворяют первому уравнению (3), условиям погашаемости на бесконечности и могут быть представлены в виде линейной комбинации функции Грина уравнения Гельмгольца (4) $G(\mathbf{r})=-\frac{i}{4}H_0^{(1)}(k_l r)$ и ее производных различного порядка по координатам x_1 и x_2 [6]. Сращивание внешних и внутренних разложений различного порядка производится в промежуточной зоне.

Векторный потенциал ищем в виде следующего лучевого ряда:

$$\psi(\mathbf{r})=\frac{1}{ik_t}\exp[ik_t\tau(\mathbf{r})]\sum_{m,n=0}^{\infty}\varepsilon_1^m\varepsilon_2^n[\psi_{mn}(\mathbf{r})+\ln\varepsilon_1\psi_{mn}^{1}(\mathbf{r})]. \tag{7}$$

Используя второе уравнение (3), приходим к уравнениям эйконала и переноса:

$$(\nabla\tau)^2=1{,}2(\nabla\tau,\ \nabla\psi_{mn})+\Delta\tau\psi_{mn}=-\Delta\psi_{m,\,n-1},\ \psi_{m,\,-1}\equiv 0. \tag{8}$$

Функция $\tau(\mathbf{r})$ удовлетворяет граничным условиям $\tau(\mathbf{r})|_\Gamma=0$, $\nabla\tau(\mathbf{r})|_\Gamma=\mathbf{n}$, где $\mathbf{n}=(n_1,\ n_2)^T$ — единичный вектор внешней нормали к Г, определенный уравнением $\mathbf{r}=\mathbf{r}^0(\alpha)+\tau\mathbf{n}(\alpha)$, причем α, τ — лучевые координаты. В лучевых координатах имеем [3]: $\tau(\mathbf{r})=(\mathbf{r}-\mathbf{r}^0(\alpha),\ \mathbf{n}(\alpha))$.

Для задачи о колебаниях тела в жидкости на Г задана колебательная скорость

$$\mathbf{v}(\mathbf{r})|_\Gamma=\mathbf{v}^0(\mathbf{r}), \tag{9}$$

а на бесконечности должно выполняться условие погашаемости при $\operatorname{Im}k_i>0$, $\operatorname{Im}k_l>0$.

Умножая (2) скалярно на $\mathbf{n}$ и единичный вектор касательной $\mathbf{s}=(-n_2,\ n_1)^T$ к Г, с учетом (9) получаем

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)\Bigg|_\Gamma=(\mathbf{v}^0,\mathbf{n});\quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}+\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_\Gamma=(\mathbf{v}^0,\mathbf{s}). \tag{10}$$

Из (10), (4) находим, что на Г

$$\nabla\varphi_{00}(\mathbf{r})+\psi_{00}(\mathbf{r})\mathbf{s}=\mathbf{v}^0(\mathbf{r}),$$
$$\frac{\partial\varphi_{00}}{\partial n}=(\mathbf{v}^0,\mathbf{n}),\quad \frac{\partial\varphi_{mn}^{1}}{\partial n}=0, \tag{11}$$
$$\psi_{00}=((\mathbf{v}^0-\nabla\varphi_{00}),\mathbf{s})=(\mathbf{v}^0,\mathbf{s})-\frac{\partial\varphi_{00}}{\partial s}.$$

Полная погонная объемная скорость Q на теле равна

$$Q=\oint_\Gamma(\mathbf{v}^0,\mathbf{n})ds. \tag{12}$$

1. Пусть $Q=0$. Тогда решение задачи Неймана (6), (11) для $\varphi_{00}(r)$ с условием $\varphi_{00}(\infty)=0$ существует, единственно и

$$\varphi_{00}(\mathbf{r})=a_1\frac{x_1}{r^2}+a_2\frac{x_2}{r^2}+O\left(\frac{1}{r^2}\right),\quad r\to\infty. \tag{13}$$

Функция χ_{00} строится так же, как и в [6]:

$$\chi_{00}(\mathbf{r})=\frac{\pi a_1}{2i}\frac{\partial}{\partial x_1}H_0^{(1)}(k_l r)+\frac{\pi a_2}{2i}\frac{\partial}{\partial x_2}H_0^{(1)}(k_l r). \tag{14}$$

Положим $\varphi_{00}^{(1)}(\mathbf{r})\equiv 0$. Определив решение задачи Неймана для $\varphi_{00}(\mathbf{r})$, из (11) находим ψ_{00} на Г, а затем, решая уравнение переноса (8) для $\psi_{00}(\mathbf{r})$, имеем

$$\psi_{00}(\alpha,\ \tau)=\psi_{00}(\alpha,\ 0)\sqrt{R(\alpha)/[R(\alpha)+\tau]}, \tag{15}$$

где $R(\alpha)$ — радиус кривизны контура Г в точке $\mathbf{r}=\mathbf{r}^0(\alpha)$.

Функция $\varphi_{00}(\mathbf{r})$ вычисляется в квадратурах, если известно конформное отображение области D на единичный круг (см. [7]).

Члены разложений (4), (7) определяются в следующем порядке:

$$\tau\to(\varphi_{00},\ \varphi_{00}^1)\to(\chi_{00},\ \psi_{00})\to(\varphi_{10},\ \varphi_{10}^1,\ \varphi_{01},$$
$$\varphi_{01}^1)\to(\chi_{10},\ \chi_{01})\to(\psi_{00}^1,\ \psi_{10}^1,\ \psi_{01},\ \psi_{01}^1)\to\ldots$$

Построим второе приближение. Подставляя разложения (4), (7) в первое из граничных условий (1), получаем на Г

$$\frac{\partial\varphi_{10}}{\partial n}=\frac{\partial\varphi_{10}^1}{\partial n}=\frac{\partial\varphi_{01}^1}{\partial n}=0,\quad \frac{\partial\varphi_{01}}{\partial n}=-i\frac{\partial\psi_{00}}{\partial s},\quad \frac{\partial\varphi_{01}^1}{\partial n}=-i\frac{\partial\psi_{00}^1}{\partial s},$$

положим $\varphi_{10}(\mathbf{r})=\varphi_{10}^1(\mathbf{r})=\varphi_{01}^1(\mathbf{r})=\chi_{10}(\mathbf{r})=0$. Из второго граничного условия (11) следует, что на Г

$$\psi_{00}^1=0,\quad \psi_{10}=\psi_{10}^1=0,\quad \frac{\partial\varphi_{01}}{\partial s}+\psi_{01}-i\frac{\partial\psi_{00}}{\partial n}=0,$$
$$\psi_{01}^1=i\frac{\partial\psi_{00}}{\partial n}. \tag{16}$$

Так как функция ψ_{00}^1 удовлетворяет однородному уравнению переноса, то для нее справедлива формула вида (15). Поскольку $\psi_{00}^1=0$ на Г, то $\psi_{00}^1(\mathbf{r})\equiv 0$, так что $\partial\varphi_{01}^1/\partial n|_{\Gamma}=0$. Поэтому положим $\varphi_{00}^1(\mathbf{r})\equiv 0$. Имеем далее

$$\Delta\varphi_{01}(\mathbf{r})=0,\quad \mathbf{r}\in D,\quad \left.\frac{\partial\varphi_{01}}{\partial n}\right|_{\Gamma}=-i\left.\frac{\partial\psi_{00}}{\partial s}\right|_{\Gamma},\quad \varphi_{01}(\infty)=0. \tag{17}$$

Так как $\oint(\partial\psi_{00}/\partial s)\,ds=0$, то задача (17) с граничным условием $\varphi_{01}^{\Gamma}(\infty)=0$ однозначно разрешима и

$$\varphi_{01}(\mathbf{r})=b_1\frac{x_1}{r^2}+b_2\frac{x_2}{r^2}+O\left(\frac{1}{r^2}\right),\quad r\to\infty, \tag{18}$$
$$\chi_{01}(\mathbf{r})=(\pi/2i)\,(b_1\partial/\partial x_1+b_2\partial/\partial x_2)H_0^{(1)}(k_l r).$$

Из (16) находим ψ_{01} на Г, а из уравнения переноса — $\psi_{01}(\mathbf{r})$ в области D. Таким образом, с точностью до членов порядка $\varepsilon_1^2\ln\varepsilon_1$, $\varepsilon_2^2\ln\varepsilon_1$ имеем

$$\psi(\mathbf{r})=\frac{1}{ik_l}e^{ik_l\tau(\mathbf{r})}\psi_{00}(\mathbf{r}),\quad \varphi(\mathbf{r})=\varphi_{00}(\mathbf{r})+\frac{1}{k_l}\varphi_{01}(\mathbf{r}),$$

где для φ берется внутреннее разложение. Поэтому вектор напряжений на Γ равен

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) \simeq -i\omega\rho[\varphi_{00}+k_t^{-1}\varphi_{01}]\mathbf{n}-\omega\rho k_t^{-1}\psi_{00}\mathbf{s}= \\ =-i\omega\rho\varphi_{00}\mathbf{n}-Z_0[i\varphi_{01}\mathbf{n}+\mathbf{v}^0(\mathbf{r}^0)-\nabla\varphi_{00}], \tag{19}$$

где $Z_0=\omega\rho/k_t=\sqrt{-i\omega\rho\eta}$ — удельный импеданс плоских сдвиговых волн, $\operatorname{Im} Z_0<0$; η — комплексная частотно-зависимая динамическая сдвиговая вязкость вязкоупругой жидкости. Отброшенные члены (19) имеют порядок $\omega\rho\varepsilon_1 \ln \varepsilon_1$, $\omega\rho\varepsilon_2 \ln \varepsilon_1$. Ниже рассматриваются некоторые физические следствия.

1. Результирующие погонная сила сопротивления $\mathbf{F}$ среды и момент M сил сопротивления определяются формулами

$$\mathbf{F}=\oint_\Gamma \boldsymbol{\sigma}\, ds, \quad M=\oint_\Gamma (x_1\sigma_2-x_2\sigma_1)\, ds. \tag{20}$$

Заметим, что если ввести трехмерные векторы $\mathbf{r}=(x_1, x_2, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1, \sigma_2, 0)^{\mathrm{T}}$, то $\mathbf{M}=\oint_\Gamma [\mathbf{r}\times\boldsymbol{\sigma}]\, ds=M\mathbf{e}_3$, где $\mathbf{e}_3$ — единичный орт $(0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$.

В рассматриваемом приближении из (19) и (20) с учетом (11) имеем

$$\mathbf{F}=-i\omega\rho\oint_\Gamma \varphi_{00}\mathbf{n}\, ds-Z_0\oint_\Gamma (i\varphi_{01}\mathbf{n}+\psi_{00}\mathbf{s})\, ds= \\ =-i\omega\rho\oint_\Gamma \varphi_{00}\mathbf{n}\, ds-Z_0\oint_\Gamma\left[i\varphi_{01}\mathbf{n}+\varphi_{00}\frac{\partial\mathbf{s}}{\partial s}+(\mathbf{v}^0,\mathbf{n})\mathbf{n}\right] ds,$$

$$M=-i\omega\rho\oint_\Gamma (\mathbf{r},\mathbf{s})\varphi_{00}\, ds-Z_0\oint_\Gamma [i\varphi_{01}(\mathbf{r},\mathbf{s})-\psi_{00}(\mathbf{r},\mathbf{n})]\, ds= \\ =-i\omega\rho\oint_\Gamma \varphi_{00}(\mathbf{r},\mathbf{s})\, ds-Z_0\oint_\Gamma\left[i(\mathbf{r},\mathbf{s})\varphi_{01}-\left(\mathbf{r},\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial s}\right)\varphi_{00}+\right. \\ \left.+(x_1v_2^0-x_2v_1^0)-(\mathbf{r},\mathbf{s})(\mathbf{v}^0,\mathbf{n})\right] ds. \tag{21}$$

Скорость на Γ недеформируемого тела зададим равенством

$$\mathbf{v}^0(\mathbf{r}^0)=(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)^{\mathrm{T}}+\Omega(-x_2, x_1)^{\mathrm{T}}. \tag{22}$$

Введем не зависящие от координат трехмерные векторы обобщенной колебательной скорости $\mathbf{U}=(v_1, v_2, \Omega)^{\mathrm{T}}$ и силы $\mathbf{F}=(F_1, F_2, M)^{\mathrm{T}}$, связанные линейным соотношением

$$\mathbf{F}=Z\mathbf{U}. \tag{23}$$

Здесь $Z=(Z_{ij})$ — тензор импеданса среды колеблющемуся телу, частным случаем которого является тензор реактанса присоединенных масс для идеальной жидкости [8]. Сопоставление (21)—(23) позволяет определить компоненты Z_{ij} тензора импеданса.

Одним из важнейших приложений теории малых колебаний тел в среде являются колебательные импедансные измерения вязкоупругих свойств жидкостей и газов [1, 9]. Из (21) следует, что присоединенные массы определяются как первыми слагаемыми, существующими и в случае идеальной жидкости, так и мнимыми частями последующих слагаемых, обусловленными реактансом сдвиговых волн, причем для ньютоновской жидкости добавки к присоединенным массам пропорциональны

$\rho^{1/2}\omega^{-1/2}\eta^{1/2}$. Резистанс среды колеблющемуся телу в использованном приближении обусловлен только сдвиговыми волнами, что доказывает возможность использования зондов, вытесняющих среду при своих колебаниях (неидеальных [1]), для измерения динамической сдвиговой вязкости η, если резистанс излучения продольных волн пренебрежимо мал в сравнении с резистансом излучения сдвиговых волн [1].

На бесконечности обе экспоненты $\exp(ik_l r)$ и $\exp(ik_t r)$ затухают, но первая значительно медленнее, так как $|k_t| \gg |k_l|$, $\operatorname{Im} k_l \ll \operatorname{Re} k_l$, величины $\operatorname{Re} k_t$ и $\operatorname{Im} k_t$ сопоставимы, а для ньютоновской жидкости равны. Поэтому $\mathbf{v}(\mathbf{r}) \simeq \nabla\varphi(\mathbf{r})$ при $|k_l| r \gg 1$. Имеем из (2), (4), (7), (14), (18)

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = v_\infty (e^{ik_l r}/\sqrt{r})\mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_r = (\cos\varphi, \sin\varphi)^T,$$

$$p(r) = p_\infty (e^{ik_l r}/\sqrt{r}), \quad r \to \infty$$

$$v_\infty = e^{i\frac{\pi}{4}} k_l \sqrt{\frac{\pi k_l}{2}} [(a_1 + k_l^{-1} b_1)\cos\varphi + (a_2 + k_l^{-1} b_2)\sin\varphi] + O\left(\frac{1}{r}\right), \quad (24)$$

$$p_\infty = \rho c_l v_\infty.$$

Следовательно, в вязкой жидкости происходит дополнительное излучение звука в среду, на механизм которого по-видимому, впервые было указано в работе [10].

2. Пусть $Q \neq 0$, тогда функция $\varphi_{00}(\mathbf{r})$ при $r \to \infty$ растет не медленнее, чем $\ln r$. Потребуем, чтобы она имела минимальный возможный рост на бесконечности (принцип «минимальной особенности» Ван-Дайка [11]), тогда

$$\varphi_{00}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{2\pi}\ln r + C_0 + w(\mathbf{r}); \quad \Delta w(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in D,$$

$$\frac{\partial w(\mathbf{r})}{\partial n} = \left[(\mathbf{v}^0(\mathbf{r}), \mathbf{n}) - \frac{Q}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n}\ln r\right], \quad \mathbf{r} \in \Gamma, \quad (25)$$

$$w(\infty) = 0,$$

где C_0 — постоянная. Главный член внешнего разложения имеет вид

$$\chi_{00} = -\frac{iQ}{4} H_0^{(1)}(k_l r), \quad (26)$$

откуда следует, что

$$C_0 = -\frac{iQ}{4}\left[1 + \frac{2i}{\pi}(C - ln\, 2)\right], \quad \varphi_{00}^1(r) = \frac{Q}{2\pi}, \quad (27)$$

где $C = 0{,}577\ldots$ — постоянная Эйлера. Если функция $w(\mathbf{r})$ найдена, то функция $\psi_{00}(\mathbf{r})$ определяется так же, как и ранее, что завершает построение первого приближения. Асимптотика $w(\mathbf{r})$ при $r \to \infty$ имеет вид (18). Построим второе приближение. Как и ранее, можно положить $\varphi_{10}(\mathbf{r}) = \varphi_{10}^1(\mathbf{r}) = \chi_{10}(\mathbf{r}) = 0$. На Γ получаем такие же граничные условия и потому $\psi_{00}'(\mathbf{r}) = \varphi_{01}^1(\mathbf{r}) = 0$. Для функции $\varphi_{01}(\mathbf{r})$ снова получим задачу (17), функция χ_{01} определяется формулой (18). Из (2), (4) и (26) находим поля скоростей и давлений в дальней зоне (см. (24)):

$$v_\infty \simeq \sqrt{\frac{k_l}{2\pi}}\left[\frac{Q}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} + \pi k_l e^{i\frac{\pi}{4}}(b_1\cos\varphi + b_2\sin\varphi)\right],$$

$$p_\infty = \rho c_l v_\infty. \quad (28)$$

Из-за монопольного излучения звука тело нагружается существенно

бо́льшим резистансом его излучения, чем при $Q=0$, что неприемлемо для реализации импедансных измерений комплексной сдвиговой вязкости.

Рассмотрим дифракцию плоской продольной волны $\Pi(\mathbf{r})=v_0\varkappa\cdot\exp(ik_l(\varkappa, \mathbf{r}))$, $|\varkappa|=1$, на жестком теле $\bar{D}$. Дифрагированное поле $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ удовлетворяет граничному условию $\mathbf{v}(\mathbf{r})=-\Pi(\mathbf{r})$ на Γ и условию погашаемости на бесконечности. Разлагая экспоненту в ряд по степеням k_l, получаем

$$\frac{\partial}{\partial n}\varphi_{00}(\mathbf{r})\,|_\Gamma=-v_0(\varkappa,\mathbf{n})\,|_\Gamma. \tag{29}$$

Следовательно, $Q=0$ и φ_{00}, χ_{00} строятся, как и выше, $\varphi_{00}^1(\mathbf{r})\equiv\psi_{00}^1(\mathbf{r})\equiv0$. Коэффициенты a_1, a_2 (см. (13)) выражаются через компоненты тензора присоединенных масс и площадь S области $\bar{D}$. Далее $\varphi_{01}^1(\mathbf{r})\equiv0$ и

$$\Delta\varphi_{10}(\mathbf{r})=0,\quad \mathbf{r}\in D,\quad \frac{\partial\varphi_{10}}{\partial n}=-\frac{iv_0}{2}\frac{\partial}{\partial n}(\varkappa,\mathbf{r})^2,\quad \mathbf{r}\in\Gamma. \tag{30}$$

Отсюда следует, что $Q_1=\oint\limits_{\Gamma}(\partial\varphi_{10}(\mathbf{r})/\partial n)\,ds=iv_0S$. Поэтому $\varphi_{10}(\mathbf{r})$, $\chi_{10}(\mathbf{r})$ вычисляются по формулам (25)–(27), в которых Q заменяется на Q_1, так что

$$\chi_{10}(\mathbf{r})=-\frac{1}{4}v_0SH_0^{(1)}(k_lr),\quad \varphi_{10}(\mathbf{r})=-\frac{iv_0S}{2\pi}\ln r+C_0+w(\mathbf{r}), \tag{31}$$

$$\varphi_{10}^1(\mathbf{r})=-\frac{iv_0S}{2\pi},\qquad C_0=\frac{1}{4}v_0S\left[1+\frac{2i}{\pi}(C-\ln 2)\right].$$

Здесь $w(\mathbf{r})$ — решение задачи Неймана

$$\Delta w(\mathbf{r})=0,\quad \mathbf{r}\in D,\quad \partial w/\partial n=-\frac{i}{2}v_0\frac{\partial}{\partial n}(\varkappa,\mathbf{r})^2+$$
$$+\frac{i}{2\pi}v_0S\frac{\partial}{\partial n}\ln r,\quad \mathbf{r}\in\Gamma;\quad w(\infty)=0. \tag{32}$$

Для функции $\varphi_{01}(r)$ снова получаем задачу Неймана (17). В данном случае $\varphi_{10}(\mathbf{r})\neq0$, так как граничные данные зависят от k_l. В дальней зоне ($|k_l|r\gg1$) имеем из (2), (5), (14), (24), полагая $\varphi\simeq\chi_{00}+\varepsilon_1\chi_{10}+\varepsilon_2\chi_{01}$

$$v_\infty\simeq e^{i\frac{\pi}{4}}k_l\sqrt{\frac{\pi k_l}{2}}\left[-\frac{v_0S}{2\pi}+(a_1+k_t^{-1}b_1)\cos\varphi+(a_2+k_t^{-1}b_2)\sin\varphi\right],$$
$$p_\infty\simeq(\omega\rho/k_l)v_\infty. \tag{33}$$

Введем следующую характеристику рассеянного поля

$$L=-\mathrm{Re}\oint\limits_{\Gamma}(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{v})\,ds/[\mathrm{Re}\,p_0^*(\mathbf{v}_0,\varkappa)\,|_\Gamma], \tag{34}$$

где p_0 — давление в падающей волне. При отсутствии поглощения в среде L в точности совпадает с поперечником рассеяния. Для неидеальной жидкости определение (34) приемлемо при $\mathrm{Im}\,k_l\ll\mathrm{Re}\,k_l$ и $|k_l|d\ll1$, причем поперечник рассеяния, обусловленный сдвиговыми волнами, можно назвать поперечником поглощения. Знаменатель в формуле (34) с погрешностью порядка d. $\mathrm{Im}\,k_l$ можно принять равным $v_0^2\rho c$ (где $c=$

$= \mathrm{Re}(\omega/k_i))$. Согласно граничному условию, на Г

$$\mathbf{v}^0(\mathbf{r})|_\Gamma = -v_0\varkappa \exp[ik_l(\varkappa, \mathbf{r})]|_\Gamma = -v_0\varkappa\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[ik_l(\varkappa, \mathbf{r}^0)]^n}{n!}\right].$$

Тогда с точностью до слагаемых $(|\varepsilon_1|^2+|\varepsilon_2|^2)(|\ln|\varepsilon_1||)$ получаем

$$\mathrm{Re}\oint_\Gamma(\sigma, \mathbf{v}^0)ds = v_0\,\mathrm{Re}\oint_\Gamma\{-i\omega\rho\varphi_{00}(\varkappa, \mathbf{n})+i\omega\rho k_l\varphi_{10}(\varkappa, \mathbf{n})+$$

$$+\omega\rho k_l\varphi_{00}(\varkappa, \mathbf{n})(\varkappa, \mathbf{r}^0)+Z_0[\psi_{00}(\varkappa, \mathbf{s})+i\varphi_{01}(\varkappa, \mathbf{n})]\}ds. \qquad (35)$$

Отсюда следует, что поперечник поглощения определяется формулой

$$L_\eta \simeq \frac{1}{v_0\rho c}\mathrm{Re}\,Z_0\oint_\Gamma[\psi_{00}(\varkappa, \mathbf{s})+i\varphi_{01}(\varkappa, \mathbf{n})]ds. \qquad (36)$$

Сравнивая с (21) и (23), получаем

$$L_\eta \simeq R/\rho c, \qquad (37)$$

где R — погонный резистанс излучения сдвиговых волн телом при его колебаниях, поляризованных вдоль вектора $\varkappa$. Так как функция φ_{00} вещественна, то первое слагаемое в (35) равно нулю и поперечник рассеяния определяется вторым и третьим слагаемыми. Он также может быть определен по полю продольной волны в дальней зоне. Интегрируя плотность потока мощности по окружности большого радиуса, получаем для поперечника рассеяния

$$L_\mathrm{p} \simeq -\frac{1}{v_0^2\rho c}\mathrm{Re}\int_0^{2\pi}p_\infty{}^*v_\infty\,d\varphi. \qquad (38)$$

Из (33) имеем

$$L_\mathrm{p} \simeq \frac{1}{4}|k_l|(\mathrm{Re}\,k_l)^2\left[S^2+2\pi^2\left(\left|a_1+\frac{b_1}{k_l}\right|^2+\left|a_2+\frac{b_2}{k_l}\right|^2\right)\right]. \qquad (39)$$

Пусть Г — эллипс $x_1^2/a^2+x_2^2/b^2=1$, $0\leqslant b\leqslant a$. В эллиптических координатах $x_1=d\,\mathrm{ch}\,\xi\cos\alpha$, $x_2=d\,\mathrm{sh}\,\xi\sin\alpha$, $d^2=a^2-b^2$, контур Г задается уравнением $\xi=\xi_0$; $e^{\xi_0}=(a+b)/d$. На Г имеем $\partial/\partial n=h^{-1}\partial/\partial\xi$, $\partial/\partial s=-h^{-1}\partial/\partial\alpha$, $ds=hd\alpha$, где $h=(a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha)^{1/2}$, $\mathbf{n}=h^{-1}(b\cos\alpha,\ a\sin\alpha)^T$, $\mathbf{s}=(-n_2, n_1)^T$, радиус кривизны эллипса $R=h^3(ab)^{-1}$.

Рассмотрим произвольные двумерные колебания бесконечного эллиптического цилиндра (см. (22))

$$\mathbf{v}^0(\mathbf{r})|_\Gamma=(v_1-\Omega b\sin\alpha,\ v_2+\Omega a\cos\alpha)^T. \qquad (40)$$

Решение задачи Неймана (6), (11) при $\varphi_{00}(\infty)=0$ имеет вид

$$\varphi_{00}(\mathbf{r})=-e^{-(\xi-\xi_0)}(v_1b\cos+v_2a\sin\alpha)-\frac{1}{4}\Omega d^2e^{-2(\xi-\xi_0)}\sin 2\alpha. \qquad (41)$$

Далее получаем на Г

$$\psi_{00}=(\mathbf{v}^0, \mathbf{s})-\frac{\partial\varphi_{00}}{\partial s}=\frac{1}{h}\left[(a+b)(v_1\sin\alpha-v_2\cos\alpha)-\Omega\left(ab+\frac{d^2}{2}\cos 2\alpha\right)\right].$$

Учитывая, что $(\partial\varphi_{01}/\partial n)|_\Gamma = -i(\partial\psi_{00}/\partial s)|_\Gamma$, запишем

$$\varphi_{01}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty}\{e^{-(2n-1)(\xi-\xi_0)}[A_{2n-1}\cos(2n-1)\alpha + B_{2n-1}\sin(2n-1)\alpha] + \\ + e^{-2n(\xi-\xi_0)}B_{2n}\sin 2n\alpha\}, \tag{42}$$

где

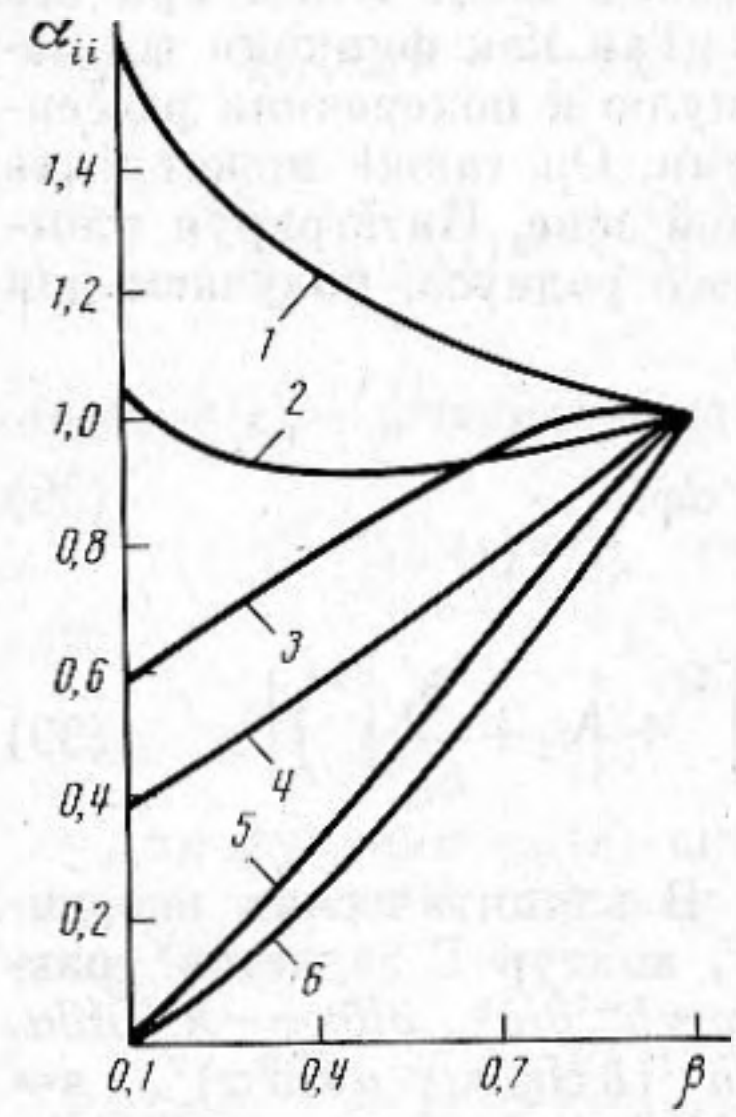
$$A_{2n-1} = -\frac{i(1+\beta)}{2(2n-1)\pi}v_1[(1-\beta^2)(I_n+I_{n-1}-I_{n-2}-I_{n+1}) + 4(j_{n-1}+j_n)],$$

$$B_{2n-1} = -\frac{i(1+\beta)}{2(2n-1)\pi}v_2[(1-\beta^2)(I_n-I_{n-1}-I_{n-2}+I_{n+1}) + 4(j_{n-1}-j_n)],$$

$$B_{2n} = \frac{4i\Omega a}{n\pi}(1-\beta^2)(j_{n-1}-j_{n+1}),$$

$$I_n = \int_0^{\pi/2}\frac{\cos 2n\alpha}{\Delta^3}d\alpha, \quad j_n = \int_0^{\pi/2}\frac{\cos 2n\alpha}{\Delta}d\alpha,$$

$$\Delta = \sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}, \; k^2 = 1-\beta^2, \; \beta = k' = b/a. \tag{43}$$



Влияние формы эллиптического цилиндра на компоненты импеданса сдвиговых волн: *1* – $\alpha_{11}/4Z_0a\mathbf{E}$; *2* – $\alpha_{22}/4Z_0a\mathbf{E}$; *3* – $\alpha_{11}/2\pi aZ_0$; *4* – $\alpha_{22}/2\pi aZ_0$; *5* – $\alpha_{33}/4Z_0a^3\mathbf{E}$; *6* – $\alpha_{33}/2\pi a^3Z_0$

В частности, имеем

$$A_1 = \frac{4i}{\pi(1-\beta)}(\mathbf{E}-\mathbf{K})v_1;$$

$$B_1 = \frac{4i}{\pi(1-\beta)}(\beta^2\mathbf{K}-\mathbf{E})v_2;$$

$$B_2 = \frac{4i\Omega a\beta}{\pi(1+\beta^2)}[(1+\beta^2)\mathbf{K}-2\mathbf{E}],$$

где $\mathbf{E}$, $\mathbf{K}$ – полные эллиптические интегралы [12].

Используя (21) и (22), находим для погонной обобщенной силы сопротивления среды

$$\mathbf{F} = (Z_{11}v_1, Z_{22}v_2, Z_{33}\Omega)^T,$$

$$Z_{11} = -i\omega\rho\pi b^2 + 4Z_0a\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)(\mathbf{K}-\mathbf{E}),$$

$$Z_{22} = -i\omega\rho\pi a^2 + 4Z_0a\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)(\mathbf{E}-\beta^2\mathbf{K}), \tag{44}$$

$$Z_{33} = -i\omega\rho\frac{\pi d^4}{8} + 4Z_0a^3\beta^2\mathbf{K},$$

где Z_{ii} – компоненты тензора импеданса. Ввиду симметрии эллипса относительно его осей тензор импеданса среды диагонален, т. е. колебания вдоль осей x_1 и x_2, а также вращательные колебания независимы.

На рисунке приведены зависимости компонент α_{ii} тензора погонного импеданса сдвиговых волн от β, нормированных соответственно по $4Z_0a\mathbf{E}$ и $4Z_0a^3\mathbf{E}$ (кривые *1*, *2*, *5*), где $4a\mathbf{E}$ – периметр эллипса. Зависимость тех же компонент погонного импеданса, нормированных по погонному импедансу кругового цилиндра отражена кривыми *3*, *4*, *6*. Таким образом,

с увеличением длины контура Г вдоль направления колебаний импеданс сдвиговых волн возрастает, однако эту закономерность несколько усложняет влияние вытеснения среды неидеальным зондом на импеданс сдвиговых волн, чем обусловлено незначительное увеличение импеданса при малых эксцентриситетах (кривая *3*) и уменьшение импеданса с уменьшением β (кривая *2*).

При дифракции плоской продольной волны на жестком теле $\bar{D}$ граница которого Г есть эллипс, имеем

$$\varphi_{00}(\mathbf{r})=v_0 e^{-(\xi-\xi_0)}(b\varkappa_1\cos\alpha+a\varkappa_2\sin\alpha). \tag{45}$$

Из формул (13), (14), (18) следует, что

$$\chi_{00}(\mathbf{r})=\frac{\pi v_0(a+b)}{4i}\left[b\varkappa_1\frac{\partial}{\partial x_1}+a\varkappa_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right]H_0^{(1)}(k_l r),$$

$$\chi_{10}(\mathbf{r})=-\frac{1}{4}v_0 S H_0^{(1)}(k_l r),\qquad \varphi_{10}{}^1(\mathbf{r})=-\frac{iv_0ab}{2},$$

$$\varphi_{10}(\mathbf{r})=-\frac{iv_0ab}{2}\ln r+C_0+w(\mathbf{r}), \tag{46}$$

$$C_0=\frac{\pi ab}{4}v_0\left[1+\frac{2i}{\pi}(C-\ln 2)\right],$$

$$w(\mathbf{r})=-\frac{iv_0}{4}e^{-2(\xi-\xi_0)}[(a^2+b^2)\varkappa_1\varkappa_2\sin 2\alpha+ab(\varkappa_1{}^2-\varkappa_2{}^2)\cos 2\alpha]+$$
$$+\frac{iv_0}{2}\sum_{n=2}^{\infty}e^{-2n(\xi-\xi_0)}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{2n}\cos 2n\alpha.$$

Решение задачи (17) имеет вид

$$\varphi_{01}(\mathbf{r})=\frac{2i}{\pi}v_0(a+b)\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(2n+1)(\xi-\xi_0)}[\varkappa_1(j_n-j_{n+1})\cos(2n+1)\alpha+\varkappa_2(j_n+j_{n+1})\times$$
$$\times\sin(2n+1)\alpha]$$

Сопоставляя с (18), получаем

$$\chi_{01}(\mathbf{r})\cong-\frac{1}{2}v_0(1-\beta)k_l[\varkappa_1(2\mathbf{K}-\mathbf{E})\cos\alpha+\varkappa_2(\mathbf{E}-2\beta^2\mathbf{K})\sin\alpha]H_1^{(1)}(k_l r).$$

Сравнивая выражения для χ_{00}, χ_{10} и χ_{01} с (33), имеем, устремляя r к ∞:

$$a_1=\frac{1}{2}a^2\varkappa_1\beta(1+\beta),\qquad a_2=\frac{1}{2}a^2\varkappa_2(1+\beta),$$
$$b_1=\frac{ia}{\pi(1-\beta)}\varkappa_1(2\mathbf{K}-\mathbf{E}),\qquad b_2=\frac{ia}{\pi(1-\beta)}\varkappa_2(\mathbf{E}-2\beta^2\mathbf{K}). \tag{47}$$

Формулы (39) и (47) определяют поперечник рассеяния

$$L_{\text{р}}\simeq\frac{1}{4}|k_l|^3S^2\left\{1+\frac{1}{2\beta^2}\left[(1+\beta)^2(\varkappa_1{}^2\beta^2+\varkappa_2{}^2)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{4}{\pi^2}\frac{(2\mathbf{K}-\mathbf{E})^2+(\mathbf{E}-2\beta^2\mathbf{K})^2}{(1-\beta)^2|k_l a|^2}\right]\right\}. \tag{48}$$

Отсюда следует, что дополнительным поперечником рассеяния продольных волн из-за неидеальности жидкости практически можно пренебречь, поперечник же поглощения может быть сопоставим с поперечником рассеяния и превышать его. Он увеличивается с увеличением частоты, плотности и вязкости жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крутин В. Н.* Колебательные реометры. М.: Машиностроение, 1985. 159 с.
2. *Крутин В. Н., Федорюк М. В.* Смешанные коротко-длинноволновые приближения в динамике вязкоупругих сред // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280. № 6. С. 1334–1337.
3. *Бабич В. М., Булдырев В. С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 456 с.
4. *Ильин А. М.* Краевая задача для уравнения второго порядка в области с узкой щелью. 2. Область с малым отверстием // Матем. сб. 1977. Т. 103. № 2. С. 265–284.
5. *Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярных возмущениях области. Тбилиси: Изд-во ТГУ, 1981.
6. *Федорюк М. В.* Применение метода сращивания асимптотических разложений к рэлеевскому приближению в скалярной теории дифракции // Акуст. журн. 1981. Т. 27. № 3. С. 441–447.
7. *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. М.* Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Недра, 1989. 477 с.
8. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 904 с.
9. *Ферри Дж.* Вязкоупругие свойства полимеров. М.: ИЛ, 1963. 535 с.
10. *Крутин В. Н., Римский-Корсаков А. В.* Особенности излучения звука в вязкую жидкость/Тр. VIII Всесоюз. акуст. конф. 1973. PIв-8.
11. *Ван Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967.
12. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1977. 342 с.

Всесоюзный научно-исследовательский
проектно-конструкторский и технологический
институт геологических, геофизических
и геохимических информационных систем
Акустический институт им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
10.01.90

V. N. Krutin, *M. V. Fedoryuk*

MIXED SHORT-LONGWAVE APPROXIMATION FOR PLANE PROBLEMS OF DIFFRACTION AND ASCILLATION OF BODIES IN A VISCOUS ELASTIC LIQUID

Methods of asymptotic expansions of solutions of two-dimensional problems of diffraction and ascillations of bounded convex bodies placed into a homogeneous isotropic viscous elastic liquid are developed. The length of the longitudinal wave is supposed to be large and the length of the transverse one – small with respect to diameter of a body. The elliptic body is considered as an example.