АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 37 1991 Вып. 2

УДК 534.2-16

© 1991 г.

В. Г. Можаев

ПРИБЛИЖЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ СКОРОСТИ ВОЛН РЭЛЕЯ В ИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ И НА БАЗИСНОЙ ПЛОСКОСТИ В ВЫСОКОСИММЕТРИЧНЫХ КРИСТАЛЛАХ

Исследуются различные пути нахождения приближенных аналитических выражений для скорости волн Рэлея в изотропных средах и на базисной плоскости ромбических, тетрагональных, гексагональных и кубических кристаллов. Формула Бергмана – Викторова для скорости волн Рэлея в изотропных средах обобщается на анизотропный случай. Получена и другая приближенная формула, имеющая в изотропном случае точность, лучшую, чем формула Бергмана – Викторова.

Вопрос о скорости распространения рэлеевских волн v_R затрагивается практически в каждом обзоре или монографии, касающихся поверхностных акустических волн в твердых телах. Имеется также ряд специальных отдельных публикаций, в том числе работы [1–5], посвященные исследованию дисперсионного уравнения для волн Рэлея в изотропных средах. Для изотропных сред, в частности, широко известно и применяется в оценочных расчетах следующее приближенное выражение для v_R [6, 7]:

$$v_R/v_t \equiv \eta = (0{,}87+1{,}12\nu)/(1+\nu) \tag{1}$$

где v_t – скорость объемных сдвиговых волн, ν – коэффициент Пуассона. В литературе приводятся и другие формы записи этого выражения – через упругие модули c_{11}, c_{12} [8]:

$$\eta = (0{,}87c_{11}+2c_{12})/(c_{11}+2c_{12}) \tag{2}$$

и через отношение скоростей (v_t/v_l) объемных сдвиговых и продольных волн [9]:

$$\eta = [0{,}718-(v_t/v_l)^2]/[0{,}75-(v_t/v_l)^2]. \tag{3}$$

Обсуждаемое соотношение иногда называют формулой Викторова [9]. Далее будем ссылаться на это соотношение как на формулу Бергмана – Викторова, поскольку, с одной стороны, из цитируемых в современной литературе работ, в которых приводится это соотношение, первой была монография Бергмана, а с другой – термин «формула Викторова» уже получил определенное распространение в литературе. Как показывает приведенное в монографии [10] сравнение выражения (1) с точным численным решением, относительная погрешность этого выражения составляет менее 0,5% при любых значениях коэффициента Пуассона, соответствующих реальным изотропным средам.

Возможность использования соотношения (1) для поверхностных акустических волн в кристаллах обсуждалась в работе [11]. При этом для достижения лучшего согласия с точным решением предлагалась эмпирическая корректировка числовых коэффициентов, входящих в формулу (1). Известны также приближенные выражения для скорости глубокопрони-

кающих, близких к объемным волн Рэлея в сильно анизотропных высокосимметричных кристаллах [12—16]. Наиболее общей из них является формула

$$v_R/v_t=1-c_{55}^2c_{11}c_{33}/[2(c_{11}c_{33}-c_{13}^2)^2], \tag{4}$$

следующая из результатов работы [15]. Формула (4) относится к волнам Рэлея, распространяющимся в x-направлении тетрагонального кристалла z-среза; c_{11}, c_{13}, c_{33}, c_{55} — соответствующие упругие модули. Однако получить отсюда выражения (1)—(3) с помощью предельного перехода к изотропной среде нельзя. Что же касается получаемого при таком предельном переходе выражения, то оно имеет точность, худшую, чем соотношения (1)—(3).

Цель настоящей работы — вывод простого аналитического выражения для скорости волн Рэлея на базисной плоскости высокосимметричных кристаллов (ромбической, тетрагональной, гексагональной и кубической сингоний), которое объединяет и включает в себя как частный случай формулы (1)—(4). Помимо этого в работе получена еще одна формула для скорости волн Рэлея в изотропных средах, которая более точна, чем формула Бергмана — Викторова, и также обобщается на анизотропный случай.

Будем считать, что дисперсионное уравнение для поверхностных волн имеет вид $\mathscr{D}(\eta)=0$. Значение η, используемое в качестве начального приближения для решения данного уравнения, обозначим через η_0. Тогда в первом порядке по отклонению $\Delta\eta=\eta-\eta_0$ легко получить, что

$$\Delta\eta=-\mathscr{D}(\eta_0)/(\partial\mathscr{D}/\partial\eta)|_{\eta=\eta_0}. \tag{5}$$

Дальнейшая процедура приближенного расчета скорости волн Рэлея не является однозначной. С одной стороны, возможна частичная факторизация дисперсионного уравнения, и для нахождения его решения можно использовать либо усеченную (факторизованную) часть, либо полную форму этого уравнения. С другой стороны, имеется множество вариантов выбора значений для начального приближения. Ниже будут рассмотрены два варианта расчета v_R, дающие близкие к (1) результаты. Отметим, что, хотя выражение (1) весьма часто приводится в монографиях или обзорах, касающихся волн Рэлея, ни в одной или одном из них, за исключением монографий [17, 18], о которых речь пойдет ниже, процедура вывода выражения (1) и сам вопрос о том, можно ли его вывести или это эмпирическое соотношение, не затрагиваются. Следует добавить, что и в издании монографии [7] на английском языке, так же как в ее издании на русском, вывод формулы (1) отсутствует, несмотря на противоположное впечатление, создающееся при знакомстве с обзором [8].

Фазовая скорость волн Рэлея в изотропных средах определяется дисперсионным уравнением

$$(k^2+s^2)^2=4k^2qs, \tag{6}$$

где $k=\omega/v_R$; k, ω — волновое число и частота волн Рэлея; $s^2=k^2-k_t^2$, $q^2=k^2-k_l^2$, $k_{t,l}=\omega/v_{t,l}$. Уравнение (6) после возведения его в квадрат приводится, как известно, к виду

$$\mathscr{D}_R=\eta^2D_R\equiv\eta^2[\eta^6-8\eta^4+8(3-2\xi^2)\eta^2-16(1-\xi^2)]=0, \tag{7}$$

где $\xi^2=v_t^2/v_l^2=(1-2\nu)/(2-2\nu)$. Рассмотрим первоначально случай, когда в качестве дисперсионного уравнения, входящего в выражение (5), используется уравнение $D_R=0$. В этом случае

$$\partial\mathscr{D}/\partial\eta=\partial D_R/\partial\eta=2\eta[3\eta^4-16\eta^2+8(3-2\xi^2)]. \tag{8}$$

Поскольку скорость волн Рэлея близка к скорости объемных сдвиговых

волн, т. е. η близко к единице, то простейшим вариантом выбора начального приближения является $\eta_0=1$, что в результате дает $\eta=(5+11\nu)/(6+10\nu)$. Однако этот вариант расчета имеет более низкую в сравнении с (1) точность, в особенности при $\nu\to 0$, когда отклонение η от 1 максимально. Поэтому используем иной выбор η_0. Попробуем найти такое значение, при котором знаменатель формулы (5) — выражение (8) — максимально бы упрощался, и которое попадало бы в диапазон реально возможных значений: $0{,}874<\eta<0{,}955$. Эти условия можно выполнить, если потребовать, чтобы η_0 удовлетворяло уравнению $3\eta_0^4-16\eta_0^2+c=0$, где c — соответствующим образом подобранное целое число. При $\eta_0=1$ получаем, что $c=13$. Легко показать, что для уменьшения η_0 требуется уменьшить c. Оптимальным по отношению к сформулированным условиям оказывается значение $c=12$. В этом случае $\eta_0=(\sqrt{7}-1)/\sqrt{3}\simeq 0{,}950$ и является точным решением дисперсионного уравнения (7) в средах с коэффициентом Пуассона $\nu_0=(7+\sqrt{7})/21\simeq 0{,}46$. Используя данное значение η_0 в формуле (8), получаем

$$\eta/\eta_0=1+\alpha(\nu-\nu_0)/(1+\nu), \tag{9}$$

где $\alpha=(4\sqrt{7}-7)/18$, или

$$\eta=(a+b\nu)/(1+\nu), \tag{10}$$

где $a=(10\sqrt{7}-13)/(9\sqrt{3})\simeq 0{,}863$, $b=(7\sqrt{7}+17)/(18\sqrt{3})\simeq 1{,}139$. Выражение (10) по своей общей функциональной зависимости совпадает с формулой (1), слегка отличаясь от нее значением коэффициентов в числителе. Как следует из выражения (9), использованная процедура нахождения η позволяет приближенно учесть нелинейность зависимости η от ν.

Рассмотрим второй вариант нахождения v_R при использовании полной формы дисперсионного уравнения $\mathscr{D}=\eta^2 D_R$. В данном случае

$$\partial\mathscr{D}/\partial\eta=2\eta D_R+\eta^2\partial D_R/\partial\eta. \tag{11}$$

Требуя, чтобы выражение (11) было пропорционально, как и в формулах (1)—(3), (9), (10), множителю $(1+\nu)$, находим, что это возможно при $\eta_0=1$. В результате имеем

$$\eta=1-D_R/(\partial D_R/\partial\eta+2D_R)\,|_{\eta=1}. \tag{12}$$

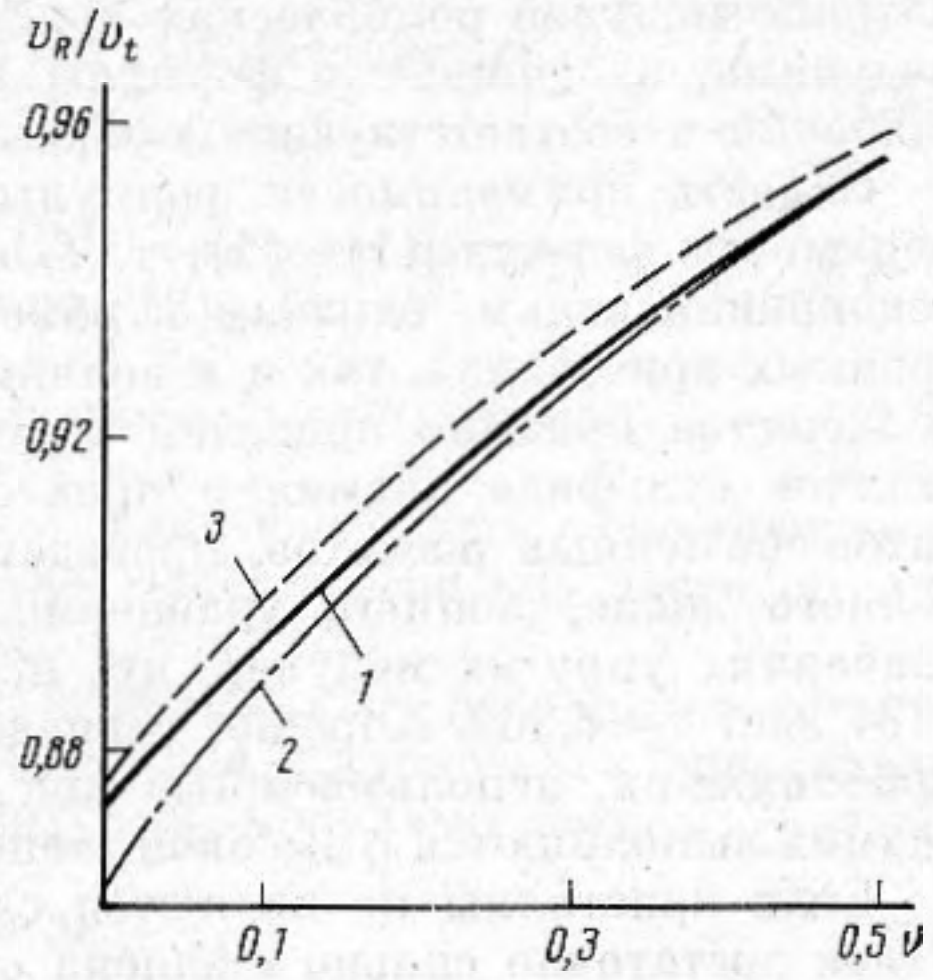
После подстановки сюда формулы (7) получаем

$$\eta=(0{,}875+1{,}125\nu)/(1+\nu), \tag{13}$$

а $\Delta\eta=\delta/2=(1-\nu)/[8(1+\nu)]$. Из (13), отбрасывая в числовых коэффициентах третий знак после запятой, получаем формулу Бергмана — Викторова. В монографии [17] указан и другой способ вывода формулы (13) — с использованием разложения уравнения (6) в ряд по $\Delta k=k_t-k$. Однако эти два способа, хотя и дают одинаковые конечные результаты, не являются полностью эквивалентными. Это связано с тем, что уравнение (6), возведенное в квадрат, и уравнение (7) отличаются друг от друга множителем, зависящим от η. Поэтому поиск решения уравнения (6) в форме $\eta=\eta_0+\Delta\eta$, используемой в настоящей работе, привел бы к отличным от (13) результатам. Используемый здесь способ вывода формулы (13) является более простым и предпочтительным, чем описанный в монографии [17], для проводимого далее обобщения результатов на анизотропный случай. Фактически та же самая процедура, что и при выводе (13), но только для частного случая $\nu=0{,}25$, применялась в монографии [19]. Упомянем также недавно изданную монографию [18], в которой без указания методики вывода представлено следующее приближенное выражение:

$$v_R/v_t=1-\delta/2-5\delta^2/8+29\delta^3/16. \tag{14}$$

Формула (14) в первом порядке по δ дает совпадающий с (13) результат. Использованное в разложении (14) начальное приближение $\eta_0=1$ формально является точным решением дисперсионного уравнения при $\nu=1$.



Сравнение точного и приближенных решений для скорости волн Рэлея v_R в изотропных средах при различных значениях коэффициента Пуассона ν: *1* – точное решение, *2* – формула (10), *3* – формула (13)

Остановимся теперь на сравнении преимуществ и недостатков формул (10), (13) и способов их вывода. Формула (13) получена из полного дисперсионного уравнения, включающего корень $\eta=0$, который не имеет отношения к волнам Рэлея, при использовании в качестве начального приближения значения $\eta_0=1$, непопадающего в диапазон возможных значений для реальных твердых тел. В отличие от (13) при выводе формулы (10) использовалось значение η_0 из указанного диапазона, и корень $\eta=0$ из дисперсионного уравнения был исключен. Исходя из этих соображений, формула (10) должна была бы в целом (при рассмотрении всего диапазона $0<\nu<0{,}5$) давать лучшую точность, чем (13), что подтверждается их сравнением на рисунке с точным решением. Для построения графика точного решения использовалась обратная зависимость $\nu=\nu(\eta)=1-8(1-\eta^2)/[\eta^2(\eta^4-8\eta^2+8)]$. Однако, хотя, как следует из рисунка, формула (10) в диапазоне $0{,}1<\nu<0{,}5$ более точна, чем формула (13), ошибка, совершаемая при использовании (13), относительно мала и в ряде случаев вполне приемлема. К достоинствам же формулы (13) относится ее простота. Поэтому далее будут использованы обе описанные методики расчета.

Перейдем к анизотропному случаю. Ограничимся теми сингониями, в которых дисперсионное уравнение является бикубическим относительно η, т. е. ограничимся ромбическими, тетрагональными, гексагональными и кубическими кристаллами. В наиболее низкосимметричном из рассматриваемых ромбическом кристалле волна Рэлея, т. е. двухпарциальная поверхностная волна с поляризацией в сагиттальной плоскости, существует на базисной плоскости, если направление распространения и нормаль к поверхности совпадают с кристаллографическими осями. Будем для определенности считать, что ось x совпадает с направлением распространения, ось z – с нормалью к поверхности. Дисперсионное уравнение для этого случая имеет вид [20]

$$D_R=\eta^4(c_{11}-c_{55}\eta^2)/c_{33}-(1-\eta^2)\,[(c_{11}c_{33}-c_{13}^2)/(c_{33}c_{55})-\eta^2]^2, \qquad (15)$$

где $\eta^2=\rho v_R^2/c_{55}$, c_{IJ} – модули упругости (I, $J=1\div6$), ρ – плотность кристалла. Если считать, что $\eta_0=1$, то подстановка формул (15), (11) в (5) приводит к следующему результату:

$$\eta=1-\frac{(c_{11}-c_{55})c_{33}c_{55}^2}{2[(3c_{11}-4c_{55})c_{33}c_{55}^2+(c_{11}c_{33}-c_{13}^2-c_{33}c_{55})^2]}. \qquad (16)$$

В изотропном пределе из (16) следует формула Бергмана – Викторова. В пределе сильной анизотропии, когда $c_{55}\to0$, из (16) получаем выраже-

ние (4). Формулы (15), (16) справедливы также в случаях, когда в системе координат, связанной с направлением распространения и нормалью к поверхности, отличны от нуля только те же упругие модули, что и в матрице модулей ромбических кристаллов. В этих случаях под упругими модулями, входящими в формулы (15), (16), следует подразумевать их значения в соответствующим образом повернутой системе координат.

Область применимости формулы (16) включает в себя области применимости формул (1)—(4), т. е. формула (16) применима как к глубокопроникающим, близким к объемным волнам Рэлея в сильно анизотропных кристаллах, так и к волнам Рэлея в слабо анизотропных средах. В качестве примера приведем результаты для базисной плоскости кристаллов сульфида кадмия в пренебрежении пьезоэффектом. Из результатов численных расчетов, проведенных в работе [21] с использованием точного дисперсионного уравнения, следует, что $\eta=0{,}967$. При тех же значениях упругих модулей, что использовались в работе [21], формула (16) дает $\eta=0{,}969$. Хорошее совпадение этих значений связано с тем, что приближения, использованные при выводе формулы (16), для сульфида кадмия выполняются с высокой степенью точности.

Если кристаллы не являются слабо анизотропными, а скорость волн Рэлея достаточно сильно смещена относительно скорости сдвиговых волн вертикальной поляризации, формула (16) имеет низкую точность. Большей точности можно достичь с помощью процедуры, применявшейся при выводе формулы (9). Простейшим вариантом при этом было бы использование в качестве начального приближения того же численного значения, что и в изотропном случае. Более предпочтительным (дающим более точные результаты) в ряде случаев является подход, описываемый ниже, при котором η_0 связывается со значениями упругих констант и при их изменении учитывает смещение η относительно единицы.

Для последующих вычислений дисперсионное уравнение (15) удобно представить в виде

$$D_R=a_6\eta^6+a_4\eta^4+a_2\eta^2+a_0=0, \tag{17}$$

где

$$a_6=(c_{33}-c_{55})/c_{33},$$

$$a_4=-1-2(c_{11}c_{33}-c_{13}^2)/(c_{33}c_{55})+c_{11}/c_{33},$$

$$a_2=(c_{11}c_{33}-c_{13}^2)^2/(c_{33}c_{55})^2+2(c_{11}c_{33}-c_{13}^2)/(c_{33}c_{55}),$$

$$a_0=-(c_{11}c_{33}-c_{13}^2)^2/(c_{33}c_{55})^2.$$

В этих обозначениях $\partial D_R/\partial\eta=2\eta(3a_6\eta^4+2a_4\eta^2+a_2)$. Исходя из данного выражения, будем использовать в качестве η_0 один из корней уравнения $3a_6\eta_0^4+2a_4\eta_0^2+a_6c=0$. Для выполнения предельного перехода к изотропному случаю это должен быть корень

$$\eta_0^2=[-a_4-(a_4^2-3a_6^2c)^{1/2}]/(3a_6). \tag{18}$$

Для определения входящего сюда коэффициента c дисперсионное уравнение (17) запишем в виде $3a_6\eta^4+2a_4\eta^2=(4a_6\eta^6+3a_4\eta^4+a_2\eta^2+a_0)/\eta^2$. Оценка правой части этого выражения в приближении $\eta=1$ дает

$$c=(-4a_6-3a_4-a_2-a_0)/a_6. \tag{19}$$

В изотропном пределе из (19) следует $c=12$, что совпадает с соответствующим значением, использованным при выводе формулы (9). Кроме того, при выборе значения c в форме (19) знаменатель формулы для η будет пропорционален, как и в формулах (12), (13), множителю $(\partial D_R/\partial\eta+2D_R)|_{\eta=\eta_0}$. Таким образом, вывод формулы (9) неявно все же базируется на использовании приближения $\eta\simeq1$, но не в качестве начального прибли-

жения η_0, а для нахождения самого η_0, хотя непосредственно при выводе (9) использовались другие соображения. Подставляя далее формулы (17)–(19) в (5), приходим к следующему выражению:

$$\eta = \frac{(9a_2a_6+2a_4^2-15a_6^2c)\eta_0-(9a_0a_6-a_4a_6c)/\eta_0}{18a_6(4a_6+3a_4+2a_2+a_0)}. \tag{20}$$

В изотропном пределе из формулы (20) следуют формулы (9), (10). В случае сильной анизотропии ($c_{55}\to 0$) из (18) следует

$$\eta_0^2 \simeq 1-c_{11}c_{55}/(c_{11}c_{33}-c_{13}^2). \tag{21}$$

Подстановка формулы (21) в (20) дает в пределе $c_{55}\to 0$ совпадающее с (4) выражение, т. е. выражение (20) включает в себя как частный случай и формулы (9), (10) и формулу (4).

Для иллюстрации степени точности формулы (20) рассмотрим ее применение к волнам Рэлея, распространяющимся в кубических кристаллах ($c_{11}=c_{33}$, $c_{44}=c_{55}$, $c_{12}=c_{13}$), между упругими модулями которых выполняются соотношения

$$c_{11}=2c_{12}=2c_{44}. \tag{22}$$

Этим соотношениям приближенно удовлетворяют упругие модули ряда кристаллов группы $A_{\mathrm{II}}B_{\mathrm{III}}$ [22]. При выполнении (22) дисперсионное уравнение (15) имеет следующие простые решения:

$$\eta_1^2=3, \qquad \eta_{2,3}=(3\pm\sqrt{3})/2. \tag{23}$$

Из них корень η, соответствующий волне Рэлея, довольно сильно смещен относительно единицы ($\eta\simeq 0{,}796$), т. е. рассматриваемый случай относительно неблагоприятен для применения полученных приближенных выражений. Тем не менее получаемое при расчете по формуле (20) численное значение $\eta\simeq 0{,}769$ довольно близко к точному. Применение формулы (20) к другим случаям показывает, что с ее помощью можно добиться удовлетворительной точности расчета при условии, если значения вспомогательных параметров c и η_0 изменяются для кристаллов не очень сильно (сохраняют знак и порядок величины) в сравнении с их значениями для изотропных сред.

В случаях необходимости проведения более точных вычислений полученные в настоящей работе выражения (16) и (20) могут быть использованы в качестве начального приближения, в том числе и при расчетах анизотропии скорости поверхностных волн на ЭВМ. В частности, таким образом с помощью формулы (5) можно получить для конкретных кристаллов количественную оценку степени точности этих выражений без нахождения точного решения дисперсионного уравнения.

Перед сдачей данной статьи в набор автору стало известно, что в монографии [23] приведено без вывода следующее приближенное выражение для скорости волн Рэлея:

$$v_R/v_t=(0{,}862+1{,}14\nu)/(1+\nu). \tag{24}$$

Это выражение практически совпадает с полученной выше формулой (10). Однако отличие в последнем знаке числового коэффициента 0,862 в (24) и в (10) не позволяет сделать однозначный вывод о способе получения формулы (24).

Автор признателен Р. Н. Викторовой за предоставленную возможность ознакомиться с изданием монографии [7] на английском языке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Knopoff L.* On Rayleigh wave velocities // Bull. Seism. Soc. Amer. 1952. V. 42. № 4. P. 307–308.
2. *Hayes M., Rivlin R. E.* A note on the secular equation for Rayleigh waves // Z. Angew. Math. Phys. 1962. V. 13. № 1. P. 80–83.
3. *Mayer W. G., Lamers G. B.* Calculation of the velocity of acoustic surface waves // Ultrasonics. 1967. V. 5. July. P. 167.
4. *Levshin A. L., Panza G. F.* Futher remarks on extra roots of Rayleigh equation and Somigliana waves // Annali di geofisica. 1970. V. 23. № 1. P. 45–55.
5. *Aggarwal H. R., Ablow C. M.* On the Rayleigh equation for elastic surface waves // J. Acoust. Soc. Amer. 1970. V. 47. № 5. Pt 2. P. 1461.
6. *Бергман Л.* Ультразвук и его применение в науке и технике. М.: Изд-во иностр. лит., 1957. С. 342, 344.
7. *Викторов И. А.* Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. М.: Наука. 1966. С. 8.
8. *Фарнелл Дж.* Свойства упругих поверхностных волн // Физическая акустика/Под ред. Мэзона У., Терстона Р. Т. IV. М.: Мир. 1973. С. 149.
9. *Дьелесан Э., Руайе Д.* Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов. М.: Наука. 1982. С. 194.
10. *Auld B. A.* Acoustic fields and waves in solids. V. 2. N. Y.: Wiley-Interscience, 1973. P. 91–92.
11. *de Klerk J.* Ultrasonic transducers. 3. Surface wave transducers // Ultrasonics. 1971. V. 9. № 1. P. 35–48.
12. *Гельфгат И. М., Сыркин Е. С.* Поверхностные волны в слоистом кристалле // Физика низких температур. 1978. Т. 4. № 5. С. 672–674.
13. *Канер Э. М., Чеботарев Л. В.* Медленные поверхностные волны в сильно анизотропных кристаллах // ФТТ. 1978. Т. 20. № 8. С. 2532–2534.
14. *Косевич Ю. А., Сыркин Е. С.* Волны Рэлея и Лэмба в кристаллах вблизи фазовых переходов, связанных со смягчением акустических фононов // ФТТ. 1984. Т. 26. № 10. С. 2927–2932.
15. *Косевич Ю. А., Сыркин Е. С.* Критерий существования и свойства глубоко проникающих волн Рэлея в кристаллах // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1985. Т. 89. № 6(12). С. 2221–2229.
16. *Landau L. D., Lifshitz E. M.* Theory of Elasticity. 3rd Edition. Course of Theoretical Physics. V. 7. Oxford: Pergamon Press, 1986. P. 98–99.
17. *Kino G. S.* Acoustic waves: devices, imaging and analog signal processing. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1987. P. 116.
18. *Бреховских Л. М., Годин О. А.* Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. С. 109.
19. *Зоммерфельд М.* Механика деформируемых сред. М.: Изд-во иностр. лит., 1954. С. 415.
20. *Свекло В. А.* Плоские волны и волны Рэлея в анизотропной среде // Докл. АН СССР. 1948. Т. 59. № 5. С. 871–874.
21. *Ingebrigtsen K. A., Tonning A.* Numerical data for acoustic surface waves in α-quartz and cadmium sulfide // Appl. Phys. Lett. 1966. V. 9. № 1. P. 16–18.
22. *Adachi S.* GaAs, AlAs and $Al_xGa_{1-x}As$: material parameters for use in research and device applications // J. Appl. Phys. 1985. V. 58. № 3. P. R1–R29.
23. *Achenbach J. D.* Wave propagation in elastic solids. Amsterdam: North – Holland Publ. Compani, 1975. P. 192.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова, физический факультет

Поступила в редакцию
09.04.90

V. G. Mozhaev

APPROXIMATE ANALYTICAL EXPRESSIONS FOR A RAYLEIGH WAVE VELOCITY IN ISOTROPIC MEDIA AND ON A BASAL PLANE OF HIGHLY SYMMETRICAL CRYSTALS

Different ways of the derivation of approximate analytical expressions for the Rayleigh wave velocity in isotropic media and on the basal plane of orthorhombic, tetragonal, hexagonal, and cubic crystals are investigated. The Bergmann – Viktorov formula for the Rayleigh wave velocity in isotropic media is generatized for the anisotropic case. One more formula which is more accurate in the isotropic case than the Bergmann – Viktorov one is obtained.