

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 534.26

© 1991 г.

Б.П. Белинский

ОБ УЧЕТЕ ПОТЕРЬ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

В работе [1] исследовано прохождение звука через трансверсально-изотропную пластину. Рассмотрение базируется на универсальных представлениях для коэффициентов отражения и прохождения, полученных в [2]. Установлено, что учет потерь в среде с помощью задания в комплексной форме технических модулей может – при произвольных коэффициентах потерь – приводить к физически недопустимым эффектам, например возрастанию амплитуды колебаний при распространении волн. Высказано предположение о существовании соотношений, ограничивающих пределы изменения коэффициентов потерь технических модулей.

Ниже неравенства такого рода установлены на основе энергетических соображений. Найдена форма закона сохранения энергии для прохождения звука через трансверсально-изотропную пластину. Для соответствующих задач рассеяния установлен энергетический принцип единственности [3].

Упругая среда характеризуется положительно определенной квадратичной формой относительно деформаций ϵ_{jk} : $W = C_{jkmn}\epsilon_{jk}\epsilon_{mn}/2 \geq 0$. Форма W задает плотность потенциальной энергии деформации среды. Для трансверсально-изотропной пластины тензор C_{jkmn} упругих постоянных представляется матрицей

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & & & \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & & & \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & & & \\ & & & c_{11} - c_{12} & & \\ & & & & 2c_{44} & \\ & & & & & 2c_{44} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Индексы 1 и 3 относятся к плотности пластины и к нормальной плоскости соответственно. Тензор C_{jkmn} связывает тензор напряжений σ_{jk} и деформаций в законе Гука, так что $\sigma_{jk} = C_{jkmn}\epsilon_{mn}$. $W(\sigma, \epsilon) = \sigma_{jk}\epsilon_{jk}/2$. Среди компонент тензора всего пять независимых. Коэффициенты $c_{\alpha\beta}$ можно выразить через технические модули $E_1, G_1, E_3, G_3, \nu_1, \nu_3$ [4]:

$$\begin{aligned} c_{11} &= [E_1/(1 + \nu_1)m](1 - \nu_3^2 E_1/E_3), & c_{33} &= E_3(1 - \nu_1)/m, & c_{44} &= G_3, \\ c_{12} &= [E_1/(1 + \nu_1)m](\nu_1 + \nu_3^2 E_1/E_3), & c_{13} &= E_1 \nu_3/m, \\ \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) &= G_1 = E_1/2(1 + \nu_1), & m &= 1 - \nu_1 - 2\nu_3^2 E_1/E_3. \end{aligned} \quad (2)$$

В [1] отмечается, что эксперименты на тонких стержнях и пластинах позволяют измерить для данного материала именно технические модули, в том числе их мнимые части, характеризующие потери.

Отвлекаясь сначала от наличия потерь, рассмотрим условия положительности квадратичной формы W , задающей плотность потенциальной энергии деформации. Критерий Сильвестра дает [5]:

$$c_{44} > 0, \quad c_{11} > 0, \quad c_{11} \pm c_{12} > 0, \quad c_{33}(c_{11} + c_{12}) - 2c_{13}^2 > 0. \quad (3)$$

Наша цель – получение неравенств, характеризующих технические модули. Соотношения (3) с учетом связей (2) можно рассматривать как нелинейную систему уравнений относительно модулей. Решая ее, найдем

$$\begin{aligned} 1 + \nu_1 &> 0, \quad E_1 > 0, \quad G_1 > 0, \quad E_3 > 0, \quad G_3 > 0, \\ m &= 1 - \nu_1 - 2\nu_3^2 E_1/E_3 > 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Среди неравенств (4) имеются зависимые. В изотропном случае приходим к известным соотношениям [6] $E > 0, \frac{1}{2} > \nu > -1$. Неравенства (4) – суть условия положительности энергии деформации

ции трансверсально-изотропной пластины без потерь. Они приведены здесь для полноты изложения. Для общей анизотропной среды данный вопрос изучался, например, в [7], где приведена также обширная библиография.

Обратимся к учету потерь и найдем для коэффициентов потерь неравенства типа (4). Будем исходить из следующей концепции [6, 8]. Учет потерь в среде может быть осуществлен путем замены тензора напряжений σ_{jk} суммой $\sigma_{jk} + \sigma'_{jk}$, где тензор диссипации σ'_{jk} пересчитывается через производную по времени от тензора деформаций (так называемое вязкоупругое тело Фохта): $\sigma'_{jk} = \eta_{jkmn} \dot{\epsilon}_{mn}$. При рассмотрении гармонических процессов, зависимость которых от времени характеризуется множителем $\exp(-i\omega t)$, находим $\sigma_{jk} + \sigma'_{jk} = (C_{jkmn} - i\omega\eta_{jkmn}) \epsilon_{mn}$. При этом уравнения теории упругости сохраняют свой вид, но компоненты тензора упругих модулей становятся комплексными. Заметим, что к комплексным модулям можно прийти иначе, привлекая вместо закона Гука закон наследственной упругости [8].

Для дальнейшего удобно рассмотреть вопрос о единственности решения задачи рассеяния звука на трансверсально-изотропной пластине с произвольной компактной неоднородностью. Будем считать, что неоднородность не поглощает энергию, как и акустическая среда, потери же в пластине будем учитывать. Краевая задача для модели описана в [1]. Следует лишь добавить условие излучения для давления: $p(r, \theta) = \exp(ikr)/r\psi(\theta) + o(r^{-1})$, $r \rightarrow \infty$ и условие убывания упругих полей в пластине на бесконечности. Здесь θ — точка на единичной сфере S , r — расстояние до ее центра, $\psi(\theta)$ — диаграмма рассеяния. Схема вывода теоремы единственности сходна с использованной в [3] для двухкомпонентных моделей. Именно, для акустической среды привлечем вторую формулу Грина, взяв в качестве основного состояния поле давлений p , а в качестве дуального — p^* (звездочка везде означает комплексное сопряжение). Аналогично для второй компоненты модели — упругой среды — привлечем формулу Бэтти [9], взяв в качестве основного состояния поля напряжений σ и деформаций ϵ , а в качестве дуального — σ^* и ϵ^* . Складывая возникающие тождества, учитывая граничные условия на поверхностях пластины и условия на бесконечности и отделяя мнимую часть, находим

$$\frac{k}{2\rho_0\omega} \int_S |\psi(\theta)|^2 dS(\theta) + \frac{\omega}{2} \operatorname{Im} \int_{\Omega} 2W(\sigma^*, \epsilon) d\Omega = 0 \quad (5)$$

(ρ_0 — плотность жидкости, k — волновое число в ней). Здесь первое слагаемое описывает поток рассеянной акустической энергии, а второе — энергию, поглощенную в упругой пластине за счет потерь в ней. При условии

$$\operatorname{Im} W(\sigma^*, \epsilon) \geq 0 \quad (6)$$

из тождества (5) следует, что поля в среде и пластине тождественно равны нулю, т.е. задача рассеяния имеет единственное решение. По терминологии [3], установлен энергетический принцип единственности для рассматриваемой модели.

Условие (6) приводит к неравенствам на мнимые части компонент тензора упругих постоянных, аналогичным неравенствам (3):

$$\operatorname{Im} c_{44} < 0, \operatorname{Im} c_{11} < 0, \operatorname{Im}(c_{11} \pm c_{12}) < 0, \quad (7)$$

$$\operatorname{Im} c_{33} \operatorname{Im}(c_{11} + c_{12}) - 2(\operatorname{Im} c_{13})^2 > 0.$$

Как отмечалось, наша цель — получение неравенств, характеризующих технические модули. Аналогично (4) находим

$$\operatorname{Im} G_3 < 0, \operatorname{Im} G_1 < 0, \operatorname{Im} \frac{E_1}{m} < 0, \quad (8)$$

$$\operatorname{Im} \frac{E_3(1-\nu_1)}{m} \operatorname{Im} \frac{E_1}{m} - 2 \left(\operatorname{Im} \frac{E_1\nu_3}{m} \right)^2 > 0.$$

Таким образом, установлены соотношения, ограничивающие пределы изменения технических модулей, характеризующих трансверсально-изотропную среду. Эти соотношения точны в рамках принятой модели поглощения. В частности, в них не содержится предположений относительно малости коэффициентов потерь.

В частном случае изотропной среды, неравенства (8) принимают вид

$$\operatorname{Im} E/(1+\nu) < 0, \operatorname{Im} E/(1+2\nu) < 0. \quad (9)$$

Их можно переписать также в терминах волновых чисел продольных (k_l) и поперечных (k_t) волн:

$$\operatorname{Im} k_l^{-2} < \operatorname{Im} k_t^{-2} < 0. \quad (10)$$

При $\operatorname{Im} \nu = 0$ находим $\operatorname{Im} E < 0$, $1/2 > \nu > -1$.

Будем считать теперь потери настолько малыми, что в неравенствах (9) можно корректно провести линеаризацию около вещественных значений E и ν . Обозначим $E = \operatorname{Re} E + i \operatorname{Im} E$, $\nu = \operatorname{Re} \nu + i \operatorname{Im} \nu$,

при этом $|\operatorname{Im} E/\operatorname{Re} E| \ll 1$, $|\operatorname{Im} \nu/\operatorname{Re} \nu| \ll 1$. Линеаризованные неравенства (9) примут вид

$$(1 + \operatorname{Re} \nu) \frac{\operatorname{Im} E}{\operatorname{Re} E} < \operatorname{Im} \nu < -\frac{1 - 2\operatorname{Re} \nu}{2} \frac{\operatorname{Im} E}{\operatorname{Re} E}. \quad (11)$$

Важно отметить, что знак $\operatorname{Im} \nu$ этим неравенством не фиксируется.

Возвратимся к обсуждению анизотропного случая. С помощью неравенств (8) можно проверить, например, что не реализуются среды, в которых $\operatorname{Im} E_{1,3} = 0$, а $\operatorname{Im} \nu_{1,3} \neq 0$.

Пусть теперь в соответствии с рассмотрениями работы [1] $\operatorname{Im} \nu_{1,3} = 0$. Введем обозначения: $E_\alpha = \bar{E}_\alpha(1 - i\eta_{E_\alpha})$, $G_\alpha = G_\alpha(1 - i\eta_{G_\alpha})$ ($\alpha = 1, 3$). Здесь η_{E_α} , η_{G_α} — коэффициенты потерь. Неравенства (8) примут вид

$$\eta_{G_\alpha} > 0, \quad \eta_{E_\alpha} > 0 \quad (\alpha = 1, 3), \quad (12)$$

$$1 - \nu_1 - 2\nu_3^2 \frac{\bar{E}_1}{\bar{E}_3} \frac{1 + \eta_{E_1}^2}{1 + \eta_{E_3}^2} \frac{\eta_{E_3}}{\eta_{E_1}} > 0.$$

В частности, не реализуются среды, в которых $\operatorname{Im} \nu_{1,3} = 0$, $\operatorname{Im} E_1 = 0$, а $\operatorname{Im} E_3 \neq 0$.

Численные эксперименты, описанные в работе [1], показывают, что при равенстве коэффициентов потерь $\eta_{E_1} = \eta_{E_3}$ не возникает парадоксов энергетического характера. Неравенство (12) в этом случае принимает вид

$$1 - \nu_1 - 2\nu_3^2 \bar{E}_1/\bar{E}_3 > 0 \quad (13)$$

и аналогично последнему из неравенств (4).

Таким образом, высказанное в [1] предположение о существовании соотношений, ограничивающих возможность изменения коэффициентов потерь технических модулей трансверсально-изотропной среды, находит свое подтверждение в общих неравенствах (8) и их частных случаях (9)–(13).

В заключение заметим, что применение формул Грина для системы пластина–жидкость к полю плоских волн — падающей, прошедшей и отраженной — приводит к тождеству

$$1 - (|R|^2 + |T|^2) = \frac{2\rho_0 \omega^2}{k \cos \theta_0} \operatorname{Im} \int_0^H W(\sigma^*, e) dz. \quad (14)$$

Здесь интегрирование проводится по толщине пластины: $z \in (0, H)$, θ_0 — угол падения плоской волны на пластину, R и T — коэффициенты отражения и прохождения. В силу неравенства (6), $|R|^2 + |T|^2 < 1$.

Автор благодарен Е.Л. Шендерову, В.С. Екельчику и А.С. Зильберглейту за стимулирующие дискуссии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шендеров Е.Л. Прохождение звука через трансверсально-изотропную пластину // Акуст. журн. 1984. Т. 30. № 2. С. 122–129.
2. Лямшев Л.М. Отражение звука от тонких пластин и оболочек в жидкости. М.: Изд-во АН СССР, 1955. С. 73.
3. Коузов Д.П. Энергетический принцип единственности граничных задач акустики // Зап. науч. семин. ЛОМИ АН СССР. Матем. вопр. теор. распр. волн. 1979. Т. 89. № 10. С. 124–133.
4. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.–Л.: Гос. техн. теор. изд-во, 1950. С. 299.
5. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. С. 431.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VII. Теория упругости. М.: Наука, 1987. С. 246.
7. Остросаблин Н.И. О наитеснейших границах констант упругости и приведении удельной энергии деформации к каноническому виду // Изв. АН СССР. Мех. тв. тела. 1989. № 2. С. 90–94.
8. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. С. 752.
9. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Гос. техн. теор. изд-во, 1957. С. 476.

Научно-исследовательский институт физики
при Ленинградском государственном университете

Поступила в редакцию
23.05.89