АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 37 1991 Вып. 4

УДК 533.951:532.546
© 1991 г.

С.В. Корсунский

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ МАГНИТОЗВУКОВЫХ ВОЛН В ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩИХ ДИССИПАТИВНЫХ СРЕДАХ ПРИ НАЛИЧИИ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Рассматривается распространение нелинейных волн в электропроводящей сжимаемой жидкости, подверженной действию постоянного магнитного поля и силы сопротивления, зависящей от скорости. Исследуется влияние эффектов диссипации на параметры и структуру слабых ударных волн.

При описании движения жидкостей или газов в недеформируемых пористых средах наличие ограничений движению среды учитывается введением силы сопротивления, зависящей от скорости [1–3]. Такое приближение позволяет эффективно исследовать влияние диссипации за счет трения в порах на характер течения жидкости и распространение волн [4]. Другим примером движения жидкости при наличии сопротивления является распространение волн в трубах [5]. Оба указанных случая могут быть описаны в рамках единой модели, в которой при математическом описании движения среды в уравнения движения феноменологически введена сила сопротивления как скалярная или векторная функция скорости [1, 4].

Анализ волновых движений проводящих жидкостей в электрических и магнитных полях при наличии сил сопротивления представляет значительный интерес в геофизике [3, 6], а также при изучении нелинейных волн в трубах [7]. Важность исследования нелинейных эффектов при распространении волн в жидких средах с сопротивлением при действии магнитного поля отмечалась в [8], течение феррожидкостей в пористых средах рассматривалось в [9].

В настоящей работе исследуется одномерное распространение нелинейных магнитозвуковых волн в электропроводящей сжимаемой жидкости, подверженной действию постоянного магнитного поля $\mathbf{H}_0$, при наличии силы сопротивления, скалярно зависящей от скорости. Анализируется влияние эффектов диссипации на эволюцию волновых возмущений и формирование слабых ударных волн.

Исходная система уравнений магнитной гидродинамики в адиабатическом приближении записывается в виде [10, 11]

$$\rho\,(u_t + uu_x) = -c_0^2\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1}\rho_x - \mu HH_x - \eta F(u), \tag{1}$$

$$\rho\,(v_t + uv_x) = \mu H_0 \cos\theta\, H_x, \tag{2}$$

$$H_t - \nu_m H_{xx} + (uH - vH_0\cos\theta)_x = 0, \tag{3}$$

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0. \tag{4}$$

Здесь H – напряженность возмущенного магнитного поля, ρ – плотность жидкости, (u, v) – компоненты вектора скорости, $F(u)$ – сила сопротивления, η – коэффициент диссипации, c_0 – скорость звука, γ – показатель адиабаты, $\nu_m = 1/\mu\sigma$, μ – магнитная проницаемость, σ – электропроводность, $H_0 = |\mathbf{H}_0|$, $\theta = (\widehat{Ox, \mathbf{H}_0})$.

Отметим, что сила сопротивления движению жидкости в пористой среде обусловлена трением частиц жидкости в порах и в общем случае является векторной функцией скорости [1, 4]. Однако, учитывая одномерный характер рассматриваемого движения, здесь принимается упрощенная модель, при которой функция F скалярно зависит лишь от продольной компоненты скорости u [3, 6]. Такое приближение оправдано, в частности, для анизотропной трещиновато-пористой среды, когда потерей импульса скорости в поперечном направлении по сравнению с продольным можно пренебречь. Кроме того, предполагается, что $F(u)$ – достаточно гладкая функция и $F(0) = 0$. Эволюция нелинейных МГД-волн исследовалась в рамках системы (1)–(4) при наличии вязкости и $\eta = 0$ в [10–12].

Введем безразмерные величины по формулам

$$\rho^* = \rho/\rho_0,\ (u^*, v^*) = (u, v)/c_0,\ H^* = H/H_0,$$
$$t^* = tc_0/L,\ x^* = x/L,\ \eta^* = \eta L/\rho_0 c_0^2,$$
$$\nu_m^* = 1/\mu\sigma c_0 L,\ \text{Pн} = \mu H_0^2/\rho_0 c_0^2,$$

где L – характерный линейный масштаб. Получаем (звездочки опускаются):

$$\rho(u_t + uu_x) = -\rho^{\gamma-1}\rho_x - \text{Pн}\,HH_x - \eta F(u), \tag{5}$$

$$\rho(v_t + uv_x) = \text{Pн}\cos\theta\, H_x; \tag{6}$$

$$H_t - \nu_m H_{xx} + (uH - v\cos\theta)_x = 0, \tag{7}$$

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0. \tag{8}$$

Рассмотрим вначале распространение бесконечно малых возмущений МГД-поля. Полагая, что в невозмущенном состоянии $\rho = 1$, $H = \sin\theta$, $u = v = 0$, линеаризуем (5)–(8) относительно малых возмущений искомых функций. При этом функция $F(u)$ представляется в виде ряда Тейлора в окрестности $u = 0$:

$$F(u) = F(0) + F_u(0)u + O(u^2),$$

и учитывается, что $F(0) = 0$, а величина $F_u(0)$ включается в η. В результате получаем систему линейных уравнений, которая сводится к одному уравнению относительно $u(x, t)$:

$$\left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \eta\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \text{Pн}\cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \nu_m\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}\right) - \right.$$
$$\left. - \text{Pн}\sin^2\theta\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial t^2}\right\} u = 0.$$

Для гармонических возмущений вида $u \sim \exp[i(\omega t - kx)]$ находим

$$\omega^4 - i\omega^3(\eta + \nu_m k^2) - \omega^2 k^2(1 + \text{Pн}\,\eta\nu_m) +$$
$$+ i\omega k^2(\eta\,\text{Pн}\cos^2\theta + \nu_m k^2) + \text{Pн}\cos^2\theta\, k^4 = 0. \tag{9}$$

При η, $\nu_m \ll 1$ решения дисперсионного уравнения (9) представляются следующим образом:

$$\omega = ck + i\left(\frac{\eta f_1}{2} + \frac{\nu_m k^2 f_2}{2}\right),$$

$$f_1 = \frac{c^2 - \text{Pн}\cos^2\theta}{2c^2 - (1 + \text{Pн})},\quad f_2 = \frac{c^2 - 1}{2c^2 - (1 + \text{Pн})}. \tag{10}$$

Здесь c – один из корней уравнения

$$c^4 - c^2(1 + \text{Pн}) + \text{Pн}\cos^2\theta = 0. \tag{11}$$

определяющего скорости распространения быстрых и медленных магнитозвуковых вон. Отметим, что эволюционное волновое уравнение, соответствующее (10), представляет собой линейную часть возмущенного уравнения Бюргерса, а декремент затухания гармонических волн существенно зависит от величины и направления приложенного магнитного поля. Анализ функций $f_1(\mathrm{Pн})$ и $f_2(\mathrm{Pн})$ показывает, что при увеличении Рн функция f_1 возрастает, а f_2 – убывает. Следовательно, при усилении приложенного магнитного поля вклад диссипативных эффектов за счет трения в порах в декремент затухания волн уменьшается, а за счет конечной электропроводности жидкости – возрастает.

Переходя к исследованию нелинейных волн, рассмотрим вначале случай сильно проводящей жидкости ($\nu_m = 0$). При этом система уравнений (5)–(8) при произвольной функции $F(u)$ допускает автомодельные решения типа бегущей волны. Полагая в (5)–(8), что все искомые функции зависят только от координаты $\xi = x - ct$, после интегрирования получаем

$$\rho = \frac{c}{c-u}, \quad H = -\frac{\sin\theta\,(c^2 - \mathrm{Pн}\cos^2\theta)}{c\,(u-c) + \mathrm{Pн}\cos^2\theta},$$

$$\int_{u_*}^{u} \frac{G(u)}{F(u)}\,du = \frac{\eta}{c}\,(\xi - \xi_0), \tag{12}$$

где $u(\xi_0) = u_*$, c находится из уравнения (11),

$$G(u) = 1 - \frac{c^{\gamma-1}}{(c-u)^{\gamma+1}} + \frac{\mathrm{Pн}\sin^2\theta\,(c^2 - \mathrm{Pн}\cos^2\theta)^2}{(c\,(u-c) + \mathrm{Pн}\cos^2\theta)^3}.$$

При заданной функции $F(u)$ соотношения (12) описывают точное стационарное решение уравнений (5)–(8).

Не теряя в общности, рассмотрим далее линейную зависимость $F(u)$. Система (5)–(8) при $\nu_m = 0$ гиперболического типа и, следовательно, может иметь решения, описывающие распространяющиеся разрывы. Для исследования решений такого типа разложим решение за волновым фронтом в виде ряда по степеням $\xi = x - ct$ [3, 13]

$$\rho = 1 + \xi\rho_1(t) + \frac{\xi^2}{2}\rho_2(t) + \ldots,$$

$$(u, v) = \xi\,(u_1(t), v_1(t)) + \ldots, \tag{13}$$

$$H = \sin\theta + \xi H_1(t) + \ldots.$$

Подставляя соотношения (13) в (5)–(8) и приравнивая члены при одинаковых степенях ξ, получаем

$$u_1 = c\rho_1, \quad H_1 = \frac{c^2-1}{\mathrm{Pн}\sin\theta}\,\rho_1, \quad v_1 = -\frac{c^2-1}{\mathrm{ctg}\,\theta}\,\rho_1,$$

где функция $\rho_1(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\rho_1}{dt} + \beta\rho_1^2 + \epsilon\rho_1 = 0, \tag{14}$$

$$\beta = \frac{(\gamma+1)\sin^2\theta + 3(c^2-1)^2}{2(c^2-1)\,(2c^2 - (1+\mathrm{Pн}))}, \quad \epsilon = \frac{\eta}{2} f_1.$$

Решение уравнения (14) при условии $\rho_1(0) = \rho_{01}$ имеет вид

$$\rho_1 = \frac{\epsilon\rho_{01}}{(\rho_{01}\beta + \epsilon)e^{\epsilon t} - \beta\rho_{01}} \tag{15}$$

и описывает изменение амплитуды возмущений за фронтом волны. Если начальное возмущение $\rho_{01} > 0$, то при $t \to \infty$ имеем $\rho_1 \to 0$, т.е. возмущения за фронтом волны затухают. Если же $\rho_{01} \to 0$, то возможны два случая: при $\epsilon > |\rho_{01}|\beta$ также имеем $\rho_1 \to 0$, $t \to \infty$, а при $\epsilon < |\rho_{01}|\beta$ функция $\rho_1(t)$ с течением времени возрастает и при $t = t_* = \frac{1}{\epsilon} \ln [\beta |\rho_{01}| / (\beta |\rho_{01}| - \epsilon)]$ происходит опрокидывание волнового фронта [13]. Отметим, что закон убывания амплитуды (15) и положение разрыва t_* существенно зависят от величины и направления приложенного магнитного поля.

Эволюционное уравнение для слабонелинейных слабодиссипативных волновых возмущений, описываемых системой уравнений (5)–(8), при η, $\nu_m \ll 1$ может быть получено с помощью стандартной процедуры Таниути–Вэя [14] или методом многих масштабов [15]. В результате находим, что распространение слабонелинейных волн вправо по оси x описывается возмущенным уравнением Бюргерса вида

$$\varphi_\tau + \varphi\varphi_\xi - \nu\varphi_{\xi\xi} = -\epsilon\varphi, \tag{16}$$

где $\varphi = \beta u$, $\tau = \alpha t$, $\xi = x - ct$, параметры ϵ, β определены в (14), c – одно из решений уравнения (11), соответствующее волнам, распространяющимся вправо, $\alpha \sim \nu_m \sim \eta \ll 1$ – малый параметр, характеризующий амплитуду возмущений, $\nu = \nu_m f_2/2$. Решения уравнения (16) при $\nu = 0$ рассматривались в [11, 13]. Было показано, что наличие диссипативного члена в правой части (16) приводит к затуханию возмущений, которое при $\epsilon > 1$ предотвращает опрокидывание волн. При $\epsilon = 0$ уравнение (16) сводится к классическому уравнению Бюргерса, решения которого изучены в полном объеме [13, 16]. В общем случае точное решение уравнения (16) не найдено. Асимптотическое решение задачи Коши для уравнений (16) исследовалось в [11]. Здесь рассмотрим построение его ограниченного асимптотического решения при $\epsilon \ll 1$.

С помощью замены переменных $T = (1 - e^{-\epsilon\tau})/\epsilon$, $\varphi(\xi, \tau) = \Phi(\xi, T)\, e^{-\epsilon\tau}$ из (16) получаем

$$\Phi T + \Phi\Phi_\xi - \frac{\nu}{1 - \epsilon T}\, \Phi_{\xi\xi} = 0.$$

Приближенное решение этого уравнения, ограниченное при $\xi \to \pm\infty$, находится методом, изложенным в [17], и записывается в виде

$$\Phi = D - A \operatorname{th} [\frac{A(1 - \epsilon T)}{2\nu} (\xi - DT)],$$

где D, A = const. Таким образом,

$$\varphi = e^{-\epsilon\tau} (D - A \operatorname{th} (\frac{Ae^{-\epsilon\tau}}{2\nu} z)),$$

$$z = \xi - D \frac{1 - e^{-\epsilon\tau}}{\epsilon}. \tag{17}$$

Соотношения (17) описывают слабую ударную волну типа кинк, ширина переходной области которой со временем увеличивается, а амплитуда уменьшается. Подчеркнем, что полученное решение справедливо при $\tau < O(\epsilon^{-1})$.

Другой подход к исследованию уравнения (16) заключается в следующем. Полагая $\varphi = -2\nu\, \Phi_\xi/\Phi$ (подстановка Хопфа – Коула [13]), находим

$$\Phi_\tau - \nu\Phi_{\xi\xi} = -\epsilon\, \Phi \ln \Phi. \tag{18}$$

Уравнение (18) относится к классу хорошо изученных нелинейных параболических уравнений [17, 18]. Рассматривая его стационарные решения $\Phi = \Phi(z)$, $z = \xi - D\tau$,

имеем

$$D\Phi' + \nu\Phi'' = \epsilon\Phi\ln\Phi. \tag{19}$$

Теоремы существования и единственности решений уравнений типа (19) доказаны в [17]. Там же приведено большое количество результатов, касающихся их свойств. Отметим, в частности, что уравнение (19) является уравнением Эйлера для функционала

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{Dz/\nu}\left(\frac{\Phi_z^2}{2} - \pi(\Phi)\right)dz, \tag{20}$$

где $\pi(\Phi) = -\epsilon\Phi^2(\ln\Phi - {}^1/_2)/2\nu$. Этот результат позволяет применять для анализа уравнения (19) хорошо разработанный аппарат вариационных методов, а также метод фазовой плоскости [17, 18].

Таким образом, при распространении акустических возмущений в проводящей сжимаемой жидкости, подверженной действию магнитного поля и силы сопротивления, наличие диссипативных потерь приводит к формированию слабых ударных волн даже в том случае, когда кинематической вязкостью и магнитной вязкостью жидкости можно пренебречь. При наличии диссипации за счет конечной электропроводности среды эволюция слабонелинейных волн описывается возмущенным уравнением Бюргерса. Анализ его асимптотического решения, описывающего слабые ударные волны типа кинк, показывает, что потери энергии волн на преодоление сил сопротивления приводят к трансформации стационарных ударных волн, увеличению ширины переходной области волн и уменьшению амплитуды. При этом параметры нелинейных волн существенно зависят от величины и направления приложенного магнитного поля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1978. 288 с.
2. *Мусаев Н.Д.* К линейной теории распространения продольных волн в пористом твердом теле, насыщенном жидкостью или газом // Докл. АН СССР. 1989. Т. 309. № 2. С. 297–300.
3. *Кудряшов Н.А.* Автоволновые процессы в проводящем газе при его течении под действием электрического поля в пористых средах // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300. № 2. С. 304–307.
4. *Коллинз Р.* Течения жидкостей через пористые материалы. М.: Мир, 1964. 350 с.
5. *Crighton D.G.* Model equations of nonlinear acoustics // Ann. Rev. Fluid Mech. 1979. V. 11. P. 11–33.
6. *Гохберг М.Б., Моргунов В.А., Герасимович Е.А., Матвеев И.В.* Оперативные электромагнитные предвестники землетрясений. М.: Наука, 1985. 115 с.
7. *Ахатов И.Ш., Байков В.А.* Распространение нелинейных волн в наклонных трубопроводах // Изв. вузов. Нефть и газ. 1986. № 9. С. 64–67.
8. *Гульельми А.В.* Гидромагнитная диагностика и геоэлектрическая разведка // УФН. 1989. Т. 158. № 4. С. 605–635.
9. *Розенцвейг Р.* Феррогидродинамика. М.: Мир, 1989. 357 с.
10. *Valenti G.* Wave interaction in magnetogasdynamics // Phys. Lett. A. 1989. V. 134. № 7. P. 424–428.
11. *Корсунский С.В.* Распространение звуковых пучков конечной амплитуды в электропроводящих средах // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 1. С. 48–52.
12. *Солуян С.И., Хохлов Р.В.* К теории простых магнитогидродинамических волн конечной амплитуды в диссипативной среде // ЖЭТФ. 1961. Т. 41. № 2 (8). С. 534–543.
13. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 402 с.
14. *Taniuti T., Wei C.C.* Reductive perturbation method in nonlinear wave propagation // J. Phys. Soc. Japan. 1968. V. 241. P. 941–946.
15. *Руденко О.В., Солуян С.И., Хохлов Р.В.* Проблемы теории нелинейной акустики // Акуст. журн. 1974. Т. 20. № 3. С. 449–457.
16. *Sachdev P.L.* Nonlinear diffusive waves. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987. 246 p.
17. *Молотков И.А., Вакуленко С.А.* Сосредоточенные нелинейные волны. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. 240 с.
18. *Свирежев Ю.М.* Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М.: Наука, 1987. 366 с.

Институт гидромеханики
Академии наук УССР

Поступила в редакцию
27.04.90

S.V. Korsunskii

PROPAGATION OF NONLINEAR MAGNETOACOUSTIC WAVES IN ELECTRICALLY CONDUCTING MEDIA IN THE PRESENCE OF THE RESISTANCE

Propagation of nonlinear waves in an electrically conducting compressible liquid submerged into the constant magnetic field and affected by the scalar resistance force which depends on a liquid velocity is considered. Such situation can take place when liquid moves in a rigid porous medium or in a long rough tube. It is shown that small dissipation due to the resistance force leads to formation of a weak shock wave profile even in the perfectly conducting liquid. In general case the liquid wave motion is described by the perturbated Burgers equation and MHD-effects lead to decreasing of the wave amplitude and increasing of the shock wave transition area.