АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 37 1991 Вып. 4

УДК 534.2 : 532
© 1991 г.

В.А. Мурга

ДИФРАКЦИЯ ЗВУКА НА ПЛОСКОМ ЭКРАНЕ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Получено решение задач о дифракции плоской звуковой волны на краю плоского экрана в вязкой жидкости при условии прилипания жидкости на поверхности экрана.

В работе получено решение задачи о дифракции плоской звуковой волны на краю жесткой полуплоскости (экрана) в вязкой жидкости при выполнении условия прилипания (на границе раздела двух сред вектор скорости частиц жидкости непрерывен; в частности, на твердой поверхности он обращается в нуль). Известно, что учет этого условия приводит в ряде случаев к заметному отличию решения от аналогичного решения для случая идеальной жидкости (см. [1–3]).

Математическая постановка задачи следующая. Решение для скорости частиц жидкости, акустической плотности, акустического давления должно удовлетворять линеаризованным уравнениям Навье-Стокса, неразрывности, а также уравнению состояния; кроме того, на поверхности экрана скорость частиц жидкости должна обращаться в нуль, на бесконечности "возмущенное" решение должно исчезать.

Непосредственное решение перечисленных уравнений для данной задачи представляет собой весьма значительные математические трудности. Однако если ограничиться рассмотрением потенциальной области пространства (т.е. области вне тонкого акустического слоя, примыкающего к поверхности экрана), то задача может быть решена довольно просто, если использовать решение Константинова [1], удовлетворяющее перечисленным уравнениям и условию прилипания, а также метод Зоммерфельда [4] построения "разветвленных решений". Этот метод справедлив для идеальной жидкости, однако и в нашем случае его можно использовать, поскольку в потенциальной области справедливы, как известно, уравнения гидродинамики идеальной жидкости. Полученное решение является строгим в том же смысле, как и решение Зоммерфельда, поскольку не используются какие-либо упрощающие допущения, применяемые обычно при решении дифракционных задач (например, в нашем случае таким допущением была бы замена неизвестных граничных условий на геометрической плоскости, являющейся продолжением экрана, известными, но, строго говоря, неверными условиями).

После того как получено решение в потенциальной области, в акустическом слое решение может быть легко найдено с помощью обычных приемов теории пограничного слоя, оно здесь не представляет интереса и поэтому не рассматривается.

Решение справедливо, как указывалось, в потенциальной области. Оно существенно отличается от решения Зоммерфельда; в частности, как оказывается, должна существовать неоднородная волна, распространяющаяся вдоль экрана – явление, не имеющее аналога в акустике идеальной жидкости.

Пусть на экран s падает плоская монохроматическая звуковая волна с потенциалом

$$u_0 = e^{-ikr\cos(\varphi-\alpha)}$$

в направлении, указанном стрелкой на рис. 1. Задача двумерна. α – угол падения по

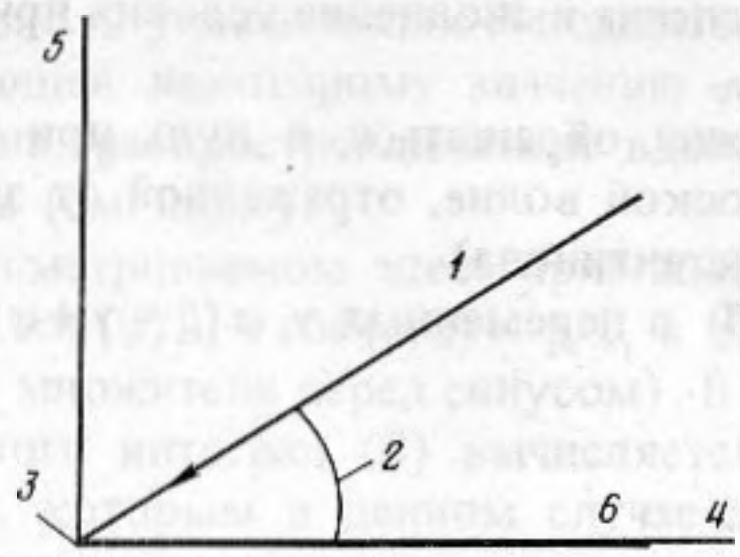

Рис. 1

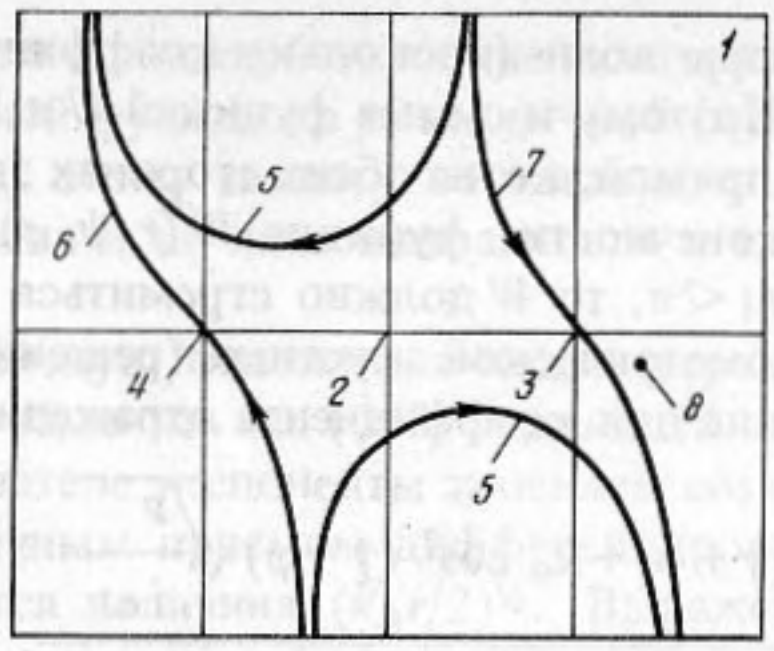

Рис. 2

Рис. 1. Система координат и падающая волна: *1* – падающая волна, *2* – угол α, *3* – начало координат, *4* – ось x, *5* – ось y, *6* – экран s

Рис. 2. Контур интегрирования: *1* – плоскость γ, *2* – $\gamma = 0$, *3* – $\gamma = \pi$, *4* – $\gamma = -\pi$, *5* – петли C, *6* – путь D_1, *7* – путь D_2, *8* – полюс P

отношению к верхней поверхности экрана, r и φ – цилиндрические координаты, начало координат совпадает с краем экрана, ось x расположена вдоль экрана, $k = k_0 + i\xi$, $k_0 = \omega/c$, ω – угловая частота колебаний, c – скорость звука, ξ – коэффициент поглощения звука в свободном пространстве, ν – коэффициент кинематической вязкости, временной множитель $\exp(-i\omega t)$ всюду опущен. Решение дифракционной задачи (результирующее поле потенциала u) для идеальной жидкости согласно [4] дается формулой

$$u = U(r, \varphi-\alpha) + U(r, \varphi+\alpha), \tag{1}$$

где

$$U(r, \psi) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{i\gamma/2}}{e^{i\gamma/2} - e^{-i\psi/2}} e^{-ikr\cos\gamma} d\gamma, \tag{2}$$

причем интегрирование проводится в плоскости комплексного переменного γ по петлям C (см. рис. 2). Вычисление интеграла (2) приводит к выражению

$$U(r, \psi) = \frac{1}{\sqrt{\pi i}} e^{-ikr\cos\psi} \int_{-\infty}^{w} e^{i\rho^2} d\rho, \tag{3}$$

где $w = \sqrt{2k_0 r}\cos(\psi/2)$.

Как известно [4], функция U (2) обеспечивает на обеих поверхностях экрана обращение в нуль нормальной компоненты результирующего вектора скорости частиц жидкости. В случае вязкой жидкости (и при выполнении условия прилипания) нужно вместо функции U построить другую функцию W, обеспечивающую на всей поверхности экрана обращение в нуль также и касательной компоненты скорости. Это можно сделать с помощью интеграла Зоммерфельда (2) и упоминавшегося результата Константинова, основываясь на следующих рассуждениях. Функция U (2) представляет собой совокупность плоских волн (в том числе и неоднородных) вида $\exp(-ikr\cos\gamma)$, причем $\gamma = \varphi-\beta$, β – угол падения (вместо α), свой для каждой волны (см. [4]). Если каждую плоскую волну домножить на коэффициент отражения Константинова $V(\beta)$ [1], то вместо функции $U(r, \varphi+\alpha)$ получим новую функцию $W(r, \varphi+\alpha, \varphi)$, которая представляет собой ту же совокупность плоских волн, что и функция $U(r, \varphi-\alpha)$, но только "повернутую" в пространстве на угол 2α по часовой стрелке с домножением каждой волны на соответствующий коэффициент V. Всякой плоской волне из $U(r, \varphi-\alpha)$ будет при этом соответствовать волна из $W(r, \varphi+\alpha, \varphi)$, так что в плоскости $\alpha/2$ на всей прямой $\varphi/2 = 0$ и $\varphi/2 = \pm\pi$ будет выполняться условие прилипания

для этой пары волн (поскольку коэффициент отражения V получен как раз при этом условии). Поэтому и сумма функций U и W обеспечит выполнение условия прилипания на этой же прямой, т.е. на обеих сторонах экрана.

На бесконечности функция $W(r, \psi, \varphi)$ должна обращаться в нуль при $|\psi| > \pi$; если же $|\psi| < \pi$, то W должно стремиться к плоской волне, отраженной от экрана по законам геометрической акустики (решение Константинова).

Выражение для коэффициента отражения $V(\beta)$ в переменных γ, φ $(\beta = \gamma + \varphi)$ имеет вид [1]

$$V = \frac{\sin(\gamma+\varphi) + k_0 \cos^2(\gamma+\varphi)\sqrt{\dfrac{\nu}{i\omega}}}{\sin(\gamma+\varphi) - k_0 \cos^2(\gamma+\varphi)\sqrt{\dfrac{\nu}{i\omega}}} \tag{4}$$

(вещественная часть у квадратного корня положительна); предполагается, что $k_0 (\nu/\omega)^{1/2} \ll 1$. Выражение для $W(r, \psi, \varphi)$ записывается в виде

$$W = \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{i\gamma/2}}{e^{i\gamma/2} - e^{-i\psi/2}} V(\gamma+\varphi) e^{-ikr\cos\gamma} d\gamma; \tag{5}$$

интегрирование проводится по петлям C или по вспомогательным путям D_1 и D_2 (рис. 2), причем в последнем случае к результату нужно добавить волну, соответствующую полюсу в точке $\gamma = -\psi$. Для выполнения условия на бесконечности необходимо, чтобы другие полюсы, обусловленные функцией V (4), не находились между петлями C в плоскости γ. Это требование может быть выполнено, так как из (4) видно, что указанные полюсы во всяком случае не лежат на вещественной оси плоскости γ.

Вместо двух путей интегрирования D_1, D_2 можно использовать один путь D_2. Везде ниже считаем, что $k_0 r \gg 1$, поэтому при интегрировании можно ограничиться малым участком контура D_2 в окрестности точки $\gamma = \pi$; при этом необходимо, чтобы контур пересекал вещественную ось под углом $\pi/4$ для обеспечения скорейшего "подъема" и "спуска" подынтегральной функции. Будем полагать $\varphi \ll 1$, при этом, однако, могут выполняться неравенства

$$\sqrt{k_0 r}\,\varphi \gg 1, \quad \varphi(\omega/\nu)^{1/2}/k_0 \gg 1. \tag{6}$$

Такое ограничение значений для φ достаточно для наших целей, так как позволяет осуществить, как будет показано, предельный переход к решению Зоммерфельда при выполнении условий (6). Таким образом, поле исследуется вблизи верхней поверхности экрана. В силу симметрии задачи и произвольности значений угла α поле у нижней поверхности (φ близко к 2π) можно не рассматривать.

С учетом сказанного выражение для коэффициента отражения (4) упрощается и принимает вид

$$V = \frac{\eta - k_0\delta'\sqrt{\dfrac{\nu}{i\omega}}}{\eta + k_0\delta\sqrt{\dfrac{\nu}{i\omega}}}, \tag{7}$$

$$\delta = 1 + \varphi(i\omega/\nu)^{1/2}/k_0, \quad \delta' = 1 - \varphi(i\omega/\nu)^{1/2}/k_0,$$

где $\eta = \gamma - \pi$, причем $|\eta| \ll 1$. Подставляя (7) в (5), после преобразований получаем:

$$W = \frac{i}{\pi} \int \frac{\eta^2\left(\cos\dfrac{\psi}{2} - k_0\sqrt{\dfrac{\nu}{i\omega}}\sin\dfrac{\psi}{2}\right) + \delta\delta'\dfrac{k_0^2\nu}{i\omega}\cos\dfrac{\psi}{2}}{(\cos\psi + \cos\eta)\left(\dfrac{\delta^2 k_0^2 \nu}{i\omega} - \eta^2\right)} \times e^{ikr\cos\eta} d\eta, \tag{8}$$

где интегрирование проводится от точки $\gamma = \pi$ по нижней половине контура D_2, $\psi = \alpha + \varphi$. На рис. 2 указан полюс P подынтегральной функции в точке $\eta = k_0\delta\,(\nu/i\omega)^{1/2}$, соответствующей некоторому значению $\varphi > 0$; этому полюсу соответствует неоднородная волна, распространяющаяся вдоль экрана и не имеющая аналога в классической акустике (см. ниже).

В рассматриваемом здесь приближении следует положить в подынтегральной функции (8) $\cos(\psi/2) = \cos(\alpha/2) - \varphi/2$, а также заменить $\sin(\psi/2)$ единицей (вследствие малости множителя перед синусом). В показателе экспоненты заменяем $\cos\eta = 1-\eta^2/2$; после этого интеграл (8) вычисляется обычным приемом дифференцирования по параметру, которым в данном случае является величина $(k_0 r/2)^{1/2}$. Выражение для W получается в виде суммы

$$W = I_1 + I_2, \tag{9}$$

$$I_1 = \frac{2\cos\frac{\alpha}{2} - k_0\sqrt{\frac{\nu}{i\omega}}}{\sqrt{\pi i}\,(2\cos\frac{\alpha}{2} + k_0\sqrt{\frac{\nu}{i\omega}}}\, e^{-ikr\cos\psi}\int_{-\infty}^{w} e^{i\rho^2}\,d\rho, \tag{10}$$

где $w = \sqrt{2k_0 r}\cos(\psi/2)$. При вычислении (10) предполагалось, что $w < 0$. Если $w > 0$, то нужно взять (10) с обратным знаком, а также изменить знак в верхнем пределе интеграла и к получившемуся результату прибавить решение Константинова, которое в первом приближении можно записать в виде

$$\frac{2\cos\frac{\alpha}{2} - k_0\sqrt{\frac{\nu}{i\omega}}}{2\cos\frac{\alpha}{2} + k_0\sqrt{\frac{\nu}{i\omega}}}\, e^{-ikr\cos\psi} \tag{11}$$

(ср. с (4)). Выполняя эти действия, снова получаем (10), но уже с положительным значением w. Таким образом, выражение (10) справедливо для любых значений w. В случае идеальной жидкости ($k_0\,(\nu/\omega)^{1/2} = 0$) оно переходит в решение Зоммерфельда (3). Второе слагаемое в (9) имеет вид

$$I_2 = \frac{k_0\sqrt{\frac{\nu}{i\omega}}}{2\cos\frac{\alpha}{2} + k_0\sqrt{\frac{\nu}{i\omega}}}\, e^{i(\kappa_0 x + \mu_0 y)}\left(1 - \frac{2\delta}{i\sqrt{\pi}}\int_0^a e^{\delta^2\rho^2}\,d\rho\right), \tag{12}$$

где $a^2 = k_0^3 r\nu/2\,\omega$, $\mu_0 = (i-1)\,k_0^2(\nu/2\,\omega)^{1/2}$, $\kappa_0 = (k^2-\mu_0^2)^{1/2}$ (вещественная часть положительна), $\delta = 1-i\mu_0 y/2a^2$; также используются для удобства декартовы координаты x, y. В случае идеальной жидкости I_2 обращается в нуль. Первое слагаемое в (12) представляет собой неоднородную плоскую волну с характерной шириной $\sim(\omega/\nu)^{1/2}/k_0^2$ и с амплитудой, зависящей от угла α; эта волна распространяется вдоль экрана от его края. При значениях α, близких к π, амплитуда волны может быть большой (при $\alpha = \pi$ она равна единице), в других случаях амплитуда по порядку величины равна $\sim k_0\,(\nu/\omega)^{1/2} \ll 1$.

Результирующее поле описывается суммой выражений (10), (12) и (3), причем в первых двух $\psi = \varphi + \alpha$, а в последнем $\psi = \varphi - \alpha$. Можно видеть, что решение данной задачи существенно отличается от решения Зоммерфельда при значениях α, близких к π, и если не выполняется какое-либо из неравенств (6) (или обе одновременно). Рассмотрим, например, случай, когда $\alpha = \pi$. В "классическом" случае решение для результирующего поля должно представлять собой невозмущенную падающую волну $\exp(ikx)$

в нашем случае оно имеет вид

$$u = \frac{2}{\sqrt{\pi i}} e^{ikx} \left[\int_0^w e^{i\rho^2} d\rho + e^{-a^2 + i\mu_0 y} \left(\frac{\sqrt{\pi i}}{2} - \frac{\delta}{\sqrt{i}} \int_0^a e^{\delta^2 \rho^2} d\rho \right) \right], \tag{13}$$

причем здесь $w = \sqrt{2 k_0 x}\, \varphi/2$. Для идеальной жидкости $a = 0$, $\mu_0 = 0$, $\delta = \infty$; оба интеграла в (13) взаимно уничтожаются, и (13) переходит в волну $\exp(ikx)$, как и должно быть. В случае вязкой жидкости при выполнении условий (6) выражение в круглых скобках в (13) близко к нулю, а верхний предел интеграла w велик по сравнению с единицей, поэтому (13) опять близко к $\exp(ikx)$.

Пусть теперь условия (6) не выполняются; в частности, положим $\varphi = 0$. Тогда (13) переходит в выражение

$$u = \frac{2}{\sqrt{\pi i}} e^{ikx - a^2} \left(\frac{\sqrt{\pi i}}{2} - \frac{1}{\sqrt{i}} \int_0^a e^{\rho^2} d\rho \right). \tag{14}$$

На не очень больших расстояниях от края экрана ($a \ll 1$) формула (14) близка к $\exp(ikx)$, однако по мере увеличения расстояния (a растет) отличие (14) от классического решения становится все более заметным. Когда $a \gg 1$, (14) переходит в

$$u = \frac{i}{a\sqrt{\pi}} e^{ikx}.$$

Амплитуда этой волны мала и, кроме того, убывает с расстоянием x, как амплитуда цилиндрической волны (поскольку a пропорционально $x^{1/2}$).

Таким образом, решение дифракционной задачи с учетом прилипания жидкости на поверхности экрана может существенно отличаться от соответствующего решения для случая идеальной жидкости, когда условия (6) не выполняются и когда угол падения α близок к π (т.е. $|\cos \frac{\alpha}{2}| \lesssim k_0 (\nu/\omega)^{1/2}$, как это видно из (10) и (12).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Константинов Б.П.* О поглощении звуковых волн при отражении от твердой границы // ЖТФ. 1939. Т. 9. № 3. С. 226–238.
2. *Савельев А.Я.* Эффект Константинова в некоторых задачах акустики // Акуст. журн. 1973. Т. 19. № 2. С. 231–239.
3. *Мурга В.А.* Поглощение звука при прохождении его через жидкий слой // Акуст. журн. 1984. Т. 30. № 5. С. 679–682.
4. *Зоммерфельд А.* Оптика. М.: Изд-во иностр. лит. 1953. С. 470.

Ленинградский кораблестроительный институт

Поступила в редакцию 12.12.89

V.A. Murga

SOUND DIFFRACTION ON A FLAT SCREEN IN A VISCOUS LIQUID

The strict solution of the problem of sound diffraction on a semi-infinite rigid plane taking into account the viscousity of the liquid and the adherence condition (the velocity of liquid particles is equal to zero on the surface if the screen) is obtained. "Forked solutions" technique elaborated by Sommerfeld for the similar diffraction problem in the case of an ideal liquid is used solving the problem mentioned above. As for the viscous liquid the necessary generalization is carried out with the help of Konstantinov's result referring to the problem of sound reflection from the infinite rigid plane with the adherence condition. The solution obtained is essentially different from the Sommerfeld's one. It is shown in particular that in the reflected sound field an inhomogeneous wave must exist which propagated along the screen. There is no analogous phenomenon in the classical acoustics.