

УДК 534.231

© 1991 г.

Е.Л. Шендеров

ПРОХОЖДЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ  
СКВОЗЬ УПРУГИЙ СЛОЙ

Проанализированы особенности, возникающие при прохождении сферической звуковой волны сквозь упругий слой произвольной волновой толщины. Точное решение построено на основе разложения сферической волны по плоским волнам. Расчеты выполнены для различных классов материалов (металлов, эластичных материалов, пластмасс).

Рассмотрим прохождение сферической звуковой волны, излучаемой точечным источником, расположенным в точке  $Q$  (рис. 1,  $a$ ), сквозь упругий слой произвольной волновой толщины. Возникает вопрос — насколько коэффициент прохождения для сферической волны отличается от коэффициента прохождения для плоской волны, падающей на слой под углом  $\theta_0$ ? В качестве возможного практического использования результатов ответа на этот вопрос можно отметить оценку погрешностей, возникающих при измерениях коэффициента прохождения звука через слой. Было замечено, что результаты измерений для упругих слоев, имеющих гладкие зависимости коэффициента прохождения от угла падения звука, обычно неплохо совпадают с результатами расчетов, а при негладких зависимостях различия могут быть весьма большими. Особенно плохо воспроизводятся экспериментально узкие минимумы (провалы), характерные для слоев пластмассы в воде и связанные с взаимодействием изгиб-

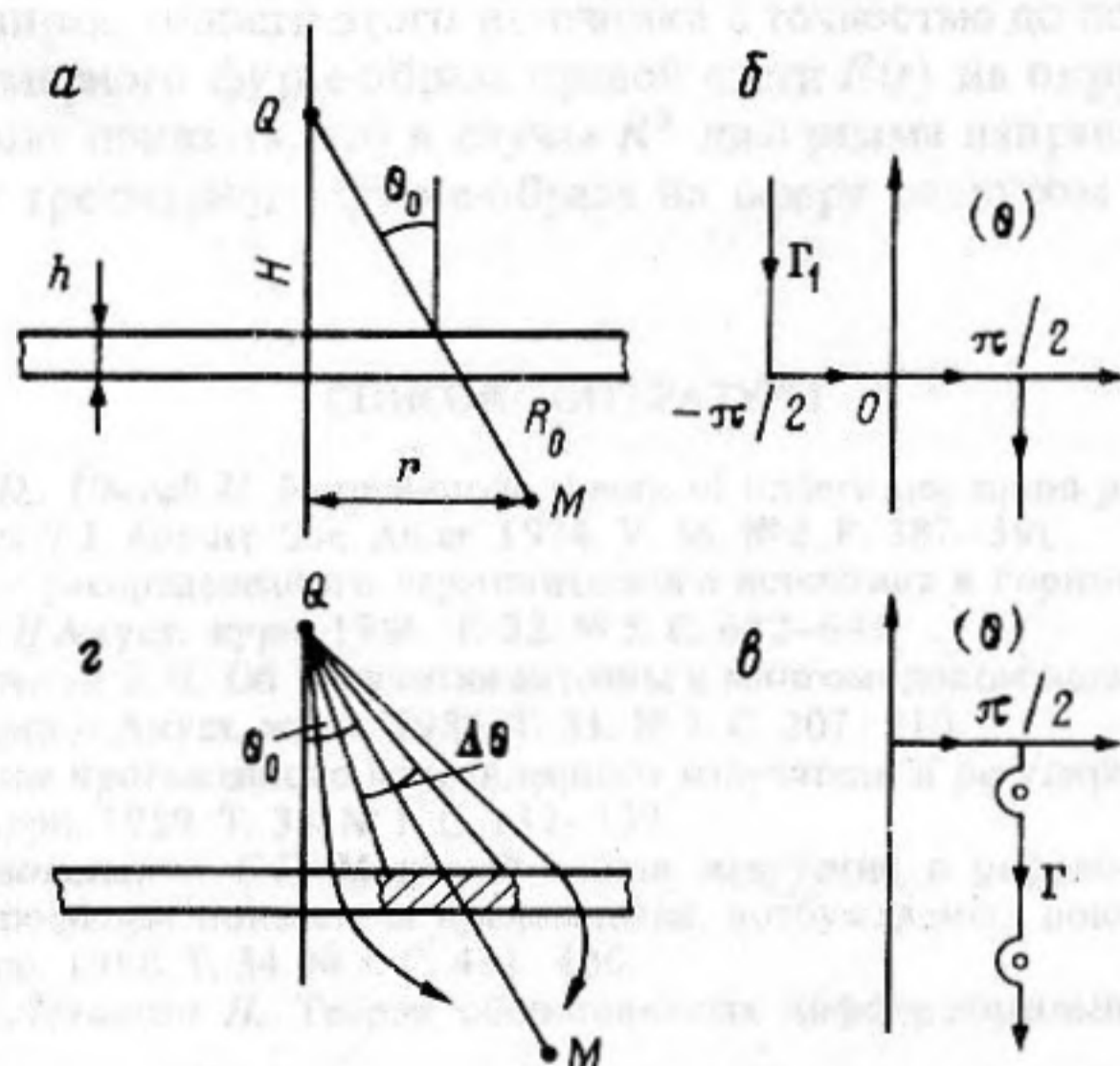


Рис. 1.  $a$  — система координат,  $б$  — контур  $\Gamma_1$ ,  $в$  — контур  $\Gamma$ ,  $г$  — непрозрачная зона

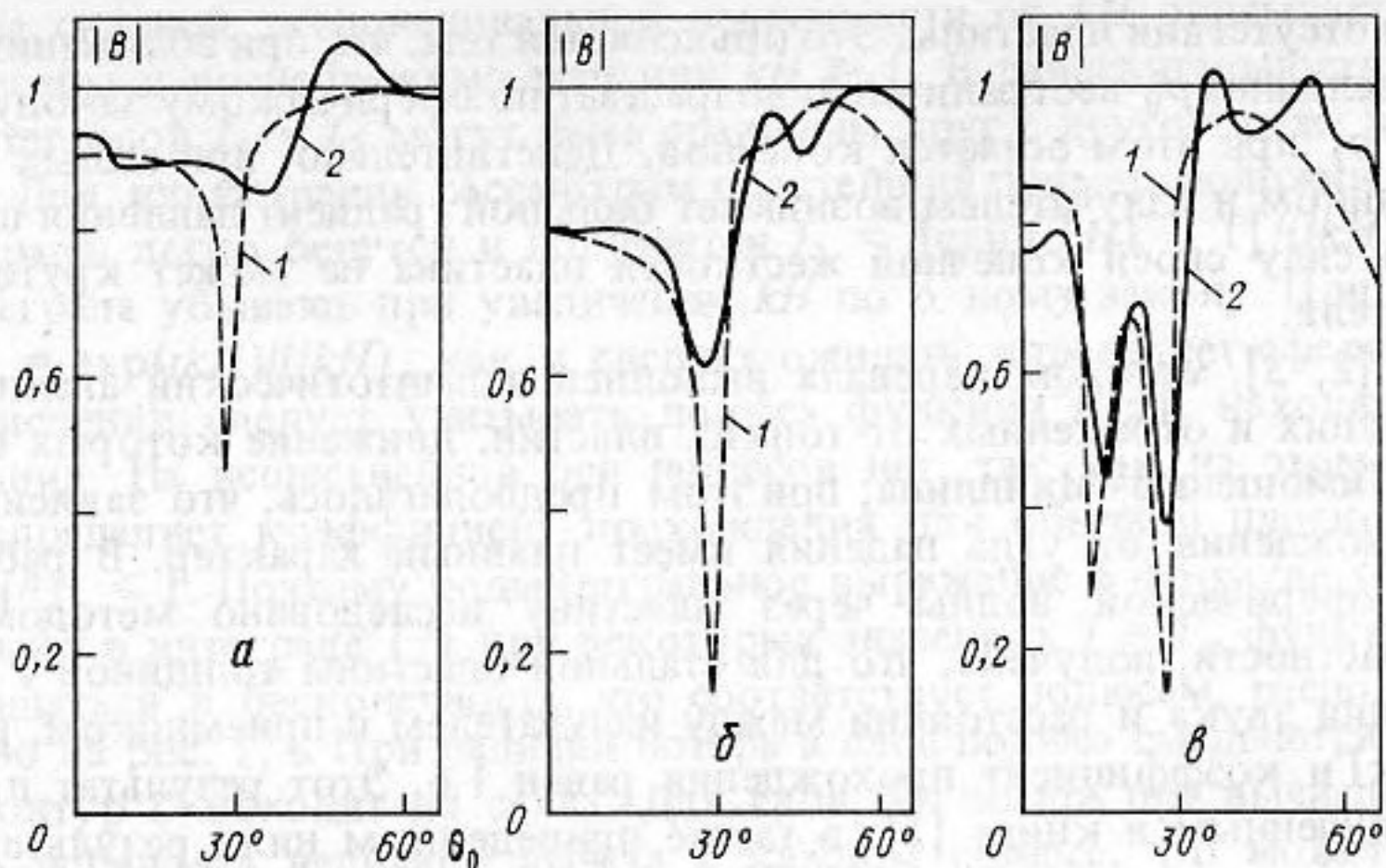


Рис. 2. Сравнение теоретических и экспериментальных зависимостей для слоя из пластмассы: 1 — расчет, 2 — эксперимент; а —  $kh = 0,96$ ,  $R_0 = 20\lambda_w$ ; б —  $kh = 1,93$ ,  $R_0 = 40\lambda_w$ ; в —  $kh = 2,89$ ,  $R_0 = 60\lambda_w$

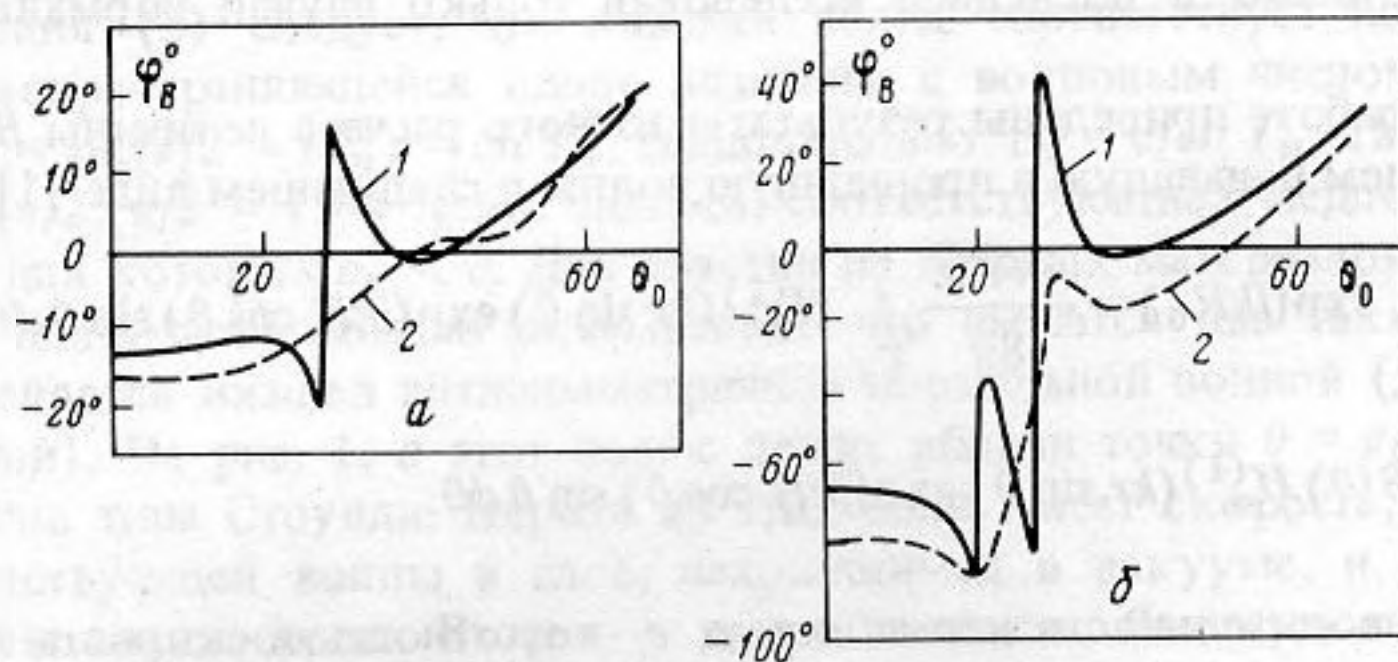


Рис. 3. Сравнение теоретических и экспериментальных зависимостей  $\varphi_B(\theta)$  для слоя из пластмассы: 1 — расчет, 2 — эксперимент; а —  $kh = 0,96$ ,  $R_0 = 20\lambda_w$ ; б —  $kh = 3,85$ ,  $R_0 = 80\lambda_w$

ных и продольных волн [1]. В качестве иллюстрации на рис. 2, 3 приведены результаты измерений и расчетов амплитуды и фазы коэффициента прохождения плоской звуковой волны через образец из пластмассы. Узкий провал (рис. 2, а) и скачки фазы на рис. 3 экспериментально не воспроизводятся. При некоторых углах падения измеренный коэффициент прохождения превышает единицу. По мере увеличения ширины провала сходство между экспериментальными и расчетными результатами улучшается. Известно, что одной из причин различий между результатами измерений и расчетов является дифракция звука на краях образца. Задачи, связанные с учетом дифракции, а также различий механических свойств ограниченного образца и бесконечного слоя, являются весьма сложными и представляют самостоятельную проблему. Другой причиной возникновения указанных различий является неплоский характер звуковой волны, падающей на образец. Ниже показано, что особенности, показанные на рис. 2, 3, могут объясняться сферическим характером падающей волны даже при расстояниях между приемником и излучателем, равных нескольким десяткам длин звуковой волны.

Прохождение сферической волны через тонкую пластину рассмотрено в книге [1]. При этом учитывались лишь изгибные колебания. Было показано, что с уменьшением расстояния  $H$  (при  $r = 0$ , рис. 1) коэффициент прохождения для сферической волны

$$B_{\text{sph}} = p_1/p_0 \quad (1)$$

уменьшается. Здесь  $p_1$  и  $p_0$  — соответственно звуковые давления в точке наблюдения

при наличии и отсутствии пластины. Это объясняется тем, что при сближении излучателя и приемника величина  $p_0$  неограниченно возрастает по сферическому закону, в то время как величина  $p_1$  при этом остается конечной. Действительно, при малых расстояниях между приемником и излучателем возникнет большой градиент давления вдоль пластины, однако в силу своей конечной жесткости пластина не может круто изгибаться вблизи излучателя.

В работах [2, 3] методом перевала выполнен асимптотический анализ звуковых полей, прошедших и отраженных от тонких пластин, движение которых описывается уравнениями Тимошенко—Миндлина; при этом предполагалось, что зависимость коэффициента прохождения от угла падения имеет плавный характер. В работах [4, 5] прохождение сферической волны через пластину исследовано методом конечных разностей. В частности, получено, что для стальной пластины толщиной 1 см при нормальном падении звука и расстоянии между излучателем и приемником, равным 1 м, на частоте 5 кГц коэффициент прохождения равен 1,6. Этот результат противоречит значениям, полученным в книге [1], а также приведенным ниже результатам точного расчета.

Влияние неплоского характера падающей волны на результаты измерений коэффициента прохождения звука при использовании параметрической антенны исследовалось в работах [6, 7], а при исследовании круглых излучателя и приемника — в работе [8]. Однако в последней исследован только случай нормального падения волны на слой.

В настоящей работе приведены результаты точного расчета величины  $B_{sph}$  для упругих слоев. Запишем падающую и прошедшую волны в следующем виде [1]:

$$p_0 = -\frac{i\omega\rho Q}{4\pi R_0} \exp(ikR_0) = \frac{\omega\rho k Q}{8\pi} \int_{\Gamma_1} H_0^{(1)}(kr \sin \theta) \exp(ikH \cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (2)$$

$$p_1 = \frac{\omega\rho Q}{8\pi} \int_{\Gamma_1} B(\theta) H_0^{(1)}(kr \sin \theta) \exp(ikH \cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (3)$$

Здесь  $Q$  — производительность источника,  $\rho$ ,  $c$  — плотность и скорость звука в среде,  $k = \omega/c$  — зависимость от времени в виде  $\exp(-i\omega t)$ ,  $B(\theta)$  — зависимость коэффициента прохождения звука от угла падения для вещественных и комплексных значений угла  $\theta$ , контур  $\Gamma_1$  показан на рис. 1, б. Выражение (3) неудобно для расчета из-за особенности при  $r = 0$ . Разбив интеграл на два (по левому и правому участкам), с учетом соотношений  $B(\theta) = B(-\theta)$  и  $H_0^{(1)}(-z) = -H_0^{(2)}(z)$  получим выражение, не имеющее особенности при  $r = 0$ . Тогда с использованием определения (1) найдем  $B_{sph} = ikR_0 I \exp(-ikR_0)$ , где

$$I = \int_{\Gamma} B(\theta) J_0(kr \sin \theta) \exp(ikH \cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (4)$$

Здесь  $\Gamma$  — контур, показанный на рис. 1, в. Заметим, что в последнее выражение входит величина  $H$ , которая есть суммарная проекция расстояния  $R_0$  на нормаль, а не каждое из расстояний от излучателя и приемника до слоя. Поэтому результат не будет меняться при перемещении слоя между приемником и излучателем.

Представим интеграл в виде суммы интегралов в пределах  $(0, \pi/2)$ ,  $(\pi/2, \pi/2 - i\infty)$ , причем во втором выполним замену  $\theta = \pi/2 - iT$ . Тогда

$$I = I_1 - iI_2, \quad (5)$$

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} B(\theta) J_0(kr \sin \theta) \exp(ikH \cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (6)$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} B(\pi/2 - iT) J_0(kr \operatorname{ch} T) \exp(-kH \operatorname{sh} T) \operatorname{ch} T dT. \quad (7)$$

Существует часто встречающееся заблуждение, согласно которому считают, что интеграл

типа  $I_2$  из-за сильной экспоненциальной зависимости от  $kH$  описывает ближнее поле вблизи пластины и пренебрежимо мал при  $kH \gg 1$ . В действительности это не так, и значения интегралов  $I_1$  и  $I_2$  могут быть сравнимы друг с другом даже в дальнем поле при  $kH \gg 1$ . Для иллюстрации рассмотрим простейший пример, положив  $r=0$ ,  $B(\theta) = 1$ . Тогда интегралы легко берутся и получается  $I_1 = [\exp(ikH) - 1]/(ikH)$ ,  $I_2 = 1/(kH)$ , т.е. оба интеграла убывают при увеличении  $kH$  по обратному закону. При этом величина  $I = I_1 - iI_2 = \exp(ikH)/(ikH)$ , как и следует ожидать, определяет сферическую волну.

При вычислении следует учитывать полюса функции  $B(\theta)$ , находящиеся на пути интегрирования. На вещественной оси полюсов нет, так как на этом участке функция  $B(\theta)$  определяет коэффициент прохождения для обычной плоской волны, причем  $0 \leq |B(\theta)| \leq 1$ . Поэтому подынтегральное выражение в формуле (6) всегда ограничено. Однако в интеграле (7) при некоторых значениях  $T = T_n$  функция  $B(\pi/2 - iT)$  может обращаться в бесконечность, что соответствует полюсам, расположенным так, как показано на рис. 1, в. При наличии потерь в слое полюса смещаются вправо, следовательно, контур  $\Gamma$  обходит их слева. Для слоя без потерь при вычислении интеграла необходимо добавлять величину вычета в каждом полюсе, что может оказаться непростой вычислительной задачей. Это связано с тем, что для достаточно сложных структур (например, многослойной среды, для которой коэффициент прохождения описывается матричными соотношениями) аналитическое вычисление вычета практически невозможно.

Из выражения (3) следует, что каждый полюс соответствует нормальной волне  $H_0^{(1)}(k_n r)$ , распространяющейся вдоль пластины с волновым числом  $k_n = k \sin \theta_n$ , причем  $\sin \theta_n = \sin(\pi/2 - iT_n) = \operatorname{ch} T_n$ ; следовательно,  $c_n = c/\operatorname{ch} T_n$ . Таким образом, на участке  $\theta = (\pi/2, \pi/2 - i\infty)$  лежат полюса, соответствующие "медленным" нормальным волнам, для которых  $c_n < c$ . Для пластин из твердых материалов (типа металлов или жестких пластмасс) обычно оказывается, что имеются два таких полюса. Один из них определяется низшей антисимметричной нормальной волной (для тонких пластин — изгибной). На рис. 1, в этот полюс лежит вблизи точки  $\theta = \pi/2$ . Второй полюс связан с волной типа Стоунли. Первая из этих волн имеет скорость, близкую к скорости соответствующей волны в слое, находящимся в вакууме, и несколько измененную из-за влияния среды. Вторая — имеет скорость, близкую к скорости звука в среде и несколько измененную из-за влияния слоя.

При расчетах предполагалось, что в слое имеются потери, поэтому подынтегральная функция в выражении (7) оставалась ограниченной. Коэффициент прохождения рассчитывался по точной формуле Рейсснера [1], справедливой для упругих изотропных слоев произвольной волновой толщины. Характер функций  $|B(\theta)|$  и  $|B(\pi/2 - iT)|$  для разных материалов показан на рис. 4. Приняты следующие значения параметров:  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $c = 1500 \text{ м/с}$ , кривая 1 (сталь) —  $\rho_M = 7800 \text{ кг/м}^3$ ,  $\lambda + 2\mu = 2,69 \cdot 10^{11} \cdot (1 - i 0,001) \text{ Н/м}^2$ ,  $\mu = 7,69 \cdot 10^{10} (1 - i 0,001) \text{ Н/м}^2$ , кривая 2 (пластмасса) —  $\rho_M = 1600 \text{ кг/м}^3$ ,  $\lambda + 2\mu = 2,2 \cdot 10^{10} (1 - i 0,01) \text{ Н/м}^2$ ,  $\mu = 3 \cdot 10^9 (1 - i 0,02) \text{ Н/м}^2$ ; кривая 3 (резина) —  $\rho_M = 1200 \text{ кг/м}^3$ ,  $\lambda + 2\mu = 3,9 \cdot 10^9 (1 - i 0,1) \text{ Н/м}^2$ ,  $\mu = 1,1 \cdot 10^8 \cdot (1 - i 0,2) \text{ Н/м}^2$ . Здесь  $\rho_M$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  — плотность и коэффициенты Ламэ для материала слоя.

В вещественной области углов коэффициент прохождения через слой резины уменьшается при увеличении угла падения, через слой стали — возрастает, а для пластмассы — имеет сложный характер, причем провал связан с взаимодействием симметричных и антисимметричных волн. При увеличении волновой толщины слоя провал расширяется. В комплексной области существуют максимумы (рис. 4, б, г), соответствующие описанным выше полюсам. Например, на фиг. 4, б второй максимум кривой 1 соответствует изгибной волне, распространяющейся со скоростью  $c_n = c/\operatorname{ch} 1,548 = 610 \text{ м/с}$ . Скорость изгибной волны ( $c_b$ ) в стальной пластине, находящейся в вакууме, при  $kh = 0,209$  составляет  $690 \text{ м/с}$ . Из рис. 100 работы [1] следует, что в данном случае  $c_n/c_b = 0,885$ . Поэтому  $c_n = 690 \cdot 0,885 = 611 \text{ м/с}$ , что почти точно соответствует значению, полученному из рис. 4, б.

Алгоритм вычисления интеграла  $I_2$  состоял в следующем. Сначала выполнялся

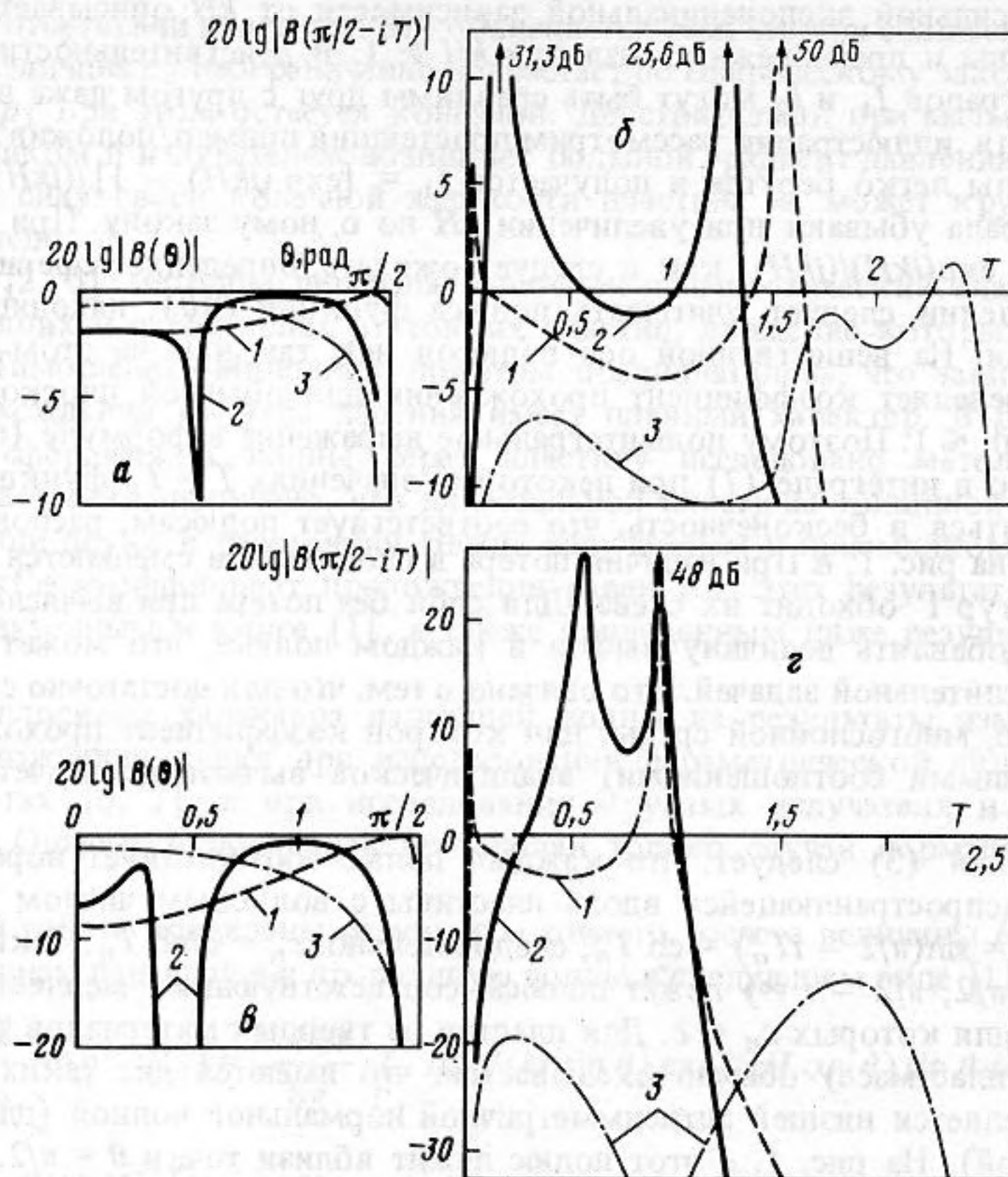


Рис. 4. Функции  $20\lg|B(\theta)|$  (а, е) и  $20\lg|B(\pi/2 - iT)|$  (б, з). а, б (1) — сталь,  $kh = 0,209$ , 2 — пластмасса,  $kh = 1,05$ , 3 — резина,  $kh = 1,05$ ; (в, з) (1) — сталь,  $kh = 0,627$ , 2 — пластмасса,  $kh = 3,14$ , 3 — резина,  $kh = 3,14$

машинный просмотр подынтегрального выражения при изменении  $T$ . При этом определялся верхний предел интегрирования как значение  $T$ , при котором подынтегральное выражение (7) уменьшается до  $10^{-6}$ , а также абсциссы полюсов  $T_n$ . Затем для уменьшения времени расчета промежутки интегрирования разбивался на ряд интервалов — в окрестности максимумов и в промежутке между ними. Время расчета на ЭВМ ЕС-1060 составляло 5–10 с для одной точки. Проверка при  $B(\theta) = 1$  показала, что вычисленное значение величины  $I$  отличалось от  $\exp(ikR_0)/(ikR_0)$  не более чем на  $10^{-6}$ .

Рассмотрим сначала зависимость  $|B_{sph}|$  от  $kR_0$  при расположении точек  $M$  и  $Q$  на одной нормали, т.е. при  $r = 0$ ,  $\theta_0 = 0$  (рис. 5). Горизонтальные прямые — значения коэффициента прохождения для плоской волны. При  $kR_0 > 10$  коэффициенты прохождения для плоской и сферической волн оказываются близкими друг к другу. При уменьшении  $kR_0$  для стальной пластины  $|B_{sph}|$  уменьшается в соответствии с рассуждениями, приведенными выше при обсуждении определения (1). Заметим, что на всей кривой  $1 |B_{sph}| < |B| < 1$ . Поэтому отмеченные выше результаты работ [4, 5] не подтверждаются.

При плавных зависимостях коэффициента прохождения звука от угла падения (металл, резина) уже при  $R_0 = (1 - 2) \lambda_w$ , где  $\lambda_w$  — длина волны в среде, результаты для плоской и сферической волн почти совпадают (рис. 6). Значительные отличия между ними возникают в тех случаях, когда угловые характеристики имеют сильно неравномерный характер. Из рис. 7, а видно, что узкий провал в области около  $\theta_0 = 30^\circ$  не воспроизводится даже при довольно больших расстояниях между излучателем и

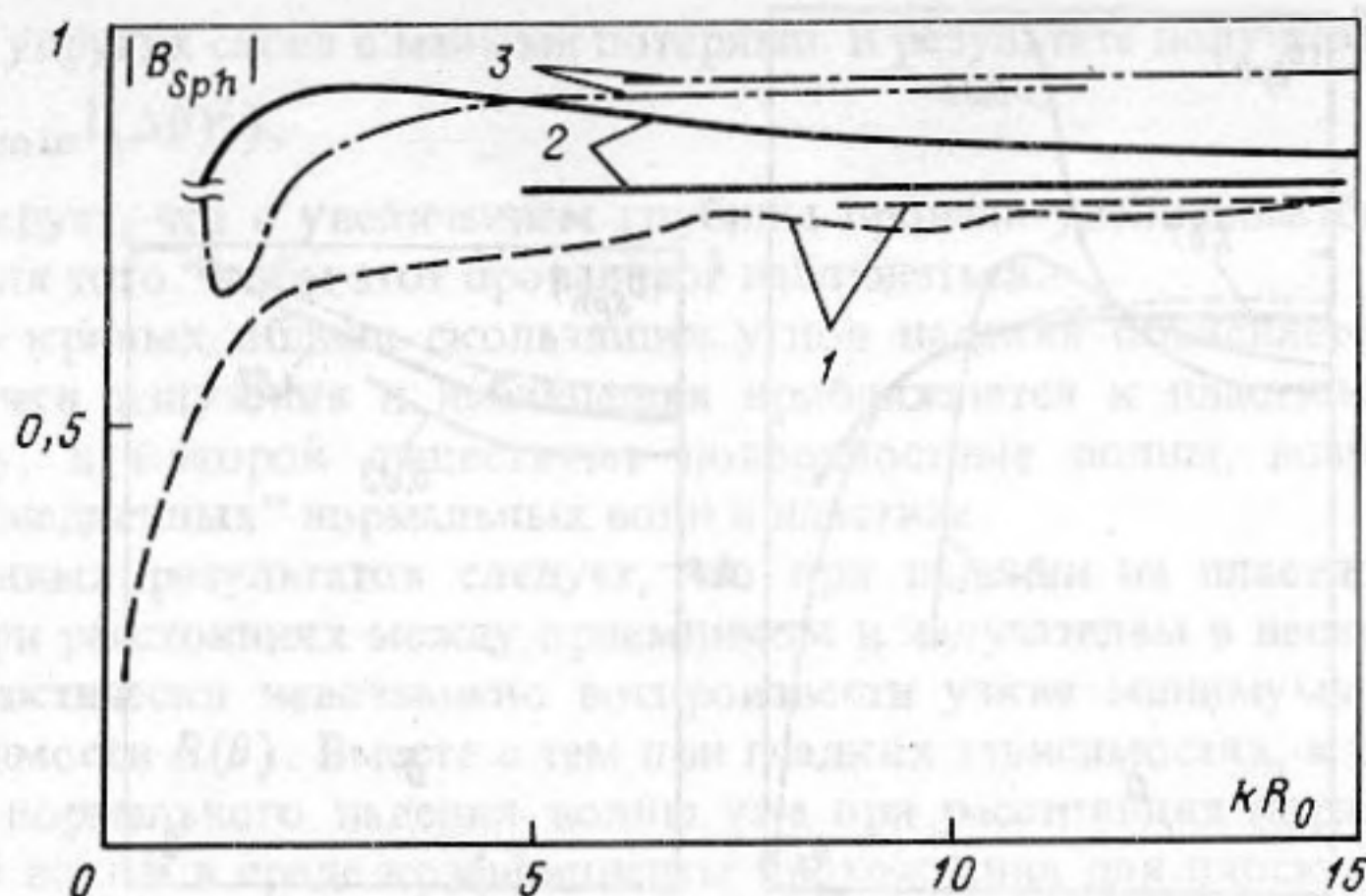


Рис. 5. Зависимость  $|B_{sph}|$  от  $kR_0$  при  $r = 0$ ,  $\theta_0 = 0$ . 1 — сталь,  $kh = 0,209$ , 2 — пластмасса,  $kh = 1,05$ , 3 — резина,  $kh = 1,05$

приемником. Вслед за провалом возникают максимумы, превышающие 1. Качественно эти кривые согласуются с экспериментальными результатами, приведенными на рис. 2. При увеличении волновой толщины слоя (рис. 7, б) провал становится более широким. В этом случае результаты для плоской и сферической волн становятся близкими друг к другу на меньших расстояниях, чем на рис. 7, а, однако все же эти расстояния остаются гораздо большими, чем для гладких зависимостей на рис. 6.

Совершенно аналогично плохо воспроизводится и узкий максимум на рис. 7, б в районе  $\theta_0 \approx 15^\circ$ .

Характер кривых объясняется следующим образом. Для того чтобы звуковое давление в прошедшей волне было мало, необходимо, чтобы пластина выполняла роль акустического экрана. Однако экранирование может быть эффективным только в том случае, если волновые размеры экрана достаточно велики. Поэтому заштрихованная область на рис. 1, 2, соответствующая области провала  $\Delta\theta$ , должна быть гораздо больше длины волны. Остальная часть слоя является акустически прозрачной. Если волновые размеры заштрихованной области малы, то возникает дифракция на непрозрачном участке. При этом зона тени не формируется, что приводит к сглаживанию угловых зависимостей. Это же рассуждение объясняет и возникновение значений, больших единицы, при осциллирующей зависимости от угла как типичной дифракционной картины, связанной с синфазным и противофазным сложением дифрагированных волн, огибающих непрозрачную область с разных сторон. Критерием для минимального размера непрозрачной области является условие, требующее, чтобы размеры этой области составляли хотя бы несколько ( $n = 5-10$ ) зон Френеля. Это приводит к оценке  $kR_0 \gtrsim 8\pi n / (\Delta\theta)^2$ .

Для пояснения можно также привлечь соображения, связанные с вычислением интеграла (3) методом перевала. При  $kR_0 \gg 1$  должна выполняться оценка [9]

$$B_{sph} = B(\theta_0) - \frac{i}{2kR_0} \left( \frac{d^2 B(\theta)}{d\theta^2} + \frac{dB(\theta)}{d\theta} \operatorname{ctg} \theta \right) \Big|_{\theta=\theta_0} + \dots \quad (8)$$

Второе слагаемое определяет поправку к коэффициенту прохождения для плоской волны, связанную с конечностью расстояния  $R_0$ . При этом предполагается, что зависимость  $B(\theta)$  имеет плавный характер и производные по углу невелики. Однако в областях резких изменений коэффициента прохождения это условие нарушается и второе слагаемое может оказаться больше первого даже при сравнительно больших значениях  $kR_0$ . В этих условиях метод перевала становится некорректным.

Если  $\theta_0$  — угол, при котором существует провал, то  $dB(\theta)/d\theta|_{\theta=\theta_0} = 0$ . Поэтому

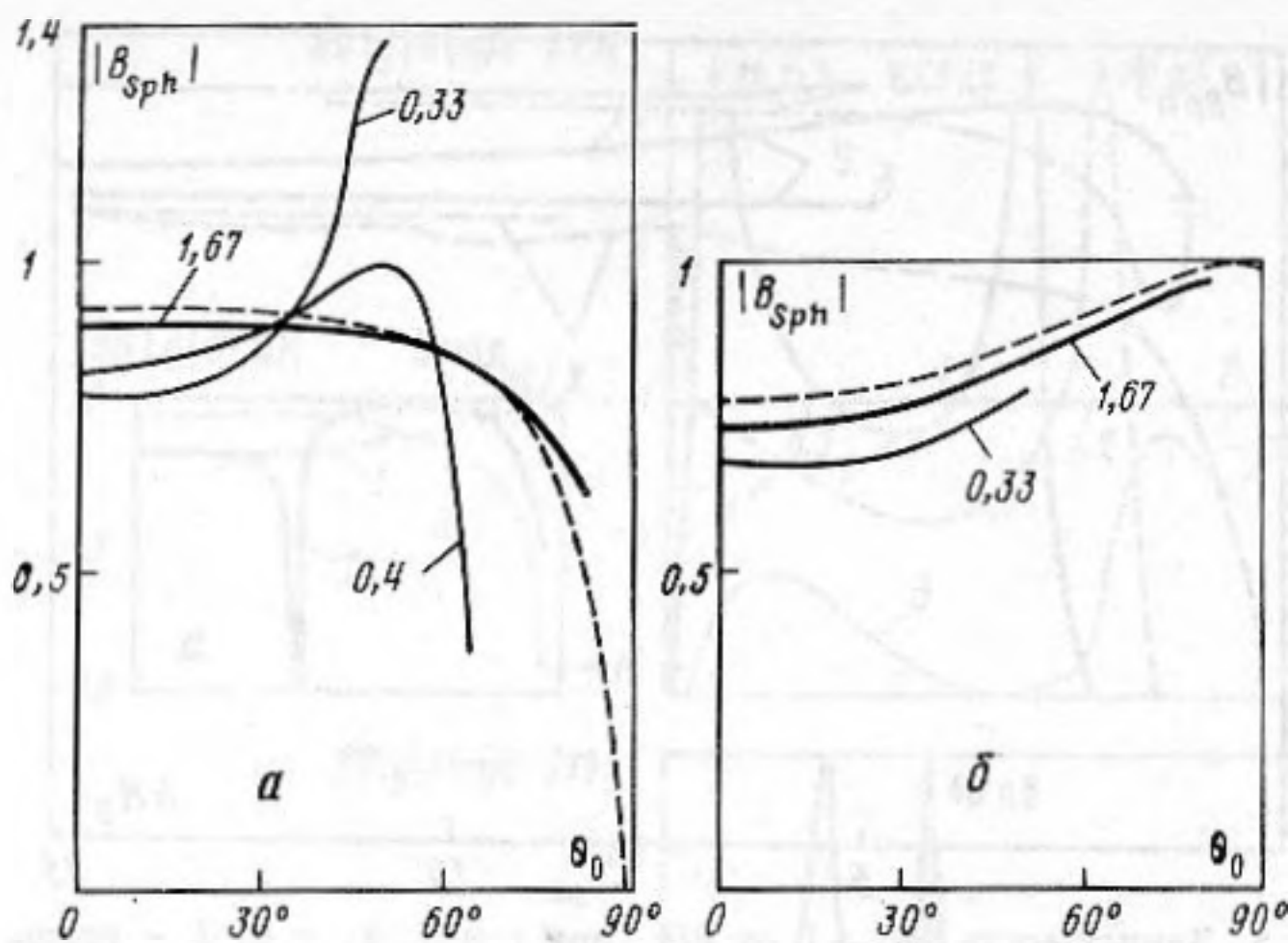


Рис. 6. Зависимости коэффициентов прохождения в сферической и плоской волнах от угла падения, *a* – резина,  $kh = 1,05$ , *б* – сталь,  $kh = 0,209$ ; штриховые кривые –  $|B|$ , остальные –  $|B_{sph}|$ . Числа около кривых – значения  $R_0/\lambda_w$

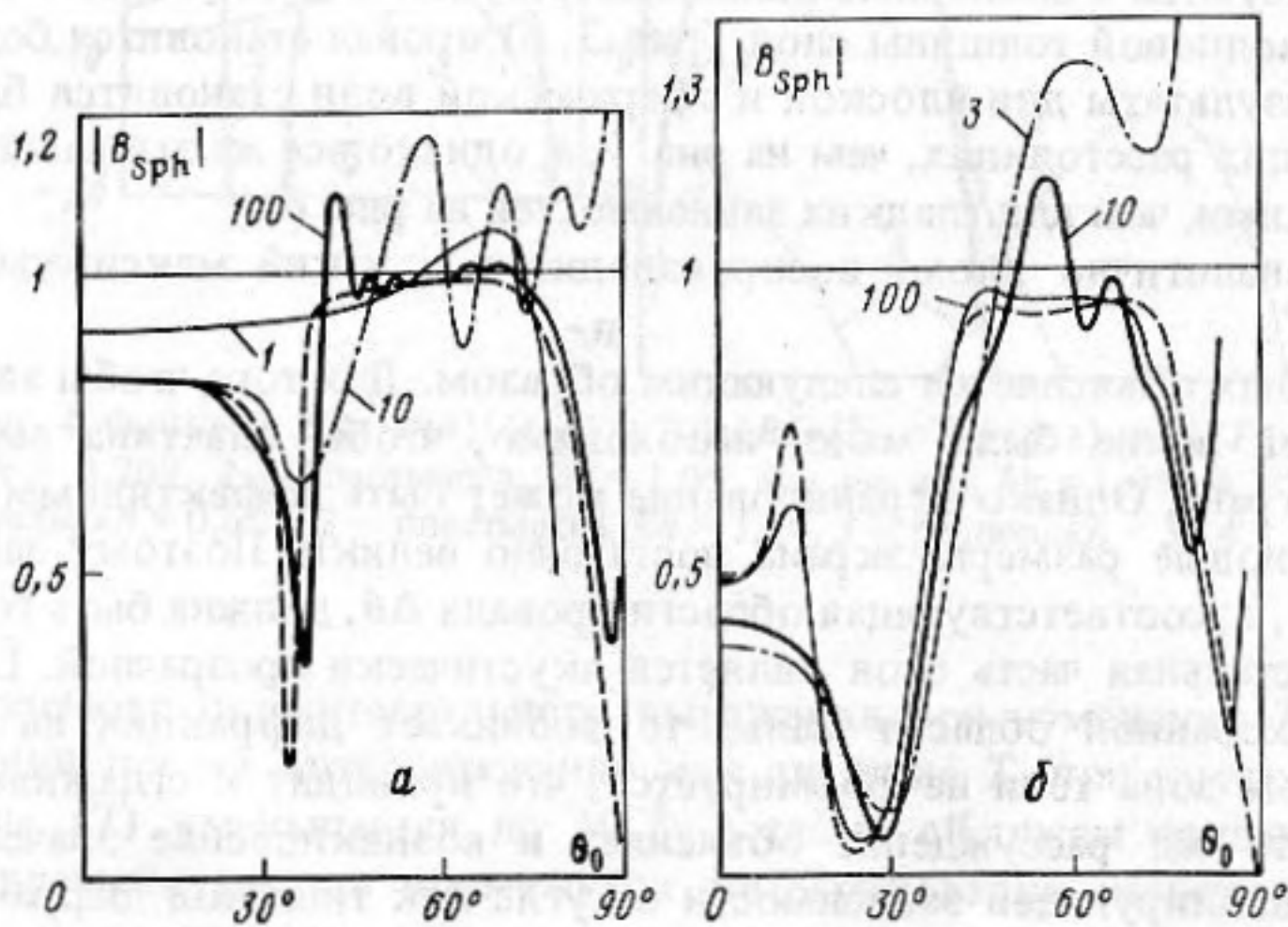


Рис. 7. Зависимости коэффициентов прохождения в сферической и плоской волнах от угла падения, пластмасса: *a* –  $kh = 1,05$ , *б* –  $kh = 3,14$ ; штриховые кривые –  $|B|$ , остальные –  $|B_{sph}|$ . Числа около кривых – значения  $R_0/\lambda_w$

в качестве критерия оценки расстояния, при котором значения  $|B|$  и  $|B_{sph}|$  мало отличаются, можно считать условие

$$kR_0 \gg \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 B(\theta)}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_0}$$

Аппроксимируем зависимость  $|B(\theta)|$  в районе провала гиперболой

$$|B/B_{min}|^2 - (\theta - \theta_0)^2/b^2 = 1,$$

где значение  $B_{min} = B|_{\theta=\theta_0}$  зависит от коэффициента потерь в материале слоя,  $b = |B_{min}| \Delta\theta/2$ ,  $\Delta\theta$  – ширина провала, продолженного прямыми линиями до уровня  $|B| = 1$ . Такая гипербола хорошо аппроксимирует минимум с острым кончиком, наблю-

дающимся для упругих слоев с малыми потерями. В результате получаем оценку

$$kR_0 \gg 2/(|B_{\min}|(\Delta\theta)^2),$$

из которой следует, что с увеличением глубины провала увеличивается и расстояние, необходимое для того, чтобы этот провал мог наблюдаться.

Возрастание кривых вблизи скользящих углов падения объясняется тем, что при этих углах точки излучения и наблюдения приближаются к пластине и попадают в ближнюю зону, в которой существуют поверхностные волны, возникающие из-за возбуждения "медленных" нормальных волн в пластине.

Из приведенных результатов следует, что при падении на пластину сферической волны даже при расстояниях между приемником и излучателем в несколько десятков длин волн практически невозможно воспроизвести узкие минимумы и максимумы угловой зависимости  $B(\theta)$ . Вместе с тем при гладких зависимостях, а также в области углов вблизи нормального падения волны уже при расстояниях порядка одной-двух длин звуковой волны в среде коэффициенты прохождения для плоской и сферической волн мало отличаются.

В дальнейшем предполагается рассмотреть возможности улучшения точности измерений на конечных расстояниях, а также структуру поля вблизи слоя.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шендеров Е.Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 348 с.
2. Куртепов В.М. Звуковое поле точечного источника при наличии в среде тонкой бесконечной пластины (дискретный спектр) // Акуст. журн. 1969. Т. 15. № 4. С. 560–566.
3. Куртепов В.М. Звуковое поле точечного гармонического источника при наличии в однородной среде тонкой бесконечной пластины (непрерывный спектр) // Акуст. журн. 1970. Т. 16. С. 96–101.
4. Piquette J.C. Spherical-wave scattering by a finite-thickness solid plate of infinite lateral extent with some implications for panel measurements // J. Acoust. Soc. Amer. 1988. V. 83. № 4. P. 1284–1294.
5. Piquette J.C. Interactions of a spherical wave with a bilaminar plate composed of homogeneous and isotropic solid layers // J. Acoust. Soc. Amer. 1988. V. 84. № 4. P. 1526–1535.
6. Humphrey V.F. The measurements of acoustic properties of limited size panels by use of a parametric source // J. Sound and Vibr. 1985. V. 98. № 1. P. 67–81.
7. Humphrey V.F., Berkley H.O. The transmission coefficient of a panel measured with a parametric source // J. Sound and Vibr. 1985. V. 101. № 1. P. 85–106.
8. Humphrey V.F. The influence of the plane wave spectrum of a source on measurements of the transmission coefficient of the panel // J. Sound and Vibr. 1986. V. 108. № 2. P. 261–272.
9. Бреховских Л.М., Годин О.А. Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 412 с.

Центральный научно-исследовательский институт "МОРФИЗПРИБОР"

Поступила в редакцию  
18.06.90

E.L. Shenderov

#### TRANSMISSION OF A SPHERICAL SOUND WAVE THROUGH AN ELASTIC LAYER

The transmission of a spherical sound wave through an elastic layer of an arbitrary wave thickness is analysed. The exact solution is based on the expansion of the spherical wave into plane ones. It is taken into account, that there are poles located on the vertical portion of the integration contour and connected with the excitation of "slow" normal waves in the layer.

The computations for various classes of materials (metals, rubber-like materials, plastics) are carried out. In the case of normal incidence the transmission loss coefficient (TLC) for spherical and plane waves do not differ considerably from each other, if distances between the radiator and receiver are greater than 1–2 wavelengths in the medium. The differences increase considerably at oblique incidence for the plastic layers when the plane-wave TLC angle dependence is not smooth and has sharp minima ("dips"). For the incident spherical waves these "dips" are not reproduced and are significantly smoothed even at the distances of several dozens wavelengths. At some angles of incidence the spherical wave TLC exceeds unit. These phenomena can be explained by diffraction on the limited non-soundtransparent part of the layer located in the solid angle near "the dip".