

1. Бункин Ф.В., Власов Д.В., Заболотская Е.А., Кравцов Ю.А. Температурный и пузырьковый механизмы четырехфотонного обращения волнового фронта звуковых пучков // Письма в ЖТФ. 1983. Т. 7. № 9. С. 560–563.
2. Власов Д.В., Заболотская Е.А., Кравцов Ю.А. Обращение волнового фронта в воде с пузырьками // Акуст. журн. 1983. Т. 29. № 1. С. 118–120.
3. Заболотская Е.А. Обращение волнового фронта звуковых пучков при четырехволновом взаимодействии в жидкости с пузырьками газа // Акуст. журн. 1984. Т. 30. № 6. С. 777–780.

Самаркандский государственный университет
имени А. Навои
физический факультет

Поступило в редакцию
02.10.90

УДК 539.3:534.1

© 1991 г.

И.В. Андронов, Б.П. Белинский

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ РАССЕЯНИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА КОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНЕ В УПРУГОЙ ПЛАСТИНЕ

Исследуется рассеяние плоской изгибной волны $u_0 = \exp \{ ik(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0) \}$ на тонкой трещине длины $2a$ в упругой пластине. Рассеянное поле u является решением краевой задачи:

$$(\Delta^2 - k^4)u = 0, \quad (x, y) \notin \{ |x| < a, y = 0 \},$$

$$S_n^\pm u = -S_n^\pm u_0, \quad n = 1, 2, \quad |x| < a,$$

где k – волновое число изгибных колебаний, а операторы перерезывающей силы S_1^\pm и изгибающего момента S_2^\pm на краях трещины имеют вид (σ – коэффициент Пуассона):

$$S_1^\pm = \mp \lim_{y \rightarrow \pm 0} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} + (2 - \sigma) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} \right), \quad S_2^\pm = \lim_{y \rightarrow \pm 0} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right).$$

Кроме того, на бесконечности ставится условие излучения, и в окрестности концов трещины задаются асимптотики, гарантирующие конечность энергии: $u = u_0^\pm + u_1^\pm(\varphi)r + u_{3/2}^\pm(\varphi)r^{3/2} + \dots$, $r \rightarrow 0$, где r и φ – связанные с рассматриваемым концом полярные координаты.

Методами теории потенциала краевая задача сводится к двум интегральным уравнениям типа свертки на отрезке [1]. Первое уравнение отвечает четной по y части поля и имеет старшую сингулярность ядра вида $\partial^2/\partial x^2 \ln|x-t|$, второе с сингулярной частью ядра $\partial^4/\partial x^4 \ln|x-t|$ отвечает нечетной по y составляющей u . По методу ортогональных многочленов интегральные уравнения заменяются бесконечными системами линейных алгебраических уравнений:

$$\alpha_l + \sum_{m=0}^{\infty} A_{lm} \alpha_m = f_l, \quad \beta_l + \sum_{m=0}^{\infty} B_{lm} \beta_m = g_l. \quad (1)$$

Элементы матриц этих систем A_{lm} , B_{lm} с индексами разной четности обращаются в ноль, а остальные выражаются интегралами по полуоси от функций со степенным убыванием порядка $O(\tau^{-6})$:

$$A_{lm} = \frac{2(m+1)i^{l+m}}{(1-\sigma)(3+\sigma)} \int_0^{\infty} J_{l+1}(k\tau) J_{m+1}(k\tau) \left\{ \frac{s_-}{t_-} - \frac{s_+}{t_+} \right\} \tau^{-2} d\tau,$$

$$B_{lm} = \frac{2(m+1)(m+2)(m+3)i^{l+m}}{(1-\sigma)(3+\sigma)(l+1)(l+3)} \int_0^{\infty} J_{l+2}(k\tau) J_{m+2}(k\tau) \{ s_+ t_- - s_- t_+ \} \tau^{-4} d\tau, \quad (2)$$

где $s_\pm = ((1-\sigma)\tau^2 \pm 1)^2$, $t_\pm = \sqrt{\tau^2 \pm 1}$, $J_n(z)$ – функция Бесселя. Таким образом, каждая из систем (1) распадается на две в соответствии с симметрией задачи. Правые части f_l и g_l зависят от угла падения θ_0 плоской волны:

$$f_l = i^{l+1} \frac{(\sigma \cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0)}{(1-\sigma)(3+\sigma)} \frac{J_{l+1}(k \cos \theta_0)}{\cos \theta_0},$$

$$g_l = i^{l+1} \frac{((2-\sigma) \cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0)}{(1-\sigma)(3+\sigma)} \frac{J_{l+2}(k \cos \theta_0)}{\cos^2 \theta_0}.$$

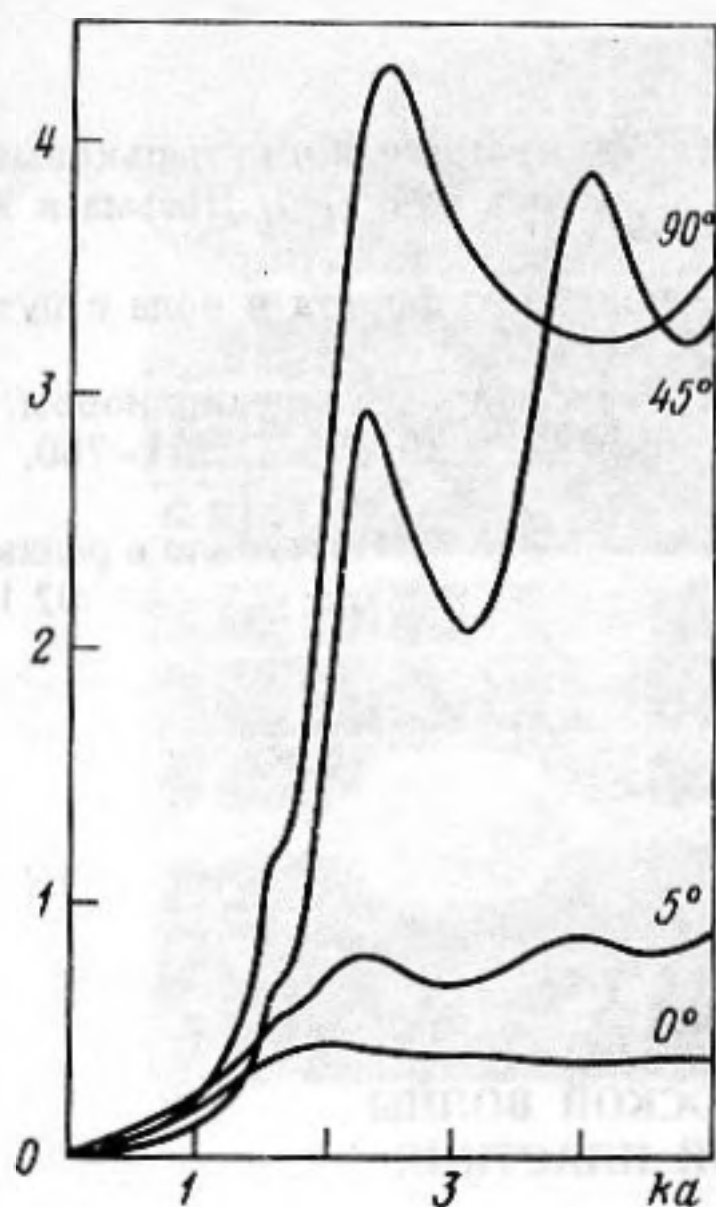


Рис. 1

Рис. 1. Зависимость безразмерного эффективного сечения рассеяния от волновой длины трещины для $\theta = 90^\circ, 45^\circ, 5^\circ$ и 0° ; $\sigma = 1/3$. Для $\theta_0 \neq 0$ эффективное сечение Σ нормировано на $a \sin \theta_0$ для $\theta_0 = 0$ — на $a/10$

Рис. 2. Зависимость безразмерного эффективного сечения рассеяния Σ/a от волновой длины трещины для $\theta_0 = 45^\circ$ при следующих значениях коэффициента Пуассона: 1 — $\sigma = 1/3$, 2 — $0,1$, 3 — $-1/3$

Рис. 3. Зависимость безразмерного эффективного сечения рассеяния Σ/a от угла падения θ_0 плоской волны для $\sigma = -1/3$ при $ka = 1,0, 1,1, 1,2, 1,3$

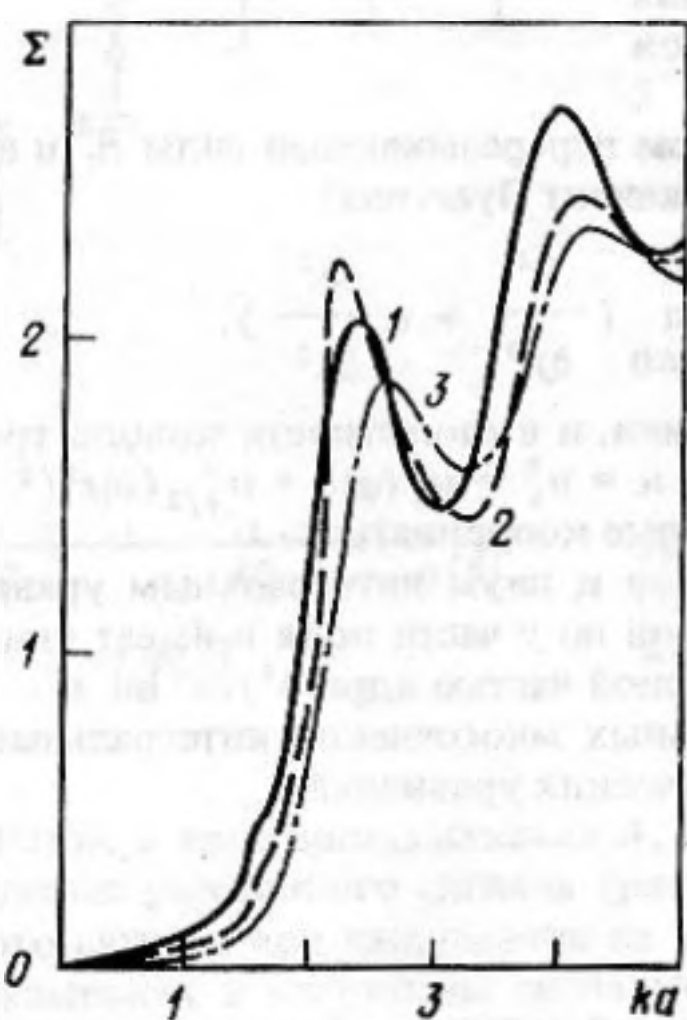


Рис. 2

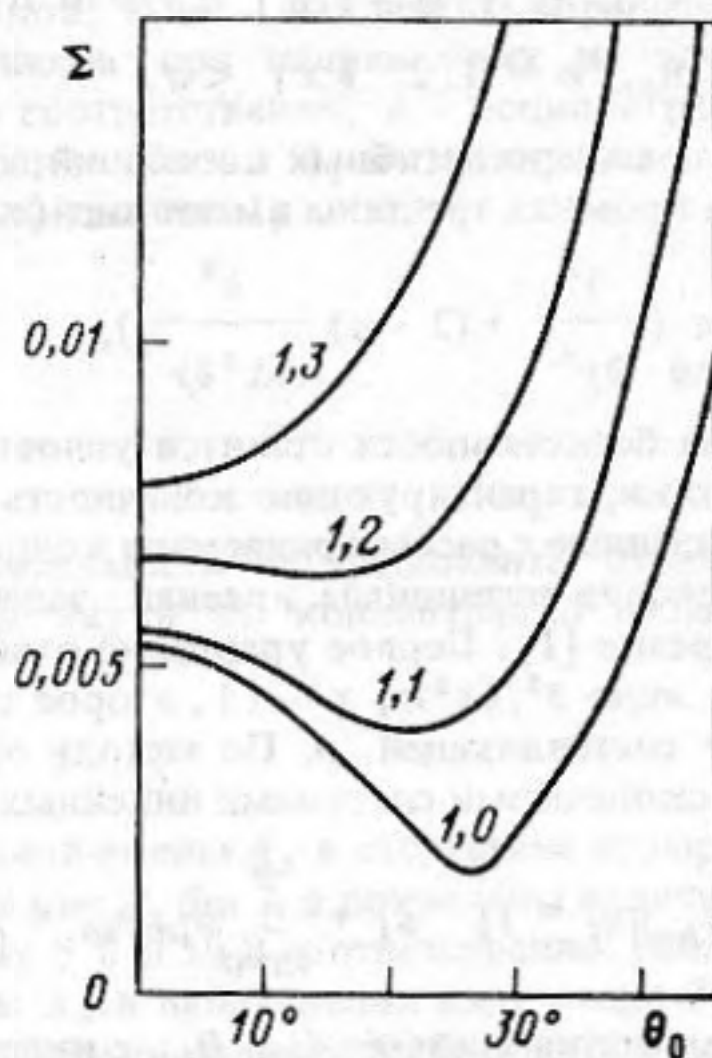


Рис. 3

По методу редукции, который обосновывается в [1], указанные системы заменяются конечными. При этом число учитываемых уравнений N зависит от безразмерного параметра задачи ka .

Через решения систем (1) могут быть выражены характеристики рассеянного поля. В частности, для диаграммы направленности Ψ расходящейся от трещины цилиндрической волны имеем:

$$\Psi(\theta, \theta_0) = (\sigma \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l (-1)^l (l+1) \frac{J_{l+1}(k \cos \theta)}{\cos \theta} + ((2 - \sigma) \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \sin \theta \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l (-1)^l \frac{(l+3)!}{l!} \frac{J_{l+2}(k \cos \theta)}{\cos^2 \theta}$$

При проведении вычислений диаграммы Ψ точность результатов контролировалась при помощи оптической теоремы [2]. Представленные ниже результаты имеют относительную погрешность не более 1%. Расчеты показали, что для $ka \leq 5$ системы (1) могут быть усечены на 10-м уравнении, т.е. с учетом того, что поле распадается на четыре составляющие, необходимо решать четыре системы

не более чем пяти уравнений. Основной трудностью расчетов является вычисление элементов матриц систем. Представленные результаты получены по программе, в которой реализовано вычисление элементов матриц систем по формулам (2) с использованием метода эталонных интегралов для ускорения сходимости.

Полученные численные и асимптотические результаты позволили установить некоторые особенности поля, дифрагированного на трещине в пластине Кирхгофа. На рис. 1 приведены зависимости эффективного сечения рассеяния Σ от волновой длины трещины для различных углов падения плоской волны. Характерной особенностью приведенных зависимостей является наличие максимума эффективного сечения рассеяния при $ka \approx 2,2$. Аналогичный максимум наблюдается при дифракции акустических волн на отрезке с условием Неймана [3] и объясняется интерференцией волн, расходящихся от концов препятствия.

Отметим, что влияние волны, аналогичной распространяющейся вдоль кромки полубесконечной пластины [4], не приводит к появлению резонансов. Этот вывод может быть сделан как на основании анализа приведенных графиков, так и исходя из исследования свойств разрешимости интегральных уравнений при комплексных частотах.

Наряду с указанными общими чертами явления дифракции в случае изгибных и акустических волн обнаружены и существенные отличия. Так, при падении акустической волны вдоль препятствия типа отрезка с условием Неймана эффективное сечение рассеяния обращается в ноль; при дифракции изгибной волны эффективное сечение отлично от нуля при $\theta_0 = 0, \sigma \neq 0$. Объясняется это тем, что для упругих материалов деформация тела в одном направлении вызывает его деформацию и в других направлениях. Это явление описывается коэффициентом Пуассона и имеет место при $\sigma \neq 0$.

В последнее время появились материалы с отрицательными значениями коэффициента Пуассона [5]. В связи с этим предпринимаются исследования по проверке основных формул теории упругости для этого случая [6]. Вывод приближения Кирхгофа для тонких пластин [7] остается справедливым и при $\sigma < 0$. На рис. 2 представлены зависимости эффективного сечения рассеяния изгибной волны от длины трещины при фиксированном угле падения 45° для различных значений коэффициента Пуассона материала пластины. Легко заметить, что существенные отличия в эффективном сечении наблюдаются лишь при малых длинах трещины. Этот вывод подтверждает и асимптотика при $ka \rightarrow 0$ [1]:

$$\Psi(\theta, \theta_0) = i \left(\frac{ka}{2} \right)^2 \frac{(\sin^2 \theta + \sigma \cos^2 \theta) (\sin^2 \theta_0 + \sigma \cos^2 \theta_0)}{(1 - \sigma)(3 + \sigma)} + O((ka)^4). \quad (3)$$

При $\sigma \geq 0$ диаграмма направленности Ψ имеет два лепестка, ортогональных трещине. При $\sigma < 0$ лепестков становится четыре. При этом существует такой угол падения $\theta_0 = \text{arctg}(\sqrt{-\sigma})$, для которого пропадает старший член асимптотики (3). Расчеты показали, что для $\sigma = -1/3$ провал на графике, представляющем зависимость эффективного сечения рассеяния от угла падения (рис. 3), сохраняется вплоть до значений $ka = 1,2$. Таким образом, на низких частотах существенную роль играют параметры материала, а на более высоких частотах сказывается лишь геометрия задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андронов И.В. Рассеяние изгибной волны на конечной прямолинейной трещине в упругой пластине // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 2. С. 312–321.
2. Белинский Б.П. Оптическая теорема для рассеяния волн в упругой пластине // Зап. науч. семин. ЛОМИ. 1981. Т. 104. С. 20–23.
3. Хенл Х., Мауз А., Вестфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964.
4. Коненков Ю.К. Об изгибной волне релеевского типа // Акуст. журн. 1960. Т. 6. Вып. 1. С. 124–126.
5. Lakes R. Foam Structures with negative Poisson's Ratio // Science. 1987. V. 235. P. 1038–1040.
6. Lipsett A., William, Beltzer Abraham I. Reexamination of dynamic problems of elasticity for negative Poisson's ratio // JASA. 1988. V. 84. № 6. P. 2179–2186.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.

Ленинградский государственный университет

Поступило в редакцию
02.07.90