УДК 534.222.2
© 1991 г.

Л.Г. Брускин

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПУЗЫРЬКОВ ГАЗА С ТВЕРДЫМИ ЧАСТИЦАМИ В АКУСТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Влияние акустического поля на жидкость, содержащую мелкие частицы твердой или газообразной фазы, изучалось в ряде работ [1–5]. Подробно исследован характер колебаний системы из двух пузырьков газа, находящихся в несжимаемой жидкости в поле стоячей либо бегущей волны, изменение волновых свойств двухфазной среды (появление дисперсии, модуляции концентрации частиц, а также ряда эффектов, аналогичных резонансным явлениям в нелинейной оптике).

В работе [6] ставилась задача исследовать осредненное движение сферической твердой частицы относительно газового пузырька в несжимаемой жидкости. Задачи такого типа возникают при математическом моделировании процесса флотации. В настоящей работе акустический флотационный эффект моделируется на основе уравнения нелинейных дипольных колебаний частицы в сжимаемой среде [1].

Следуя результатам работы [1], уравнение осредненного по периоду звуковой волны движения частицы запишем в виде

$$(\rho^* + \frac{\rho_0}{2}) V \frac{d\langle \mathbf{U}_p\rangle}{dt} = \frac{\rho_0 V}{2} \Big\{ \langle (\mathbf{U}_p - \mathbf{v}) \operatorname{div} \mathbf{v}\rangle - \tag{1}$$

$$- 3\langle [(\mathbf{U}_p - \mathbf{v}) \nabla] \mathbf{v}\rangle + \frac{2}{c_0^2} \langle \frac{\partial \varphi}{\partial t} (\frac{d\mathbf{U}_p}{dt} - 3 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t})\rangle \Big\} -$$

$$- 6\pi\rho_0 R_p \nu \langle (\mathbf{U}_p - \mathbf{v})\rangle + (\rho^* - \rho_0) V \mathbf{g}.$$

Здесь $V = 4/3\,\pi R_p^3$ – объем частицы, $\mathbf{g}$ – ускорение свободного падения, ν – кинематическая вязкость жидкости, $\mathbf{v}$ – скорость жидкости в отсутствие частицы, $\mathbf{U}_p$ – скорость частицы (в линейном приближении $\mathbf{U}_p = \mathbf{v}\, 3\rho_0/(2\rho^* + \rho_0)$, $\mathbf{v} = \Delta\varphi$, где φ – суммарное поле внешней акустической волны и волны, рассеянной пульсирующим газовым пузырьком, ρ^*, ρ_0 – плотности частицы и жидкости, c_0 – скорость звука.

В уравнении (1) учитываются силы радиационного давления, взаимодействия системы пузырек–частица, а также силы тяжести, Стокса и Архимеда. Центр пульсирующего во внешнем поле газового пузырька считается движущимся равномерно под действием силы сопротивления и выталкивающей силы, его радиус R_b удовлетворяет неравенству $R_p \ll R_b \ll \lambda$ (λ – длина падающей волны), воздействие дипольных колебаний частицы на монопольные колебания пузырька считается несущественным.

Потенциал φ действующего на частицу акустического поля может быть представлен в виде [5]

$$\varphi = \frac{1}{2} (\psi_0(\mathbf{r}) (1 + \frac{R_b}{(s^2 - 1 + i\delta) r_{pb}}) e^{i\omega t} + \text{к.с.}), \tag{2}$$

где ψ_0 – внешнее поле, $\mathbf{r}_{pb}$ – вектор, направленный из центра частицы в центр пузырька, $s = \omega_0/\omega$, где ω – частота падающей волны, ω_0 – частота собственных колебаний пузырька, δ – коэффициент, характеризующий тепловые, радиационные и вязкие потери.

Подставляя (2) в (1) и проводя усреднение по времени, в нулевом приближении по r/λ получим уравнение движения твердой частицы:

$$\tau \frac{d\langle \mathbf{U}_p\rangle}{dt} + \langle \mathbf{U}_p\rangle = A \frac{\mathbf{r}_{pb}}{r_{pb}^6} + D_1 \frac{\mathbf{g}}{g}. \tag{3}$$

Здесь

$$\tau = (\frac{\rho^*}{\rho_0} + \frac{1}{2}) \frac{2R_p^2}{9\nu},$$

$$A = \frac{5 R_p^2 R_b^2 (\rho^* - \rho_0) |\psi|^2}{9\nu (2\rho^* + \rho_0)((s^2 - 1)^2 + \delta^2)}, \qquad D_1 = (\frac{\rho^*}{\rho_0} - 1) \frac{2 R_p^2 g}{9\nu}.$$

На всплывающий пузырек действуют силы сопротивления и Архимеда, а также силы радиационного давления и взаимодействия с другими пузырьками газа и твердыми частицами. Ограничиваясь случаем малой концентрации пузырьков и учитывая, что их размеры во флотационной камере составляют 0,5–1 мм, можно считать пузырьки изолированными и всплывающими под действием только

силы сопротивления и выталкивающей силы. Скорость движения пузырька определится выражением [7]

$$\mathbf{U}_b = -P\frac{\mathbf{g}}{g}, \quad P = (4{,}4\, gR_b)^{1/2}. \tag{4}$$

Пренебрегая инерцией твердой части (что справедливо при выполнении условия $|\langle \mathbf{U}_p\rangle|/|d\langle \mathbf{U}_p\rangle/dt| \gg \tau$), для скорости относительного движения $\mathbf{U}_b - \mathbf{U}_p = d\mathbf{r}_{pb}/dt$ имеем соотношение

$$\frac{d\mathbf{r}_{pb}}{dt} = -A\frac{\mathbf{r}_{pb}}{r_{pb}^6} - D\frac{\mathbf{g}}{g}, \tag{5}$$

где $D = D_1 + P$. Решение уравнения (5), удовлетворяющее в начальный момент времени условию $x = \infty$, $y = b$, имеет вид

$$y = \left[b^5 - \frac{5A}{8D}\left(3\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + k\pi\right) - \frac{3yx}{x^2+y^2} - \frac{2y^3x}{(x^2+y^2)^2}\right)\right]^{1/5}. \tag{6}$$

Ось x направлена вдоль $\mathbf{g}$, начало отсчета в любой момент времени совпадает с центром твердой частицы. Число $k = 0$ при $x > 0$ и $k = 1$ при $x < 0$.

Определим параметр b, при котором падающая частица лишь изменит свою траекторию в поле пульсирующего пузырька, не образуя связанного состояния. Минимальный прицельный параметр, при котором частица "расходится" с пузырьком, определится из условия существования решения при $x \to -\infty$:

$$b_0 = \left(\frac{15\pi A}{8D}\right)^{1/5} = \left(\frac{75\pi R_p^2 R_b^2 (\rho^* - \rho_0)\,|\psi|^2}{8(2\rho^* + \rho_0)\left((\rho^*/\rho_0 - 1)\,2R_p^2 g + 9\nu P\right)\left((s^2-1)^2 + \delta^2\right)}\right)^{1/5}. \tag{7}$$

При $b < b_0$ происходит захват падающих частиц пузырьком, так что величина πb_0^2 имеет смысл сечения захвата. В случае внешнего поля ψ_0, обеспечивающего избыточное давление $\sim 10^4$ Па с частотой $\sim 3{,}2$ кГц при $R_p \approx 5\cdot 10^{-5}$ м, $R_b \approx 10^{-3}$ и добротности пузырька ~ 10 величина параметра захвата b_0 составляет $\sim 0{,}3$ см.

Если газовый пузырек покоится (пульсирует на капилляре), то в уравнении (5) $D = D_1$. При этом в нулевом приближении по r/λ сепарации частиц по размерам не происходит, прицельный параметр b_0 значительно возрастает и для тех же условий составляет $\sim 0{,}6$ см. Последняя оценка, впрочем, менее достоверна, так как поле пульсирующего на капилляре пузырька отличается от задаваемого выражением (2).

Следует отметить, что при записи уравнения (3) были опущены две составляющие усредненной по времени силы взаимодействия. Первая составляющая – это сила радиационного давления внешнего поля (малые слагаемые, пропорциональные $\nabla\psi \sim \psi/\lambda$). Вторая – член, пропорциональный $|\psi|^2/r_{pb}^3$, описывающий наряду с оставленным членом $\sim|\psi|^2/r_{pb}^5$ силу давления на маленькую частицу в сферической расходящейся волне, т.е. силу диполь-монопольного взаимодействия [3, 8]. Эта компонента более дальнодействующая, чем оставленная в (3), и при $r_{pb} \gtrsim 5$ см (для тех же значений основных параметров) она превосходит учтенный нами член. Однако на столь значительном удалении от пузырька абсолютное значение обеих компонент монополь-дипольного взаимодействия намного меньше силы тяжести, и траектория падающей частицы ими практически не искажается.

Сечение взаимодействия пропорционально $R_p^{4/5}$, поэтому эффективность захвата крупных частиц выше, чем мелких. Этот эффект сепарации отмечался в [6], где также предпринималась попытка объяснить механизм флотационного действия газового пузырька (без учета гравитации). Нелинейность уравнения колебаний частицы обеспечивалась благодаря введению поправки Осеена к стоксовой силе сопротивления, а среда полагалась несжимаемой. Авторами работы [6] было показано, что если время роста пульсирующего пузырька в несколько раз больше времени сжатия, то поправка Осеена обеспечивает притяжение частицы. Заметим, что это предположение оправдано лишь для мелких пузырьков кавитационной природы. Если же продолжительности фаз сжатия и расширения равны (случай колебаний воздушных пузырьков с размерами ~ 1 мм во флотационной камере), то согласно [6] средняя сила взаимодействия системы "пузырек–частица" равна нулю. Поэтому акустический флотационный эффект не может быть объяснен нелинейностью силы сопротивления.

Из уравнения (5) следует тот факт, что захваченными могут быть только частицы с плотностью, превышающей плотность жидкости ($A > 0$), тогда как при отсутствии акустической волны любые частицы могут испытывать соударения со всплывающим пузырьком.

Таким образом, уравнение нелинейных дипольных колебаний частиц может быть использовано для количественного описания процесса их захвата пузырьками газа во флотационной камере.

Автор благодарен Ю.А. Кобелеву за полезное обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кобелев Ю.А.* Нелинейные дипольные колебания сферической частицы в звуковом поле // Акуст. журн. 1983. Т. 29. № 6. С. 783–789.
2. *Заболоцкая Е.А.* Нелинейные волны в жидкости с пузырьками газа // Тр. ИОФАН. Т. 18. М.: Наука, 1989. С. 121–155.
3. *Горьков Л.П.* О силах, действующих на малую частицу в акустическом поле в идеальной жидкости // Докл. АН СССР. 1961. Т. 140. № 1. С. 88–91.
4. *Дойников А.А., Завтрак С.Т.* Относительное движение двух газовых пузырьков в сжимаемой жидкости // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 2. С. 256–259.
5. *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 2. М.: Изд-во Иностр. лит., 1960. 886 с.
6. *Ильин А.В., Кузнецов В.П., Новицкий В.Г., Фридман В.М.* Механизм флотационного действия пульсирующих газовых пузырьков // Акуст. журн. 1971. Т. 18. № 4. С. 537–545.
7. *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 700 с.
8. Физика и техника мощного ультразвука. Мощные ультразвуковые поля / Под ред. Розенберга Л.Д. М.: Наука, 1968. 267 с.

Иркутский политехнический институт

Поступило в редакцию 16.03.90

УДК 534.26

© 1991 г.

А.Д. Лапин

РЕЗОНАНСНОЕ РАССЕЯНИЕ ВОЛНЫ РЭЛЕЯ ОТ СТЕРЖНЯ, ПРИСОЕДИНЕННОГО К ГРАНИЦЕ ТВЕРДОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

На практике для создания звукоизоляции в волноводе широко применяют конструкции из четвертьволновых отростков. Такие отростки интенсивно рассеивают звуковые волны в волноводе. Можно ожидать, что стержень, присоединенный к границе твердого полупространства, будет резонансным рассеивателем для поверхностных рэлеевских волн. Ниже получены дисперсионные уравнения для резонансных частот стержня и оценена эффективность его работы в качестве рассеивателя волн.

Рассмотрим однородное твердое полупространство $z < 0$ со свободной поверхностью $z = 0$. К ней при $z = 0$, $\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant a$ присоединен (приклеен) тонкий круглый стержень радиусом a и длиной L. Ось стержня совпадает с осью z, конец $z = L$ стержня свободный. Поле в твердой среде будем характеризовать скалярным и векторным потенциалами φ и ψ. Пусть на стержень падает поверхностная рэлеевская волна с потенциалами

$$\varphi^{(0)} = A \exp(\alpha z + i\xi x), \quad \psi^{(0)} = \mathbf{j} A \frac{2i\xi\alpha}{(\xi^2 + \beta^2)} \exp(\beta z + i\xi x), \tag{1}$$

где

$$\alpha = \sqrt{\xi^2 - k_l^2}, \quad \beta = \sqrt{\xi^2 - k_t^2}, \quad k_l = \omega/c_l, \quad k_t = \omega/c_t,$$

c_l и c_t – соответственно скорости продольных и поперечных волн, ω – круговая частота, $\mathbf{j}$ – орт по оси y, ξ – корень уравнения Рэлея

$$(\xi^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha\beta\xi^2 = 0. \tag{2}$$

Под действием волны $(\varphi^{(0)}, \psi^{(0)})$ стержень колеблется и излучает поле $(\varphi^{(1)}, \psi^{(1)})$. Полное поле (φ, ψ) равно $\varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)}$, $\psi = \psi^{(0)} + \psi^{(1)}$. Оно сшивается с полем в стержне: на границе стержень – твердое полупространство непрерывны смещения и напряжения. При расчете рассеяния от тонкого стержня ($k_l a \ll 1$) достаточно потребовать непрерывности усредненных (по площади круга $\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant a$) смещения и напряжения.

Исследование эффективности рассеяния выполним на основе известных решений задач об излучении звука в твердом полупространстве [1–3]. Найдем поля в полупространстве и в стержне, создаваемые нормальной ($\perp$) и тангенциальной ($\parallel$) силами

$$F_0^{(\perp)}(t) = F_0^{(\perp)} \exp(-i\omega t), \quad F^{(\parallel)}(t) = F_0^{(\parallel)} \exp(-i\omega t), \tag{3}$$

равномерно распределенными по площади круга $z = 0$, $\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant a$. Амплитуды $F_0^{(\perp)}$ и $F_0^{(\parallel)}$ этих